ASUPRA π-T-QUASIGRUPURILOR

Dina CEBAN

Mulțimea nevidă Q şi operația binară „$\cdot$”, definită pe Q, formează un quasigrup, dacă ecuațiile $a \cdot x = b$ şi $y \cdot a = b$ au soluție unică pentru $\forall\, a, b \in Q$ [1,3]. Un quasigrup $(Q, \cdot)$ se numeşte T quasigrup dacă există un grup abelian $(Q, +)$, două automorfisme φ, ψ ale lui şi un element $g \in Q$ astfel încât $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y) + g,\ \forall x, y \in Q$. În acest caz, upla $((Q, +), \varphi, \psi, g)$ se numeşte T-formă, iar grupul $(Q, +)$ se numeşte T-grup al T-quasigrupului $(Q, \cdot)$ [4-6]. Quasigrupurile care verifică identități minimale din clasificarea lui Belousov se numesc π-quasigrupuri [2]. Un quasigrup $(Q, \cdot)$ se numeşte π-quasigrup de tipul T_1, dacă, pentru $\forall x, y \in Q$, este adevărată egalitatea

$$x \cdot (x \cdot xy) = y. \qquad (1)$$

În lucrarea prezentă sunt descrise π-quasigrupurile de tipul T_1 care sunt şi T-quasigrupuri ($\pi - T -$ quasigrupurile). Fie $(Q, \cdot)$ un T-quasigrup cu T-forma $((Q, +), \varphi, \psi, g)$. Atunci, pentru $\forall x, y \in Q$, are loc egalitatea

$$x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y) + g. \qquad (2)$$

Propoziția 1. *Un T-quasigrup (Q,□) cu T-forma* $((Q, +), \varphi, \psi, g)$ *este un* $\pi - T -$ *quasigrup de tipul* T_1 *dacă şi numai dacă*

$$\psi^3 = \varepsilon \text{ şi } \psi^2 + \psi + \varepsilon = \omega, \qquad (3)$$

unde ω *este endomorfismul nul.*

Demonstrație. Fie $(Q, \cdot)$ un $\pi - T -$ quasigrup de tipul T_1. Prin urmare, „$\cdot$” verifică (1). Utilizând (2) în egalitatea (1), obținem: $\varphi(x) + \psi(\varphi(x) + \psi(\varphi(x) + \psi(y) + g) + g) + g = y$. Deoarece $\varphi, \psi \in Aut(Q, +)$, din ultima egalitate rezultă

$$\varphi(x) + \psi\varphi(x) + \psi^2\varphi(x) + \psi^3(y) + \psi^2(g) + \psi(g) + g = y. \qquad (4)$$

Luând $x = y = 0$ în (4), unde 0 este elementul neutru al grupului $(Q, +)$, obținem $\psi^2(g) + \psi(g) + g = 0$, deci (4) este echivalentă cu $\varphi(x) + \psi\varphi(x) + \psi^2\varphi(x) + \psi^3(y) = y$, de unde, luând pe rând $y = 0$, apoi

$x=0$, obținem egalitățile $\psi^3(y)=y, \forall y\in Q$ și, respectiv, $\varphi(x)+\psi\varphi(x)+\psi^2\varphi(x)=0$, $\forall x\in Q$, deci $\psi^3=\varepsilon$ și $\varepsilon+\psi+\psi^2=\omega$. Reciproc, fie $(Q,\cdot)$ un T-quasigrup cu T-forma $((Q,+),\varphi,\psi,g)$ și fie că $\psi^3=\varepsilon$, $\psi^2+\psi+\varepsilon=\omega$. Atunci avem:

$$x\cdot(x\cdot xy)=\varphi(x)+\psi(\varphi(x)+\psi(\varphi(x)+\psi(y)+g)+g)+g=$$
$$=\varphi(x)+\psi\varphi(x)+\psi^2\varphi(x)+\psi^3(y)+\psi^2(g)+\psi(g)+g=$$
$$(\varepsilon+\psi+\psi^2)(\varphi(x))+\psi^3(y)+\ (\varepsilon+\psi+\psi^2)(g)=y,$$

