SISTEME DIFERENȚIALE CUBICE CU UN FASCICUL DE DREPTE AFINE INVARIANTE ȘI LINIA DE LA INFINIT DE MULTIPLICITATEA DOI

CUBIC DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH A BUNDLE OF THREE INVARIANT STRAIGHT LINES AND THE LINE AT INFINITY OF MULTIPLICITY TWO

CZU: 517.925.41 **https://doi.org/10.59295/spd2025e.106**

Alexandru ȘUBĂ
ORCID: 0000-0003-3489-9619
E-mail: alexandru.suba@math.md
Institutul de Matematică și Informatică „Vladimir Andrunachievici”,
Universitatea de Stat din Moldova;
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău, Republica Moldova

Vitalie PUȚUNTICĂ
ORCID: 0009-0009-0643-097X
E-mail: putunticavitalie@gmail.com
Institutul de Chimie, Universitatea de Stat din Moldova;
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chișinău, Republica Moldova

Summary.*In this paper we show that in the class of cubic differential systems with a bundle of three affine invariant straight lines and the line at infinity of multiplicity two each critical point with pure imaginary eigenvalues is of the center type if and only if the first Lyapunov quantity vanish. In all the cases of center the systems are Darboux integrable.*

Keywords*: cubic differential system, center problem, invariant straight line, multiplicity.*

I. INTRODUCERE

Considerăm sistemul cubic de ecuații diferențiale

$$\{\dot{x} = y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv p(x,y), \dot{y} = -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv q(x,y), \quad (1)$$

coeficienții căruia se presupun numere reale și $(k,l,m,n,p,q,r,s) \neq 0$. Vom presupune că (1) nu este degenerat, adică $gcd\ gcd\ (p,q) = 1$, și la infinit n-are mai mult de patru puncte critice, i.e. $k(x,y) = sx^4 + +(k+q)x^3y + (m+n)x^2y^2 + (l+p)xy^3 + ry^4 \not\equiv 0$.

În dependență de valorile coeficienților punctul critic $(0,0)$ este pentru sistemul (1) ori de tip centru, ori de tip focar. Astfel, apare *problema centrului,* adică a determinării acelor condiții asupra coeficienților lui (1) încât $(0,0)$ să fie de tip centru. Este bine cunoscut că sistemul (1) are în $(0,0)$ centru dacă și numai dacă, mărimile Liapunov $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$, corespunzătoare lui $(0,0)$, se anulează (vezi [1-5]). Menționăm, că mărimile Liapunov reprezintă niște polinoame de coeficienții lui (1). La fel, în originea sistemului de coordonate avem centru dacă (1) are în $(0,0)$ integrală primă analitică sau factor integrant analitic.

Sistemul (1) omogenizat arată astfel

$$\{\dot{x} = yZ^2 + (ax^2 + cxy + fy^2)Z + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x,y,Z), \dot{y} = -\left(xZ^2 + (gx^2 + dxy + by^2)Z + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3\right) \equiv Q(x,y,Z).$$

Introducem notațiile:

$$X_\infty = P(x,y,Z)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y,Z)\frac{\partial}{\partial y} \text{ și } E_\infty = P(x,y,Z)\cdot X_\infty(Q) - Q(x,y,Z)\cdot X_\infty(P).$$

Polinomul E_∞ are forma

$$E_\infty = C_2(x,y) + C_3(x,y)Z + C_4(x,y)Z^2 + \dots + C_8(x,y)Z^6,$$

unde $C_j(x,y), j = 2,3,\dots,8,$ sunt polinoame în x și y. De exemplu, $C_2(x,y) = k(x,y)\cdot C_{21}(x,y)$, unde

$$C_{21}(x,y) = (kq - ms)x^4 + 2(kn - ps)x^3y + (3kl + mn - pq - 3rs)x^2y^2 + 2(lm - qr)xy^3 + (lp - nr)y^4.$$

Se zice că pentru (1) linia de la infinit $Z = 0$ are *multiplicitatea* $\nu\nu$ dacă au loc relațiile $\{C_2(x,y) \equiv 0, \dots, C_\nu(x,y) \equiv 0, C_{\nu+1}(x,y) \not\equiv 0\}$ sau, altfel spus, $\nu - 1$ este cel mai mare număr pozitiv încât $Z^{\nu-1}$ împarte polinomul E_∞.

