OSCILATORUL ANARMONIC

ANHARMONIC OSCILLATOR

CZU: 535.14 **https://doi.org/10.59295/spd2024n.108**

Sergiu CÂRLIG,
ORCID: 0009-0005-4700-4839
e-mail: carligsergiu@gmail.com
Institutul de Fizică Aplicată, Universitatea de Stat din Moldova
Profirie BARDEȚCHI,
ORCID: 0009-0003-5569-7861
e-mail: profirie.bardetchi@yahoo.com
Institutul de Fizică Aplicată, Universitatea de Stat din Moldova
Viorel CIORNEA,
ORCID: 0009-0001-8624-6313
e-mail: viorel.ciornea@gmail.com
Institutul de Fizică Aplicată, Universitatea de Stat din Moldova
Mihai MACOVEI,
ORCID: 0000-0003-2679-3283
e-mail: mmakovei@yahoo.com
Institutul de Fizică Aplicată, Universitatea de Stat din Moldova

Summary. *The article analyzes the influence of the non-linear terms of the restoring force at large deviations from the equilibrium position of an oscillating body (non-linear oscillator). Particularly, it is demonstrated, in an accessible way,that the oscillations of the anharmonic oscillator drastically differ from thoseof a harmonic one. The main reason lies in the fact the oscillator frequency ofthe nonlinear oscillator, at large deviations, begins to depend on the amplitudeof the oscillations.*

Keywords: *elongation, amplitude, frequency, oscilate, disturbance, nonlinearity, amortization, bistability.*

INTRODUCERE

Oscilatorii sunt sisteme fundamentale în fizică, regăsindu-se într-o gamă largă de fenomene naturale și aplicații tehnologice. De la oscilațiile unui pendul simplu până la vibrațiile atomilor într-un cristal, înțelegerea comportamentului oscilatorilor este esențială pentru a descifra legile universului. Printre acești oscilatori, se disting două categorii principale: oscilatorii armonici și oscilatorii anarmonici.

Majoritatea fenomenelor și proceselor în natură se repetă. Dacă repetarea are loc peste un timp neschimbat, numit perioadă, atunci mărimile fizice ce caracterizează această repetare efectuează oscilații periodice.

Oscilatorul armonic este cel mai simplu tip de oscilator, caracterizat printr-o mișcare periodică , când forța de revenire respectă legea lui Hooke. Conform acesteia forța exercitată de un resort elastic este proporțională cu deplasarea acestuia față de poziția de echilibru și este orientată în sens opus deplasării. Matematic, această relație este exprimată prin formula $F_x = -kx$, unde $k$este constanta elastică a resortului, iar x este abaterea față de echilibru.

Soluția ecuației de mișcare pentru un oscilator armonic simplu este o funcție sinusoidală, descrisă prin $x = A\cos(\omega t + \phi)$, unde AA este amplitudinea, $\omega\omega$ este frecvența unghiulară și $\phi\phi$ este faza inițială. Oscilatorul armonic are proprietatea remarcabilă că perioada și frecvența oscilațiilor sunt independente de amplitudine, ceea ce înseamnă că oscilațiile rămân regulate și predictibile, indiferent de cât de mare este amplitudinea mișcării.

În contrast, oscilatorul anarmonic se abate de la comportamentul simplu al oscilatorului armonic. În practică, majoritatea sistemelor fizice prezintă anarmonism, adică forțele care acționează asupra lor nu sunt perfect liniare în raport cu deplasarea. Astfel, ecuațiile de mișcare devin mai complexe și nu mai pot fi soluționate simplu prin funcții sinusoidale.

Oscilatorii anarmonici sunt descriși de ecuații de mișcare de forma $F_x = -kx + f(x(t))$ unde termenul $f(x(t))$ introduce nelinearitatea sistemului. Această nelinearitate poate duce la o dependență a frecvenței de amplitudine, ceea ce înseamnă că oscilațiile devin mai complexe și pot include fenomene precum bifurcațiile și comportamentul haotic la amplitudini mari.

