CONSTRUCȚII ALE QUASIGRUPURILOR AUTOORTOGONALE FINITE

Anastasia PATLACIUC,

masterandă, anul II, Facultatea de Matematică și Informatică

CZU: 512.548 nastia.patlaciuc@mail.ru

Teoria operațiilor ortogonale a apărut în procesul soluționării cunoscutei ipoteze a lui Euler despre inexistența pătratelor latine ortogonale de ordinul n, unde $n \equiv 2(mod\ 4)$, proces finalizat în anii 60 ai secolului 20, fiind construite pătrate latine ortogonale de orice ordin diferit de 2 și 6. Ideile care au stat la baza acestor construcții au condus la numeroase generalizări ale noțiunii de ortogonalitate și au deschis noi direcții de cercetare în acest domeniu [2,3].

De asemenea, numeroasele posibilități de aplicare a operațiilor ortogonale și a sistemelor ortogonale de operații în combinatorică, teoria algebrică a codurilor, teoria planificării experimentelor, ș.a. au pus noi probleme ce vizează metodele de construcție a sistemelor ortogonale de operații $n-$ are [3-5]. În această direcție sunt mai multe probleme deschise, printre care menționăm caracterizarea numărului maximal de pătrate latine de ordinul n într-un sistem ortogonal și spectrului quasigrupurilor $n-$ are autoortogonale pentru $n \geq 3$ [1,3,5].

În caz binar se știe că există quasigrupuri autoortogonale de orice ordin q, diferit de 2,3,6 [3]. În lucrare sunt prezentate metode noi de construcție a operațiilor autoortogonale $2^n - are,\ \forall n \geq 2$.

Un grupoid n-ar (Q, A) se numește quasigrup n-ar dacă în egalitatea $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}$ fiecare n dintre elementele $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ îl determină univoc pe al $(n+1)$-lea. Un sistem din n quasigrupuri $n-$are $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$, definite pe o mulțime Q, se numește ortogonal dacă sistemul de ecuații $\{A_i(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) = a_i\}_{i=1,\dots,n}$ are soluție unică, pentru orice $a_1, \dots, a_n \in Q$.

Fie (Q, A) un quasigrup $n - ar\ (n \geq 2)$ și fie $\sigma \in S_{n+1}$. Numim σ - parastrof al operației A operația ${}^{\sigma}A$, definită de echivalența:

$$ {}^{\sigma}A\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)},\ \dots, x_{\sigma(n)}\right) = x_{\sigma(n+1)} \ \Leftrightarrow\ A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}. $$

Dacă $\sigma(n+1) = n+1$, atunci ${}^{\sigma}A$ se numește parastrof principal al operației A. O operație $n-$ ară A se numește parastrofic ortogonală (autoortogonală), dacă există n

parastrofi (respectiv parastrofi principali) ortogonali ai ei. Unicii parastrofi principali ai unui quasigrup binar (Q, A) sunt dați de substituțiile ε și (12), deci sunt operațiile A și ${}^{(12)}A$. Parastroful ${}^{(12)}A$ îl vom nota în continuare cu A^* și îl vom numi conjugata operației A. Astfel $A^*(x, y) = A(y, x), \ \forall x, y \in Q$.

În continuare va fi prezentată o metodă generală de construcție a quasigrupurilor $2^n - are$ autoortogonale finite $(n \geq 2)$. Fie (Q, A) un quasigrup binar finit autoortogonal. Notăm:

$$D_1^2(x,y) = A(x,y), \ \ D_2^2(x,y) = A^*(x,y).$$

Definim recursiv operațiile 2^n-are $\mathrm{D}_k^{2^n}$, unde $\mathrm{n} \geq 2$, $\mathrm{k} = \overline{1, 2^n}$ în felul următor:

$$D_1^4(x_1^4) = A(D_1^2(x_1,x_2), D_1^2(x_3,x_4)), \ D_2^4(x_1^4) = A^*(D_1^2(x_1,x_2), D_1^2(x_3,x_4)),$$

$$D_3^4(x_1^4) = A(D_2^2(x_1,x_2), D_2^2(x_3,x_4)), \ D_4^4(x_1^4) = A^*(D_2^2(x_1,x_2), D_2^2(x_3,x_4)),$$

ș.a.m.d. În caz general avem:

$$D_{2i-1}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right),$$

$$D_{2i}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A^*\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \ i = \overline{1, 2^{n-1}}.$$

Lema 1. $D_k^{2^n}$, *unde* $n \geq 2, \ k = \overline{2, 2^n}$, *sunt parastrofi principali ai quasigrupului* $D_1^{2^n}$.

Propoziție. *Fie* (Q, A) *un quasigrup binar finit autoortogonal, atunci parastrofii principali*

$$\begin{cases} D_{2i-1}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \\ D_{2i}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A^*\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \end{cases}$$

$n \geq 2, \ i = \overline{1, 2^{n-1}}$ *și* $D_1^2 = A, \ D_2^2 = A^*, \ \forall \ x_1, \ \ldots, \ x_{2^n} \in Q$, *formeaza un sistem ortogonal, deci* $\left(Q, \ D_1^{2^n}\right)$ *este autoortogonal.*

Corolar. Exista quasigrupuri 2^n-are autoortogonale de ordinul q, pentru orice q diferit de 1,2,3, 6 și orice $n \geq 2$.

Referințe:

1. BELOUSOV, V. *Fundamentele teoriei quasigrupurilor și a buclelor*. Moscova, Nauka, 1967, 224 p.
2. BOSE, R. C., SHRIKHANDE, S. S., PARKER, E. T. Further results of the constructions of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture. *Canad. J. Math*. 1960, 12, pp. 189-203.

3. DENES, J., KEEDWELL, A.D. *Latin squares and their applications*: Second edition. Elsevier, 2015, 440 p.
4. EVANS, T. The construction of orthogonal *k*-skeins and latin *k*-cubes. *Aequat. Math*., 1976, 14, N3, pp. 485-491.
5. SIRBU, P. *Teoria quasigrupurilor. Introducere*. CEP USM, 2014, 172 p.

Recomandat
***Parascovia SÎRBU**, dr., conf. univ.*