CZU: 517.97:502.3:532.6:628.5 **https://doi.org/10.59295/tehfizuvs25.16**

MODELAREA SUPRAFEȚEI DE ROTAȚIE CU ARIE MINIMĂ CU APLICAȚIE ÎN SISTEME DE MEDIU

MODELING THE MINIMAL SURFACE OF REVOLUTION WITH APPLICATION IN ENVIRONMENTAL SYSTEMS

Adrian PALADI[1] e-mail: adrian.paladi@usm.md
Alexandr A. BARSUK[2] e-mail: a.a.barsuk@mail.ru ORCID ID: 0000-0003-0601-545X
Florentin PALADI[3] e-mail: fpaladi@usm.md ORCID ID: 0000-0001-8099-9413

[1,2,3]Moldova State University

Abstract. *An analysis is presented for the classical variational problem of determining the shape of a surface of revolution with minimal area. The optimized functional attains a local minimum for all solutions obtained by solving the corresponding Euler equation. The properties and mathematical models of catenoids are relevant in various areas of environmental research, particularly those involving fluid interfaces, surface tension, and porous media. Their properties can therefore be applied to specialized problems related to surface tension, fluid interfaces, nanostructured pollutants, and porous media research. Additionally, catenoids serve as idealized models in computational simulations involving minimal energy configurations in environmental systems.*
Keywords*: Environmental applications, calculus of variations, minimal surface of revolution modeling.*

INTRODUCERE

În contextul analizei soluțiilor problemei variaționale clasice privind determinarea formei unei suprafețe de rotație cu arie minimă, au fost formulate condițiile de solvabilitate ale problemei variaționale, o caracteristică cheie fiind prezența unor constrângeri implicite de inegalitate de rând cu ecuația neliniară respectivă. Se demonstrează că aceste constrângeri de inegalitate modifică semnificativ condițiile de bifurcație ale soluțiilor în problema variațională examinată. Curbele generatoare ale suprafețelor minimale și ariile lor corespunzătoare sunt calculate pentru valorile parametrilor de bifurcație [1]. În acest context este necesar să fie cercetat și un exemplu de catenoid reprezentând o suprafață minimă de rotație pentru un set dat de parametri. În modelarea dinamicii fluidelor de mediu, de exemplu, suprafețele minimale ajută la modelarea interfețelor dintre diferite straturi de lichid, cum ar fi interfețele ulei-apă în studiile de poluare ale mediului ambiant. În cercetarea aerosolilor, geometria de tip catenoid poate apărea în simulări de agregare a particulelor, formare a picăturilor sau interacțiuni ale suprafețelor poluanților din aer. În contextul particulelor din atmosferă, catenoizii nu sunt studiați direct ca formă fizică a particulelor de poluanți în sine, dar geometria și proprietățile lor matematice pot fi relevante în modelarea anumitor fenomene, în special la nano- și microscară, unde tensiunea superficială, suprafețele minimale și comportamentele de interfață devin semnificative, cum ar fi formarea agregatelor sau clusterelor de particule observate prin microscopia de forță atomică și microscopia de fluorescență [2, 3].

METODA DE CALCUL

Pentru început vom analiza cazul unei suprafețe de rotație, care permite o examinare completă a formării agregatelor de particule în condiții de mediu ambiant. Este necesar de remarcat faptul că, chiar și în acest caz relativ simplu, determinarea suprafeței minimale prezintă caracteristici importante relevante pentru această clasă de probleme. În special, a fost identificată existența unor soluții multiple și a bifurcațiilor asociate acestora. Modelul matematic al problemei variaționale utilizat pentru a determina suprafața minimală a fost examinat prin aplicarea condițiilor necesare Legendre pentru minimul funcționalei optimizate. A fost efectuată analiza asimptotică, precum și analize de bifurcație clasice și non-clasice ale soluțiilor numerice, însoțite de reprezentările grafice corespunzătoare [1].