În lumea reală, oscilațiile armonice și anarmonice au aplicații variate și cruciale. De exemplu, în inginerie, oscilatorii armonici sunt utilizați pentru a modela comportamentul sistemelor mecanice și electrice, de la amortizoarele de șocuri ale mașinilor până la circuitele oscilatoare din dispozitivele electronice. Pe de altă parte, oscilatorii anarmonici sunt esențiali pentru înțelegerea comportamentului moleculelor în chimia cuantică și pentru studiul sistemelor dinamice complexe, cum ar fi clima și ecologia.

Pentru a suplini pierderile de energie din mișcările oscilatorii amortizate se acționează din exterior. Dacă această acțiune este puternică apar oscilații anarmonice ce descriu efecte nelineare. Se va arăta că mișcarea periodică anarmonică poate fi prezentată ca o sumă de oscilații armonice cu diverse frecvențe.

Sub acțiunea exterioară devierile de la poziția de echilibru devin mari și în expresia forței de restabilire trebuie luați în considerare următorii termeni din dependența ei ca funcție de abaterea lui de la poziția de echilibru. Ne vom limita aici numai la un singur termen și atunci forța de restabilire va deveni $F_x = -kx - max^2$. Aici m este masa oscilatorului. Ultimul termen reprezintă o perturbație a oscilatorului armonic iar constanta pozitivă a caracterizează influența nelinearității. Vom utiliza de relația

între forța și energia potențială U a sistemului $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ și după integrare avem $U(x) = -\int F_x dx = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}max^3$. Din expresia acestei energii potențiale se vede că particula de masa m nu se mai află în groapa potențială parabolică ci într-o groapă ce deviază tot mai mult de la cea parabolică pe măsura devierii forței de la cea elastică. Sub acțiunea acestei forțe corpul oscilant numai poate efectua oscilații armonice, deci oscilatorul devine anarmonic.

MATERIALE ȘI METODE

Vom analiza ecuația diferențială care descrie mișcarea electronului într-un mediu dielectric sub acțiunea câmpului electric de-a lungul axei *x:*

$$E_x(t) = E_1 \exp(-i\omega_1 t) + c.c \equiv E(t) \tag{4},$$

care va lua forma

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + ax^2 = -\frac{e}{m}\varepsilon E(t), \tag{5}$$

unde e și m sunt sarcina și masa electronului C.C. însemnă complex conjugata primii părți. Soluția analitică acestei ecuații până în prezent nu se cunoaște. Vom presupune că amplitudinea câmpului electric E și constanta a iau valori mici proporționale cu un parametru mic ε. După cum s-a constatat [1] această presupunere conduce la soluții aproximative mult mai apropiate de cele exacte. Orice soluție periodică cu perioada minimă 2π a ecuației (5) poate fi dezvoltată după puterile parametrului mic ε într-o serie de forma

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + \ldots, \tag{6}$$

ai cărei coeficienți $x_i(t)$ sunt funcții periodice cu perioada 2π și care este convergentă pentru ε suficient de mic. Înlocuind expresia (6) în ecuația (5) și egalând coeficienții pe lângă aceleași puteri ale lui ε obținem ecuațiile

$$\ddot{x}_1(t) + 2\gamma\dot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = -\frac{e}{m}E(t) \tag{7.1}$$

$$\ddot{x}_2(t) + 2\gamma\dot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t) + a[x_1(t)]^2 = 0 \tag{7.2}$$

$$\ddot{x}_3(t) + 2\gamma\dot{x}_3(t) + \omega_0^2 x_3(t) + 2ax_1(t)x_2(t) = 0 \tag{7.3}$$

Rezolvăm doar ecuația (7.1) iar posibilele soluții a ecuațiilor (7.2) și (7.3) le vom analiza calitativ studiind reacția dielectricului la acțiunea câmpului $E(t) = E_1 \exp(-i\omega_1 t)$. În partea dreaptă a ecuația (7.1) va figura factorul $\exp(-i\omega_1 t)$ pentru a îl exclude reprezentăm soluția sub forma

$$x_1(t) = U_1(t)\exp(-i\omega_1 t). \tag{8}$$

Înlocuind această substituție în ecuația (7.1) obținem că prima derivată $\dot{U}_1(t)$ intră cu coeficientul $+2(\gamma - i\omega_1 t)$ și pentru a reduce acest termen din noua ecuație folosim substituția

$$U_1(t) = U(t)\exp[-(\gamma - i\omega_1 t)] \tag{9}$$

și atunci obținem următoarea ecuație diferențială pentru *U(t)*

$$\ddot{U} + \omega_a^2 U = -\frac{e}{m} E_1 \exp[(\gamma - i\omega_1)t] \tag{10}.$$