$\forall x,y\in Q$, deci, $(Q,\cdot)$ este un π-quasigrup de tipul T_1. Ω

Propoziția 2. *Un* $\pi-T-$*quasigrup* $(Q,\cdot)$ *de tipul* T_1, *cu* T*-forma* $((Q,+),\varphi,\psi,g)$ *este un* LIP*-quasigrup, dacă* $\psi=\varepsilon$, *iar* $\lambda(x)=-x-\varphi^{-1}(2g)$, *unde* $\lambda\in S_Q$ *și* $\lambda x\cdot xy=y$, $\forall x,y\in Q$.

Demonstrație. Dacă $(Q,\cdot)$ este un LIP-quasigrup, atunci există $\lambda: Q\to Q$, astfel încât $\lambda(x)\cdot xy=y$, $\forall x,y\in Q$. Utilizând (2) în ultima egalitate, avem: $\lambda(x)\cdot(\varphi(x)+\psi(y)+g)=y\Rightarrow$

$$\varphi\lambda(x)+\psi\varphi(x)+\psi^2(y)+\psi(g)+g=y. \qquad (5)$$

Luând $y=0$ în (5), obținem

$$\varphi\lambda(x)+\psi\varphi(x)+\psi(g)+g=0, \qquad (6)$$

$\forall x\in Q$, iar utilizând ultima egalitate în (5) avem: $\psi^2=\varepsilon$. Mai mult, din (6) rezultă $\lambda(x)=\varphi^{-1}(-\psi\varphi(x)-\psi(g)-g)$. Din (3) și $\psi^2=\varepsilon$ rezultă că $\psi=\varepsilon$, deci $\lambda(x)=-x-\varphi^{-1}(2g)$.

Corolar. *Orice* $LIP-\pi-T-$*quasigrup de tipul* T_1 *este medial.*

Demonstrație. Conform propoziției 2, în T-forma $LIP-\pi-T-$quasigrupului $(Q,\cdot)$ de tipul T_1, avem $\psi=\varepsilon$, ceea ce implică $\varphi\psi=\psi\varphi$, deci $(Q,\cdot)$ este medial. Ω

Notă. Are loc și afirmația corespunzătoare pentru RIP-quasigrupuri: un $\pi-T-$quasigrup de tipul T_1, cu T-forma $((Q,+),\varphi,\psi,g)$ este un RIP-quasigrup dacă $\varphi^2=\varepsilon$, iar $\rho(x)=\psi^{-1}(-\varphi\psi(x)-\varphi(g)-g)$, unde $\rho\in S_Q$ și $yx\cdot\rho x=y$, $\forall x,y\in Q$. Exemplele următoare arată că clasa $LIP-\pi-T-$ și $RIP-\pi-T-$quasigrupurilor nu sunt vide.

Exemplul 1. T-forma $((Z_{17},+),\varphi,\varepsilon,\overline{4})$, unde $\varphi(x)=\overline{3}x,\ \forall x\in Z_{17}$, defineşte un $LIP-\pi-T-$quasigrup de ordinul 17.

Exemplul 2. T-forma $((Z_7,+),\varphi,\varepsilon,\overline{3})$, unde $\varphi(x)=\overline{6}x,\ \psi(x)=\overline{2}x$, $\forall x\in Z_7$, defineşte un $RIP-\pi-T-$quasigrup de ordinul 7.

Propoziția 3. *Un grup abelian* $(Q,+)$ *este* T*-grupul unui* $LIP-\pi-T-$*quasigrup de tipul* T_1 *dacă şi numai dacă* $(Q,+)$ *verifică egalitatea* $3x=0,\ \forall x\in Q$.