Curba algebrică $f(x,y) = 0, f \in C[x,y]$, (funcția $f = \frac{g}{h}$, $g,h \in C[x,y]$) se numește *invariantă* (*factor exponențial*) pentru (1) dacă există așa polinom $K \in C[x,y]$ de grad nu mai mare ca doi încât are loc identitatea

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot p(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot q(x,y) \equiv f(x,y)K(x,y) \qquad (2)$$

$\forall (x,y) \in R^2$ $(\forall (x,y) \in R^2 \backslash \{(x,y)|h(x,y) = 0\})$. În caz particular, dreapta $L \equiv Ax + By + C = 0, A,B,C \in C$, se numește invariantă, dacă există așa polinom $K \in C[x,y]$ încât

$$A \cdot p(x,y) + B \cdot q(x,y) \equiv (Ax + By + C) \cdot K(x,y)\ \forall (x,y) \in R^2.$$

Vom spune că sistemul diferenţial (1) este *Darboux integrabil*, dacă el are integrală primă $F(x,y)$ (factor integrant $\mu(x,y)$) de forma $f_1^{\sigma_1} f_2^{\sigma_2} \cdots f_\tau^{\sigma_\tau}$, unde $f_j, j = 1,2,\dots,\tau,$ sunt o totalitate de curbe algebrice invariante şi factori exponenţiali, iar $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\tau$ sunt numere din C nu toate egale cu zero concomitent.

Studierii sistemelor diferenţiale cubice ce au linia de la infinit de anumită multiplicitate le sunt consacrate lucrările [6-11]. În această lucrare vom arăta că pentru sistemele cubice (1) ce au un fascicul de trei drepte afine invariante şi pentru care linia de la infinit e de multiplicitatea nu mai mică ca doi punctul critic $(0,0)$ e de tip centru.

II. INVARIANŢA LA ROTAŢII A POLINOMULUI C_{21}

Efectuând în (1) transformarea de rotaţie

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi, Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \quad (3)$$

obţinem sistemul diferenţial

$$\{\dot{X} = Y + AX^2 + CXY + FY^2 + KX^3 + MX^2Y + PXY^2 + RY^3, \dot{Y} = -\big(X + GX^2 + DXY + BY^2 + SX^3 + QX^2Y + NXY^2 + LY^3\big), \quad (4)$$

unde

$$A = a\cos^3\varphi + (c-g)\cos^2\varphi\sin\varphi - (d-f)\cos\varphi\sin^2\varphi - b\sin^3\varphi, C = c\cos^3\varphi - (2a+d-2f)\cos^2\varphi\sin\varphi$$
$$F = f\cos^3\varphi - (b+c)\cos^2\varphi\sin\varphi + (a+d)\cos\varphi\sin^2\varphi - g\sin^3\varphi,$$
$$K = k\cos^4\varphi + (m-s)\cos^3\varphi\sin\varphi + (p-q)\cos^2\varphi\sin^2\varphi - (n-r)\cos\varphi\sin^3\varphi - l\sin^4\varphi, M = m\cos^4\varphi - (3k-2p+q \quad (5)$$

Remarca 1. *Expresiile pentru coeficienţii* B, D, G, L, N, Q, S *ai sistemului (4) se obţin respectiv din expresiile de mai sus ale lui* A, C, F, K, M, P, R *dacă în ultimele se efectuează substituţiile*

$$a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d, f \leftrightarrow g, k \leftrightarrow l, m \leftrightarrow n, p \leftrightarrow q, r \leftrightarrow s, \varphi \to -\varphi.$$

Considerăm polinomul în X şi Y:

$$\tilde{C}_{21}(X,Y) = (KQ - MS)X^4 + 2(KN - PS)X^3Y + (3KL + MN - PQ - 3RS)X^2Y^2 +$$
$$+2(LM - QR)XY^3 + (LP - NR)Y^4.$$

Înlocuind în $\tilde{C}_{21}(X,Y)$ expresiile lui $K, L, M, N, P, Q, R, S, X$ şi YY (vezi (5), Remarca 1 şi (3)), obţinem în variabilele x, y şi coeficienţii k, l, m, n, p, q, r, s ai sistemului iniţial (1) polinomul $C_{21}(x,y)$. Aceasta şi înseamnă că în virtutea sistemului (1) polinomul $C_{21}(x,y)$ este invariant la transformările de rotaţie a planului fazic.