Pentru a rezolva această ecuație utilizăm metodele variației constantelor și Lagrange, anume, rezolvăm ecuația (10) fără partea dreaptă, considerând constantele dependente de timp $U(t) = C_1(t)\mathrm{X}_1(t) + C_2(t)\mathrm{X}_2(t) \equiv C_1 \exp(-i\omega_a t) + C_2 \exp(+i\omega_a t)$ și atunci conform teoriei Lagrange

$$\dot{C}_1\mathrm{X}_1 + \dot{C}_2\mathrm{X}_2 = 0$$

$$\dot{C}_1\dot{\mathrm{X}}_1 + \dot{C}_2\dot{\mathrm{X}}_2 = -\frac{e}{m} E_1 \exp[(\gamma - i\omega_1)t] \quad \text{ori}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{C}_1 e^{-i\omega_a t} + \dot{C}_2 e^{+i\omega_a t} = 0 \\ \dot{C}_1 e^{-i\omega_a t} - \dot{C}_2 e^{+i\omega_a t} = \dfrac{e}{i\omega_a m} E_1 e^{(\gamma - i\omega_1)t} \end{array}\right\}$$

rezolvând acest sistem de ecuații obținem

$$C_1(t) = -\frac{ieE_1}{2m\omega_a} \frac{\exp[(\gamma - i\omega_1 + i\omega_a)t]}{\gamma - i(\omega_1 - \omega_a)}, \text{ și}$$

$$C_2(t) = \frac{ieE_1}{2m\omega_a} \frac{\exp[(\gamma - i\omega_1 - i\omega_a)t]}{\gamma - i(\omega_1 + \omega_a)}, \tag{11}$$

Având acești coeficienți putem scrie soluția ecuației neomogene (10) ca suma soluțiilor ecuației omogene($E_1 = 0$) și celei particulare a ecuației neomogene($E_1 \neq 0$)

$$U(t) = A\exp(-i\omega_a t) + B\exp(i\omega_a t) + C_1(t)\exp(-i\omega_a t) + C_2(t)\exp(i\omega_a t).$$

Luând în considerare expresiile (8), (9) și (11) obținem soluția ecuației (7.1)

$$x_1(t) = A\exp[-(\gamma + i\omega_a)t] + B\exp[-(\gamma - i\omega_a)t] - \frac{e}{m} E^{\bullet}{}_1 \exp(-i\omega_1 t) \tag{12}$$

cu $E^{\bullet}{}_1 = E_1 / (\omega_0^2 - \omega_1^2 - 2i\gamma\omega_1)$, unde primii doi termeni reprezintă soluția ecuației omogene (cu $E_1 = 0$) și ultimul cea particulară.

Din expresia (12) reiese că din faptul periodicității forței perturbătoare $F_{pr} = -eE_1 \exp(-i\omega_1 t)$ oscilatorul participă concomitent la două oscilații. Primii doi termeni descriu oscilațiile libere amortizate care în timp de câteva perioade dispar (tin-

zând la zero exponențial), descriind un proces tranzitoriu la oscilațiile neamortizate permanente cu frecvența egală cu cea a forței perturbătoare. Acest fapt constitue un caz particular al teoremei fizicii clasice(nu și celei cuantice), că oscilațiile forțate au frecvența forței perturbătoare.

REZULTATE ȘI DISCUȚII

Vom folosi de rezultatul obținut și vom analiza reacția dielectricului la acțiunea câmpului electric $E(t) = E_1 \exp(-i\omega_1 t)$. Dielectricul fiind electric neutru totuși posedă proprietăți electrice. În prima aproximație molecula dielectricului poate fi considerată dipol electric. Sub acțiunea forței perturbătoare F_{pr} sarcinile dipolului(în special electronii de valență) vor efectua oscilații, mișcându-se cu accelerația $a = F_{pr} / m = \ddot{x}_1(t)$, radiind câmp electromagnetic de aceeași frecvență ω_1. Prin urmare, în dielectric în afară de câmpul exterior ce îl polarizează mai apare un câmp, radiat de dipoli. Ultimul câmp este orientat preponderent în sens opus celui exterior, conform legii conservării energiei.

