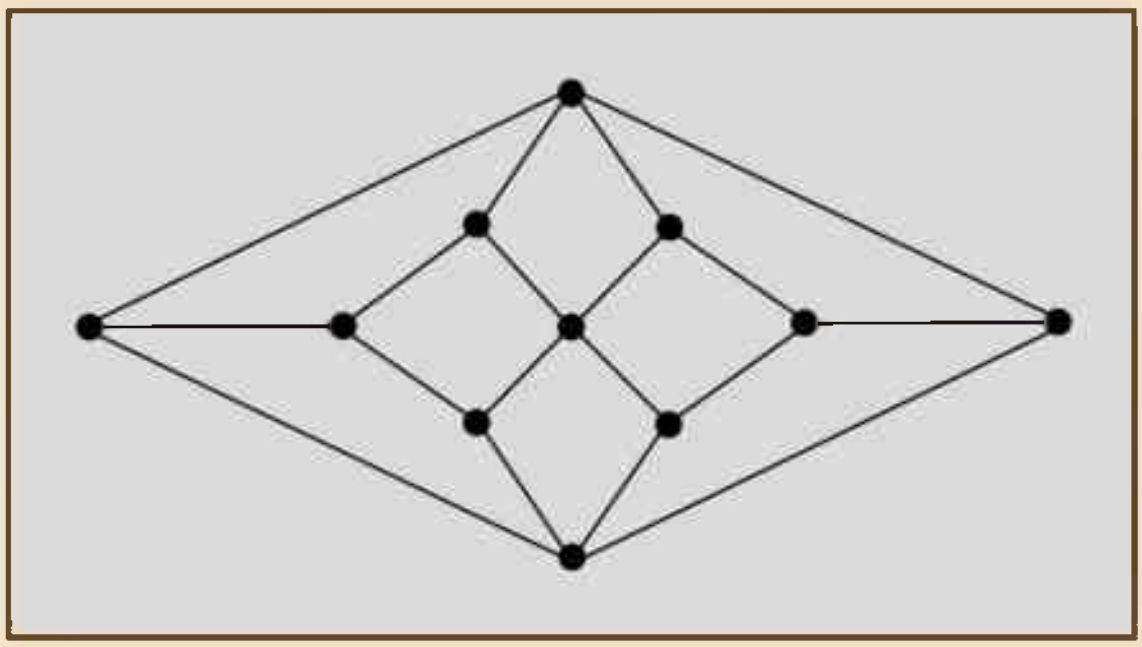
Radu BUZATU

TEORIA GRAFURILOR

Note de curs



UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
Facultatea de Matematică şi Informatică
Departamentul Matematică



Radu BUZATU

Teoria grafurilor

Note de curs

Aprobat de
Consiliul Calităţii al USM

Chişinău, 2022
CEP USM

519.17(075.8)
B 98

Recomandat de Departamentul Matematică și de Consiliul Facultății de Matematică și Informatică

Autor: ***Radu BUZATU**, dr., conf. univ., USM*

Recenzenți: ***Dumitru LOZOVANU**, dr. hab., prof. univ., IMI "Vladimir Andrunachievici"*

***Angela NICULIȚĂ**, dr., conf. univ., USM*

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții din Republica Moldova

Buzatu, Radu.

Teoria grafurilor: Note de curs / Radu Buzatu; Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, Departamentul Matematică. – Chișinău: CEP USM, 2022. – 133 p.: fig.

Bibliogr.: p. 132 -133 (36 tit.). – 50 ex.

ISBN 978-9975-159-66-1.

519.17(075.8)

B 98

© Radu Buzatu, 2022
© USM, 2022

ISBN 978-9975-159-66-1

Cuprins

Prefață 7

1. Noțiuni introductive 9
1.1. Elementele unui graf 9
1.2. Subgrafuri și supergrafuri 13
1.3. Clase fundamentale de grafuri 14
1.4. Izomorfism 17
1.5. Reprezentări ale grafurilor 17
1.6. Operații asupra grafurilor 20
1.7. Caracteristici metrice ale grafurilor 24
1.8. Probleme și sarcini 26

2. Mulțimi stabile 28
2.1. Mulțime stabilă interior 28
2.2. Mulțime stabilă exterior 33
2.3. Acoperire de vârfuri. Clică 37
2.4. Probleme și sarcini 39

3. Cuplaje 40
3.1. Cuplaj. Acoperire de muchii 40
3.2. Cuplaje în grafuri bipartite 45
3.3. Cuplaje în grafuri arbitrare 47
3.4. Probleme și sarcini 49

