PROBLEME SINGULAR PERTURBATE PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA

Ecaterina LUNGU,
Facultatea Matematica și Informatica

CZU: 517.956 *katyalungu@gmail.com*

În lucrarea de față este studiată comportarea sistemului guvernat de problema Cauchy

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t;\varepsilon,\delta,\gamma) + \delta u'(t;\varepsilon,\delta,\gamma) + \gamma u(t;\varepsilon,\delta,\gamma) = f(t), \ t > 0, \\ u(0;\varepsilon,\delta,\gamma) = u_0, \ u'(0;\varepsilon,\delta,\gamma) = u_1, \end{cases} \#\#\#\#(1)$$

în raport cu sistemul guvernat de problema Cauchy „redusă”

$$\begin{cases} \delta v'(t;\delta,\gamma) + \gamma v(t;\delta,\gamma) = f(t), \ t > 0, \\ v(0;\delta,\gamma) = u_0, \end{cases} \#\#\#(2)$$

în cazul când $\varepsilon \to 0$ și $\delta \geq \delta_0 > 0$; și comportarea sistemului (1) în raport cu sistemul

$$\gamma w(t;\gamma) = f(t), \ t > 0, \ \#\#\#(3)$$

în cazul când $\varepsilon \to 0$ și $\delta \to 0$. Studiul nostru se va referi la cazul când $\Delta = \delta^2 - 4\varepsilon\gamma \geq 0$.

Acest studiul teoretic este invocat de multiple necesități practice. Astfel, multiple procese din fizică, chimie, biologie și din alte domenii, care au evoluții neuniforme în raport cu anumiți parametri, sunt guvernate de ecuații diferențiale cu parametri mici sau mari. Dacă parametrul mic este prezent în partea subordonată a ecuației, atunci, de regulă, avem o problemă regulat perturbată. Una dintre caracteristicile frecvente ale unei probleme singular perturbate este prezența parametrului mic în partea dominantă a ecuației diferențiale.

În cazul problemei singular perturbate, de regulă, există un subdomeniu al domeniului de definiție a soluției, numit *strat limită*, în care soluția are o comportare singulară atunci când parametrii mici tind la zero. Aceste – comportări singulare sunt definite de anumite funcții, numite *funcții de strat limită.*

Vom ilustra cercetarea problemei enunțate urmând următorii pași: Rezolvabilitatea problemelor (1), (2) și (3); Evaluarea diferențelor soluțiilor problemelor perturbate și a celor neperturbate; Comportarea

sistemului perturbat atunci când $\varepsilon \to 0$ și $\delta \to 0$. În cadrul cercetării au -fost utilizate metodele cunoscute din Ecuații Diferențiale [1], [2] și Analiza Matematică [3].

Rezolvabilitatea problemelor (1), (2) și (3).

Propoziția 1. Dacă $\Delta = \delta^2 - 4\varepsilon\gamma > 0$ atunci $\lambda_1 = \frac{-\delta+\sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}$, $\lambda_2 = \frac{-\delta-\sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}$ și

$$u(t;\varepsilon,\delta,\gamma) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}\right)u_0 + \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)u_1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \left(e^{\lambda_1 (t-\tau)} - e^{\lambda_2 (t-\tau)}\right) f(\tau)\,d\tau\right], \#(4)$$

Dacă $\Delta = 0 \Delta = 0$ atunci

$$u(t;\varepsilon,\delta,\gamma) = e^{\frac{-\delta t}{2\varepsilon}}\left[\left(1 + \frac{\delta t}{2\varepsilon}\right)u_0 + t u_1\right] + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{-\delta(t-\tau)}{2\varepsilon}}(t-\tau) f(\tau)\,d\tau.$$

Soluția problemei (2) este dată de formula $v(t;\delta,\gamma) = u_0 e^{\frac{-\gamma t}{\delta}} + \frac{1}{\delta}\int_0^t e^{\frac{-\gamma(t-\tau)}{\delta}} f(\tau) d\tau$, iar soluția ecuației (3) de formula $w(t;\gamma) = \gamma^{-1} f(t)$.

Evaluarea diferenței dintre soluțiile sistemelor perturbate și celor neperturbate.