Dacă rezolvam ecuația (5) în următoarea aproximație, ce corespunde ecuației (7.2), în care figurează termenul $[x_{1(t)}]^2$ am fi obținut că în acest dielectric ar mai fi apărut, alături de câmpul electromagnetic de frecvența ω_1 și un câmp cu frecvența $2\omega_1$ cu amplitudinea proporțională lui $a(\frac{e}{m}E_1)^2$, unde a este coeficientul anarmonicității. Propagarea acestei oscilații ar fi dat naștere unei unde de frecvență dublă care este numită armonica a doua, fiind o manifestare a efectului nelinear, care este rezultatul dependenței frecvenței de amplitudinea(de valoarea elongației) oscilației $\omega^2(x) = \omega_0^2 + \alpha x + \beta x^2 + ...$ În lipsa neliniarităților($\alpha, \beta, ... = 0$) oscilatorul este numit linear. În cazul unui așa oscilator fenomenul rezonanței poate avea loc la o frecvență aproape de cea proprie (ω_0), pe când în cazul celui nelinear rezonanța poate avea loc și la frecvențe apropiate de cele a armonicilor. În ambele cazuri sistemul oscilant absoarbe energie de la sursa exterioară în momentele coincidenței fazei sale cu cea a forței exterioare, mărindu-și amplitudinea deci și energia proprie. Oscilațiilor cu amplitudini mari le corespunde alte frecvențe în virtutea dependenței nelineare $\omega(A) \equiv \omega(x)$. Oscilatorul devine ne izocron, la diverse valori a amplitudinilor el va oscila cu diferite frecvențe. Ca rezultat, sistemul iese din rezonanță și începând de la o oarecare valoare a amplitudinii nu mai simte acțiunea forței exterioare.

La amplitudini mici curbele de rezonanță $A(\omega)$ a oscilatorului linear(a=0) reprezintă dependențe univoce și sunt cu atât mai înalte și înguste cu cât coeficientul amortizării γ este mai mic. Pe măsura creșterii amplitudinii crește frecvența proprie. La amplitudini mari, curbele de rezonanță devin funcții neunivoce și începând cu o anumită amplitudine a forței exterioare mare sistemul poate oscila stabil cu două ori mai multe amplitudini diferite, manifestând efectul de bistabilitate ori multistabilitate. Curba $A(\omega)$ are o comportare asemenea buclei de histerezis a feromagnetului [2]. O astfel de comportare bistabilă poate fi folosită în circuitele logice cu două stări staționare stabile de lucru, care pot fi considerate zero și unu.

Analizând soluțiile ecuațiilor (7.1) și (7.2) observăm că mișcarea periodică anarmonică poate fi prezentată ca o sumă de oscilații armonice cu diverse frecvențe. Într-adevăr, în ecuația (7.3) figurează terminul nelinear $2ax_1(t)x_2(t)$ [3], care in soluție vor da naștere la oscilații cu frecvențele $\omega_1 \pm \omega_2$, propagarea cărora vor provoca apariția undelor cu astfel de frecvențe alături de undele cu frecvențele ω_1 și $2\omega_1$

CONCLUZII

Studiul oscilatorilor anarmonici prezintă provocări semnificative datorită nelinearităților implicate. Totuși, progresele recente în calculul numeric și în metodele analitice au permis cercetătorilor să obțină rezultate remarcabile în înțelegerea și controlul acestor sisteme. Simulările pe calculator și experimentele de laborator oferă perspective noi asupra modului în care nelinearitățile influențează dinamica sistemelor și deschid calea pentru inovații tehnologice în diverse domenii, de la materiale avansate la tehnologiile de telecomunicații. Totodată, pentru identificarea efectului fizic al termenului nelinear este necesar să se dezvolte o metodă analitică aproximativă. În lucrare a fost analizată mișcarea electronului într-un mediu dielectric, considerând termenul nelinear mic și au fost obținute soluțiile ecuației de mișcare.

REFERINȚE

1. E.Rogai. Exerciții și probleme de ecuații diferențiale și integrale. Editura tehnică, București 1965.
2. М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. Издательство ГосУНЦ „Колледж”, 1999.
3. Robert W. Boyd. Nonlinear Optics. Third edition Rochester, New York, October, 2007.