Demonstrație. Fie $(Q,+)$ un T-grup al unui $LIP-\pi-T-$quasigrup $(Q,\cdot)$ de tipul T_1 cu T-forma $((Q,+),\varphi,\psi,g)$. Din condițiile propozițiilor 1 şi 2, rezultă că $\psi=\varepsilon$ şi $\psi^2+\psi+\varepsilon=0$, deci $\varepsilon^2+\varepsilon+\varepsilon=0\Rightarrow x+x+x=0\Rightarrow 3x=0,\ \forall x\in Q$. Reciproc, fie $(Q,+)$ un grup abelian nilpotent de gradul 3 şi fie $\varphi\in Aut(Q,+),\ g\in Q$. Atunci, conform propozițiilor 1 şi 2, T-quasigrupul $(Q,\cdot)$ cu T-forma $((Q,+),\varphi,\varepsilon,g)$, este un $LIP-\pi-$quasigrup de tipul T_1. Ω

Considerăm operația "$\circ$" definită în felul următor:

$$x\circ y=x\cdot yx,\ \forall x,y\in Q.$$

Propoziția 4. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un* $LIP-\pi-T-$*quasigrup de tipul* T_1 *cu T-forma* $((Q,+),\varphi,\varepsilon,g)$. *Perechea (Q,*$\circ$*), unde* $x\circ y=x\cdot yx,\ \forall x,y\in Q$, *este un quasigrup, dacă şi numai dacă* $\varphi+\varepsilon$ *este o funcție bijectivă.*

Demonstrație. Pentru $a,b\in Q$, considerăm ecuațiile $a\circ x=b$ şi $x\circ a=b$:

$$a\circ x=b\Leftrightarrow a\cdot xa=b\Leftrightarrow\varphi(a)+(\varphi(x)+a+g)=b\Leftrightarrow\varphi(x)=b-a-\varphi(a)-2g\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\varphi^{-1}(b-a-\varphi(a)-2g);$$
$$x\circ a=b\Leftrightarrow x\cdot ax=b\Leftrightarrow\varphi(x)+(\varphi(a)+x+g)=b\Leftrightarrow\varphi(x)+x=b-\varphi(a)-2g\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\varphi+\varepsilon)x=b-\varphi(a)-2g.$$

Soluția ecuației $a\circ x=b$ există şi este unică, deoarece φ este funcție bijectivă. Iar soluția ecuației $x\circ a=b$ există şi e única, dacă şi numai dacă funcția $\varphi+\varepsilon$ este bijectivă. Ω

Observăm că *(Q,*$\circ$*),* unde $x\circ y=(\varphi+\varepsilon)x+\varphi(y)+2g$, este un T-quasigrup.

Propoziția 5. *Orice* $LIP-\pi-T-$*quasigrup de tipul* T_1 *cu T-forma* $((Q,+),\varphi,\varepsilon,g)$ *are unitate la stânga* $f=\varphi^{-1}(-g)$.

Demonstrație. Într-adevăr, luând $f = \varphi^{-1}(-g)$, obținem: $y = f \cdot y = \varphi(f) + y + g \Rightarrow \varphi(f) = -g \Rightarrow$ $f = \varphi^{-1}(-g),\ \forall y \in Q,$ deci f este unitate la stânga Ω.

Referințe:

1. BELOUSOV, V. *Fundamentele teoriei quasigrupurilor şi a buclelor.* Moscova: Nauka, 1967 (în l. rusă).
2. BELOUSOV, V. Quasigrupuri conjugat-ortogonale. Prepint. IM al AŞM.
3. Chişinău: Ştiinţa, 1983, 50 p. (în limba rusă) .
4. PFLUGFELDER, H.O. *Quasigroups and loops: introduction.* Sigma Series in Pure Math, 1990.
5. KEPKA,T., NEMEC, P. T-quasigroups. I. In: *Acta univ. Carolin. Math.Phys.* 1971, vol.12, no.1, p.31-39.
6. Ibidem, p.39-49.
7. SYRBU, P. On π-quasigroups isotopic to abelian groups. În: *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.* 2009, nr. 3(61), p.109-117.