III. CONDIȚIILE DE EXISTENȚĂ CONCOMITENTĂ A FASCICULULUI DE DREPTE INVARIANTE AFINE ȘI A LINIEI DE LA INFINIT DE MULTIPLICITATEA DOI

Ținând cont că $C_2(x,y) = k(x,y) \cdot C_{21}(x,y)$ și de presupunerea că $k(x,y) \not\equiv 0$, linia de la infinit va avea pentru sistemul (1) multiplicitatea doi, dacă se verifică în x și y identitatea

$$C_{21}(x,y) \equiv 0.$$

Fie $M_0(x_0, y_0)$ punctul de intersecție al unui fascicul de drepte afine L_j. Indiferent dacă dreptele L_j sunt toate reale sau printre ele sunt și efectiv complexe, punctul M_0 are coordonatele reale. Printr-o rotație a planului de faze putem face ca M_0 să coincidă cu punctul $(0,1)$ de pe axa ordonatelor. Având în vedere că această axă nu este pentru sistemul diferențial (1) invariantă și de perspectiva că dreptele fasciculului sunt invariante, devine clar că se cere ca oricare dreaptă a fasciculului să fie descrisă de ecuația $L \equiv y - Sx - 1 = 0.$

În [1, p. 48] se aduce următorul set de condiții

$$a = 1, f = -2, k = g, n = -d - 1, l = -b, p = b - c, r = 1, s = 0 \quad (6)$$

pentru ca sistemul (1) să aibă un fascicul din trei drepte invariante de forma $L = y - Sx - 1$, unde S verifică ecuația

$$S^3 - cS^2 + (m - d - 1)S + g + q = 0. \quad (7)$$

Discriminantul ecuației (7) este

$$\Delta = c^2(m-d-1)^2 - 4(m-d-1)^3 + 4c^3(g+q) - 18c(m-d-1)(g+q) - 27(g+q)^2.$$

Dacă $\Delta \neq 0$, atunci ecuația (7) are trei rădăcini distincte S_1, S_2, S_3 și, prin urmare, sistemul (1) are un fascicul din trei drepte distincte $L_j = y - S_j x - 1, j = 1,2,3.$

Ținând cont de invarianța identității $C_{21}(x,y) \equiv 0$ la rotații și la omotetii, pentru a obține cele dorite este de-ajuns ca să rezolvăm identitatea dată în condițiile (6), adică

$$gqx^4 - 2(d+1)gx^3y - (3bg + (d+1)m + (b-c)q)x^2y^2 - 2(bm+q)xy^3 -$$
$$-(b(b-c) - d - 1)y^4 \equiv 0$$

sau

$$gq = 0, g(d+1) = 0, 3bg + (d+1)m + (b-c)q = 0, bm + q = 0,$$
$$b(b-c) - d - 1 = 0.$$

Soluțiile acestui sistem de egalități, împreună cu (6), ne conduc la următoarele două serii de condiții

$$a = 1, b = 0, d = -1, f = -2, k = g, l = 0, n = 0, p = -c, q = 0, r = 1, s = 0; \quad (8)$$

$$a = 1, d = b^2 - bc - 1, f = -2, g = 0, k = 0, l = -b, n = b(c - b), p = b - c,$$

$$q = -bm, r = 1, s = 0, b \neq 0. \quad (9)$$

Așa dar, pentru ca sistemul (1) să aibă linia de la infinit de multiplicitatea doi și un fascicul din trei drepte invariante afine ($\Delta \neq 0$) este necesar și suficient ca să se verifice una din condițiile (8), (9).

IV. PROBLEMA CENTRULUI

Teoremă. *Orice sistem diferențial cubic de forma (1) ce are un fascicul de trei drepte afine invariante și pentru care linia de la infinit e de multiplicitatea nu mai mică ca doi are în originea de coordonate* $(0,0)$ *punct critic de tip centru dacă și numai dacă, se anulează prima mărime Liapunov. În toate cazurile de centru sistemul este Darboux integrabil.*

Demonstrație. În condițiile (8) ecuația (7) arată astfel

$$S^3 - cS^2 + mS + g = 0, \quad (10)$$

iar în condițiile (9) ea capătă forma

$$(S - b)(S^2 + (b - c)S + m) = 0. \quad (11)$$

Presupunând în (10) că $\Delta \neq 0$ și că S_1, S_2, S_3 sunt rădăcinile distincte ale lui (10), atunci produsul dreptelor invariante $L_j = y - S_j x - 1, j = 1,2,3,$ ne duce la expresia

$$\phi(x, y) = -1 - cx + 3y - mx^2 + 2cxy - 3y^2 + gx^3 + mx^2y - cxy^2 + y^3.$$

Ușor se verifică că în condițiile (8) funcția $\mu(x, y) = \frac{1}{\phi(x,y)}$ este factor integrant de tip Darboux analitic în $(0,0)$ și, prin urmare, punctul critic e de tip centru.