Propoziția 2. Dacă $\Delta = \delta^2 - 4\varepsilon\gamma > 0$ și $f \in C([0,T])$, atunci

$$u(t;\varepsilon,\delta,\gamma) - v(t;\delta,\gamma) = a(t;\varepsilon,\delta,\gamma)u_0 + b(t;\varepsilon,\delta,\gamma)u_1 + \int_0^t k(t-\tau;\varepsilon,\delta,\gamma) f(\tau) d\tau'$$

unde $|a(t;\varepsilon,\delta,\gamma)| \le \frac{2\gamma\varepsilon}{\Delta}$, $|b(t;\varepsilon,\delta,\gamma)| \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta}}$, $t \in [0,T]$,

$$\left|\int_0^t k(t-\tau;\varepsilon,\delta,\gamma) f(\tau) d\tau\right| \le \frac{C(\gamma)\varepsilon}{\Delta} \max_{t\in[0,T]} |f(t)|$$

Propoziția 3. Dacă $f' \in C^1([0,T])$ și $\Delta = 0$, atunci

$$u(t;\gamma,\delta) - w(t;\gamma) = h(t;\gamma,\delta)[\gamma u_0 - f(0)] + b(t;\gamma,\delta)u_1 - \int_0^t h(t-\tau;\delta,\gamma) f'(\tau) d\tau \#,$$

unde

$$h(t;\gamma,\delta) = \frac{1}{\gamma} e^{-2\gamma t/\delta}\left(1 + \frac{2\gamma t}{\delta}\right), \quad |b(t;\delta,\gamma)| \le C(\gamma)\delta, \quad t \in [0,T].$$

Comportarea sistemului perturbat cu $\varepsilon \to 0$ și $\delta \to 0$.

În continuare, băzându-ne pe evaluările obținute, vom analiza comportările sistemelor (1) și (2) în dependență de relațiile dintre parametrii mici ε și δ.

Lema 1. Presupunem că $f \in C([0,T])$ și $\delta \ge \delta_0 > 0$. Atunci

$$\max_{t\in[0,T]} |u(t;\varepsilon,\delta,\gamma) - v(t;\delta,\gamma)| \le C(\gamma,\delta_0)\,\varepsilon\left[|u_0| + |u_1| + \|f\|_{C([0,T])}\right], \# \#(5)$$

adică sistemul (2) este singular perturbat de sistemul (1). Aceasta înseamnă că sistemul (2) este stabil la perturbările generate de sistemul (1).

Lema 2. Dacă $\delta^2 = 4\gamma\varepsilon$ și $f' \in C^1([0,T])$, atunci

$$|u(t;\gamma,\delta) - w(t;\gamma)| \# \\ \leq |h(t;\gamma,\delta)||\gamma u_0 - f(0)| \\ + C(\gamma)\delta\left[|u_1| + \|f\|_{C^1([0,T])}\right], \qquad t \in [0,T],$$

adică sistemul (3) este singular perturbat de sistemele (1) și (2) în $C([0,T])$, deoarece funcția $h(t;\gamma,\delta)$ are o comportare singulară în vecinătatea punctului $t = 0$. Această vecinătate este *strat limită* pentru sistemul (1), iar *funcția de strat limită* este definită de $h(t;\gamma,\delta)$.

Corolarul 1. Dacă în condițiile **Lemei 2** se îndeplinește condiția de concordanță $f(0) = \gamma u_0$, atunci $u(t;\delta,\gamma) \to w(t;\gamma)$, în $C([0,T])$, atunci când $\delta \to 0$.

Corolarul 2. În condițiile **Lemei 2** pentru orice $t_0 > 0$ are loc $u(t;\delta,\gamma) \to w(t;\gamma)$ în $C([t_0,T])$ atunci când $\delta \to 0$.

Referințe:

1. COSTAȘ A., RUSU G. Calcul diferențial și integral, CEP USM, 2018.
2. БИБИКОВ Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений, Москва, Высшая школа, 1991.
3. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1-3, Москва, Наука, 1970.

Recomandat
Andrei PERJAN, dr. hab., prof. univ.