Vom considera o funcție nenegativă $y(x) \geq 0$ în intervalul $[0,l]$ pe axa x de rotație, unde $y(0) = R_1$ și $y(l) = R_2$ pentru valorile $x = 0$ și $x = l$, respectiv. În timpul rotației în jurul axei x, curba $y(x)$, adică generatoarea, formează o suprafață de rotație a cărei arie este calculată printr-o expresie de forma următoare [4]:

$$S[y(x)] = 2\pi \int_0^l y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx .$$

Este în continuare cercetată problema variațională a determinării funcției $y(x)$ din condiția pentru minimul funcționalei, prin urmare:

$$y(x):\ S[y(x)] = 2\pi \int_0^l y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx \to \min_{y(x)},\ y(0) = R_1,\ y(l) = R_2 . \qquad (1)$$

Se poate observa că implementarea fizică directă a soluțiilor acestei probleme variaționale se referă la calculul formei unei particule lichide formate între două inele concentrice paralele cu razele R_1 și R_2, care sunt amplasate perpendicular pe axa care trece prin centrele inelelor și situate la distanța l unul de celălalt. În cazul analizat, energia potențială V a peliculei exterioare este definită de formula $V = \sigma S$, unde σ este coeficientul de tensiune superficială și S este aria suprafeței [5], iar în condițiile de echilibru avem relația

$$V[S] \to \min_S , \qquad (2)$$

și pentru un coeficient constant de tensiune superficială, condiția (2) este formulată într-o formă echivalentă $S \to \min$, care coincide cu formula (1). Pentru o analiză mai detaliată a soluțiilor problemei variaționale, se va lua în considerare în continuare $R_1 \leq R_2$ și introducând în consecință notațiile $r = R_1$, $R = R_2$, și $\kappa = \dfrac{r}{R}$, se obține:

$$y(x) = R\kappa\left(\cosh(\beta x) - \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\beta\kappa}\right)^2}\sinh(\beta x)\right),\ 0 \leq x \leq 1, \qquad (3)$$

$$S[y] = \pi R^2\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2} + \kappa^2\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\beta\kappa}\right)^2} + \frac{\lambda^2}{\beta}\right). \qquad (4)$$

Parametrii λ, β, și κ satisfac condiția $\frac{\lambda}{\beta\kappa} \le 1$ ca urmare a cerinței de non-negativitate a expresiilor de sub semnul radical în ecuațiile (3) și (4).

Să prezentăm, de asemenea, soluția acestei probleme variaționale în cazul valorii parametrului $\kappa = 1$ ($R_1 = R_2 = R$), pentru care calculele sunt simplificate semnificativ, iar o analiză exhaustivă a problemei este posibilă. Expresia (4) pentru $\kappa = 1$ poate fi scrisă în următoarea formă:

$$S[y] = 2\pi R^2 \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^2} + \frac{\lambda^2}{2\beta} \right).$$

Au fost obținute graficele liniilor asimptotice $y = y(x)$ pentru suprafețele minime, împreună cu valorile de bifurcație calculate ale parametrilor problemei variaționale și valorile corespunzătoare ale suprafețelor [1]. Aceste calcule numerice se bazează pe ecuațiile prezentate mai sus.

REZULTATE ŞI DISCUŢII

În baza unei abordări variaționale, suprafețele Delaunay sunt caracterizate ca suprafețe de rotație care minimizează suprafața laterală pentru un anumit volum închis (a se vedea, de exemplu, [6]). Dintre acestea, catenoidele sunt clasificate ca suprafețe Delaunay de spața a doua și sunt singurele suprafețe minime de rotație. Catenoidul prezentat în Fig. 1 este generat prin rotirea curbei de profil în raport cu axa de simetrie pentru κ=1 și valorile maximale ale parametrilor λ_*=1.3255 și β_*=2.3995.

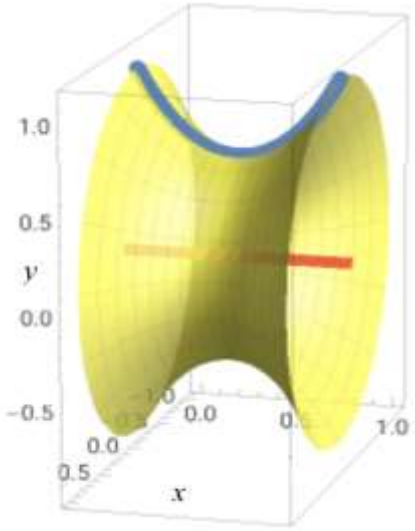


Fig. 1. Catenoid obținut prin rotirea curbei de profil (în albastru) în raport cu axa *x* (în roșu), unde $0 \le x \le 1$, $\kappa = 1$: $\lambda_* = 1.3255$, $\beta_* = 2.3995$, $S_* = 7.53783$.