Examinăm acum condițiile (9). În ele prima mărime Liapunov arată astfel $L_1 = b(-1 + b^2 - bc + m)$. Ținând cont că $b \neq 0$, egalitatea $L_1 = 0$ ne dă $m = bc - b\hat{}2 + 1$. Atunci, sistemul (1) are dreptele invariante $L_1 = y - bx - 1, L_j = y - S_j x - 1, j = 2,3,$ unde S_j verifică ecuația $S^2 + (b - c)S + bc - b^2 + 1 = 0,$ conica $\Psi(x, y) = 1 + (b^2 - bc - 2)y + (b^2 - bc - 1)(bx - y)y$ și factorul exponențial $f_e = e^{(y-bx)}$. Acum se poate construi un factor integrant pentru sistemul (1) și, anume, $\mu(x, y) = \frac{L_1}{L_{23}\Psi}$, unde $L_{23} = L_1 \cdot L_2 = 1 + (c - b)x - 2y + (1 - b^2 + bc)x^2 + (b - c)xy + y^2.$
Menționăm, că în expresia lui $\mu(x, y)$ nu figurează factorul exponențial f_e.

Deoarece în spațiul coeficienților sistemului (1) mulțimea coeficienților sistemelor cu centru în $(0,0)$ este închisă urmează că $(0,0)$ va fi centru și atunci când discriminantul Δ se anulează.

Teorema este demonstrată.

REFERINȚE:

1. COZMA, D. *Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics*. Știința, Chișinău, 2013. 240 p. ISBN 978-9975-67-906-0.
2. LYAPUNOV, A.M. *The general problem of the stability of motion*. Gostekhizdat, Moscow, 1950 (în rusă).
3. ROMANOVSKI, V.G., SHAFER, D.S. *The center and cyclicity problems: a computational algebra approach.* Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009. 330 p. ISBN 978-0-8176-4726-1.
4. SIBIRSKY, C.S. *Algebraical invariants of differential equations and matrices.* Kishinev: Shtintsa, 1976. 268 p.
5. ȘUBĂ, A. On the Lyapunov quantities of two-dimensional autonomous system of differential equations with a critical point of center or focus type. In: *Bulletin of Baia Mare University (România). Mathematics and Informatics.*1998, vol. 13, no. 1-2, p.153-170.
6. LLIBRE, J., VULPE, N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines. In: *Rocky Mountain J. Math*. 2006, vol. 36, no. 4, p. 1301-1373.
7. ȘUBĂ, A. Center problem for cubic differential systems with the line at infinity of multiplicity four. *Carpathian J. Math*.. 2022, vol. 1, p. 217-222.
8. ȘUBĂ, A. Centers of cubic differential systems with the line at infinity of maximal multiplicity. *Acta et Commentationes*. *Exact and Natural Sciences*. 2022, no. 2(14), p.38-46.
9. ȘUBĂ, A., TURUTA, S. Solution of the problem of the center for cubic differential systems with the line at infinity and an affine real invariant straight line of total algebraic multiplicity five. *Bulletin of ASM. Mathematics*. 2019, vol. 90, nr. 2, p. 13-40.
10. ȘUBĂ, A. VACARAȘ, O. Cubic differential systems with an invariant straight line of maximal multiplicity. *Annals of the University of Craiova*, Mathematics and Computer Science Series. 2015, v. 42(2), p. 427--449.
11. ȘUBĂ, A., VACARAȘ, O. Center problem for cubic differential systems with the line at infinity and an affine real invariant straight line of total multiplicity four. *Bukovinian Math. Journal.* 2021, v. 9, no. 2, p. 1-17. ISSN: 2309-4001.

N.B. *Cercetările au fost parțial elaborate în cadrul subprogramelor USM: 011303 "SATGED" (primul autor) și 010603 „Metode Fizico-chimice de Cercetare și Analiză" (al doilea autor).*