În acest studiu sunt analizate soluțiile problemei clasice de calcul variațional privind determinarea formei unei suprafețe de rotație cu arie minimă. O caracteristică distinctivă a acestei probleme este faptul că relațiile care descriu condiția de formare a suprafeței includ atât constrângeri de egalitate, cât și de inegalitate în formă implicită, ceea ce complică semnificativ analiza soluției. Pe lângă oferirea unui suport teoretic nou și independent, precum și validarea rezultatelor deja publicate referitoare la

suprafețele minime de rotație în scopul promovării reproductibilității în știință, sunt identificate și valorile parametrilor pentru care există bifurcații ale soluțiilor problemei variaționale. Sunt discutate, de asemenea, particularitățile bifurcațiilor soluțiilor în sistemele caracterizate de relații ce conțin atât egalități, cât și inegalități. Reprezentările asimptotice ale soluțiilor sunt analizate în detaliu. Sunt prezentate rezultatele calculelor numerice și reprezentările grafice ale soluțiilor, împreună cu valorile corespunzătoare ale ariei minime a suprafeței. În special, catenoidele sunt obținute prin rotirea curbelor profil în jurul axei de simetrie.

CONCLUZII

Atât atunci când particulele aflate în suspensie în aer absorb umiditatea din atmosferă, cât și în urma unui proces de condensare, se pot forma punți lichide microscopice între particule sau între o particulă și o suprafață. Geometria acestor punți, în special în regiunile cu curbură mare, poate aproxima forme de suprafețe minime, cum ar fi catenoidele. Aceste forme influențează semnificativ dinamica procesului de agregare și stabilitatea clusterilor rezultați. Astfel de parametri sunt esențiali pentru modelarea proprietăților mecanice, a proceselor de depunere, a caracteristicilor optice și a riscurilor potențiale pentru sănătate cauzate de poluanții atmosferici. Prin urmare, studiile viitoare care combină date obținute prin microscopia de forță atomică și cea de fluorescență cu modele ce includ geometria punților capilare pot oferi o înțelegere mai profundă a dinamicii de agregare în clustere, în special în condiții de umiditate ridicată sau în sisteme complexe formate din particule eterogene. O altă problemă clasică din calculul variațional este problema aerodinamică a lui Newton, care constă în determinarea formei suprafeței unui corp de rotație ce minimizează rezistența la deplasarea printr-un mediu rarefiat. Au fost realizate calcule numerice ale funcționalului asociat pentru forme specifice, cum ar fi conul și emisfera. Rezultatele evidențiază un efect semnificativ de optimizare, demonstrat prin comparația dintre valorile funcționalului pentru aceste forme standard și cea corespunzătoare conturului optim [7].

REFERINȚE:

1. PALADI, A., BARSUK, A.A., PALADI, F. Finding the minimal surface of revolution: asymptotic representation, classical and non-classical bifurcation analyses of the variational problem solutions. În: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2025, in press.
2. SPRINCEAN, V., PALADI, A., ANDRUH, V., CHIRITA, A., PALADI, F. UAV-based monitoring and AFM analysis of airborne pollutants. În: *IEEE Xplore*. Proceedings of the IEEE 9th International Workshop on Metrology for Aerospace (MetroAeroSpace), 27-29 June 2022, Pisa, Italy: IEEE Digital Library, 2022, pp. 1-6. ISSN 2575-7490.
3. SPRINCEAN, V., CHIRITA, A., LEONTIE, L., ASTILEAN, S., FOCSAN, M., CRACIUN, A.M., PALADI, A., ANDRUH, V., PALADI, F. *Advanced physical technologies with the UVS application in environmental security. In: Monitoring and protection of critical infrastructure by unmanned systems* (coordonatori: Daponte P., Paladi F.; 238 p., vol. 63 of NATO Science for Peace and Security Series - D: Information and Communication Security). Amsterdam: IOS Press, 2023, pp. 101-113. ISBN 978-1-64368-376-8.
4. LANDAU, L.D., LIFSHITZ, E.M. *Fluid Mechanics*. Vol. 6 of the Course of Theoretical Physics, 2nd edn. Butterworth-Heinemann, 1987, 560 p. ISBN 978-0-75062-767-2.

5. GELFAND, I.M., FOMIN, S.V. *Calculus of Variations*. Dover Books on Mathematics edn., Dover Publications, 2000, 256 p. ISBN 978-0-48641-448-5.
6. MLADENOVA, C.D., MLADENOV, I.M. Parameterizations of Delaunay surfaces from scratch. În: *Mathematics*. 2024, vol. 12, no. 10, 1570, 16 p. ISSN 2227-7390.
7. BARSUK, A.A., PALADI, F. On parametric representation of the Newton's aerodynamic problem. În: *Heliyon*. 2023, vol. 9, no. 6, e16721, 8 p. ISSN 2405-8440.

Autorii menționează proiectul de cercetare PHYSTECH cu cifrul 011210 (subprogram) finanțat de către Ministerul Educației și Cercetării.