4. Conexitatea 50
4.1. Grafuri conexe. Componente conexe 50
4.2. Grafuri 2-conexe 53
4.3. Teorema lui Mengher 55
4.4. Grafuri *k*-conexe 58
4.5. Probleme și sarcini 60

5. Arbori 62
5.1. Caracterizarea arborilor 62
5.2. Arbori parțiali 65
5.3. Arbori parțiali de cost minim 67
5.4. Numărarea arborilor parțiali 68
5.5. Probleme și sarcini 70

6. Grafuri cordale 72
6.1. Grafuri cordale. Rezultate principale 72
6.2. Seria ordonată de eliminare a vârfurilor simpliciale 75
6.3. Probleme și sarcini 77

7. Grafuri euleriene și hamiltoniene 78
7.1. Grafuri euleriene 78
7.2. Grafuri hamiltoniene 81
7.3. Probleme și sarcini 84

8. Grafuri planare 85
8.1. Grafuri planare. Grafuri plane 85
8.2. Formula lui Euler. Criteriul de planaritate al lui Kuratowski 88
8.3. Triangulație 90
8.4. Grafuri duale 93
8.5. Probleme și sarcini 96

9. Colorarea grafurilor 98
9.1. Colorarea vârfurilor 98
9.2. Colorarea muchiilor 103

9.3. Polinomul cromatic 105
9.4. Probleme și sarcini 108

10. Teoria lui Ramsey 110
10.1. Numere Ramsey 110
10.2. Estimări ale numerelor Ramsey 112
10.3. Numere Ramsey pentru grafuri arbitrare 114
10.4. Probleme și sarcini 116

11. Grafuri orientate 117
11.1. Introducere în grafuri orientate 117
11.2. Cicluri euleriene și hamiltoniene în grafuri orientate 119
11.3. Grafuri turneu 121
11.4. Grafuri aciclice 124
11.5. Probleme și sarcini 125

12. Hipergrafuri 126
12.1. Hipergrafuri. Reprezentarea hipergrafurilor 126
12.2. Colorarea hipergrafurilor 129
12.3. Probleme și sarcini 131

Bibliografie 132

Prefață

Teoria grafurilor este un domeniu important al matematicii contemporane cu multe aplicații în informatică, fizica, chimie, inginerie, industrie, afaceri și în științe sociale. Teoria grafurilor a apărut în prima jumătate a secolului al XVIII-lea, a început să se formeze ca o ramură independentă a matematicii în a doua jumătate a secolului al XIX-lea și a cunoscut o dezvoltare explozivă abia la sfârșitul secolului al XX-lea. Progrese tehnologice rapide în rețelele de telecomunicații, proiectarea circuitelor integrate, informatica teoretică și apariția unor noi domenii, precum știința rețelelor, care pune accent pe aplicații în rețelele sociale și rețelele biologice, au contribuit toate la această explozie de interes în domeniul teoria grafurilor.

Notele de curs au ca scop familiarizarea studenților cu fundamentele teoretice ale teoriei grafurilor și sunt destinate spre formarea competențelor specifice disciplinelor Teoria grafurilor și Algoritmica grafurilor la studenții de la specialitățile de Matematică, Matematici aplicate, Informatică și Informatica Aplicată de la Facultatea de Matematică și Informatică.

Notele de curs sunt structurate în 12 capitole compuse din mai multe paragrafe. Fiecare capitol începe cu formularea definițiilor necesare și continuă cu prezentarea rezultatelor clasice care se referă la domeniul cercetat. Pentru toate rezultatele prezentate sub formă de teoreme, leme, consecințe și propoziții, sunt oferite demonstrații explicite, cu excepția celor triviale sau a celor prea voluminoase. Materialul teoretic prezentat în această carte este sprijinit de numeroase exemple și figuri cu reprezentări

grafice ale grafurilor, ceea ce ușurează esențial perceperea materialului descris.

La sfârșitul lucrării propunem o listă bibliografică în care sunt menționate cele mai importante lucrări din domeniul teoriei grafurilor.

Radu BUZATU

1. Noțiuni introductive

1.1. Elementele unui graf

Definiția 1.1.1. *Perechea de mulțimi $G = (V, E)$, unde V este o mulțime nevidă de elemente distincte, iar E este o mulțime formată din perechi neordonate de elemente din V, se numește* ***graf neorientat*** *sau* ***graf****.*

Elementele lui V și E le numim respectiv *vârfuri* și *muchii* ale grafului G. În funcție de structura mulțimilor V și E, grafurile pot fi atât finite, cât și infinite. Noi ne vom referi în continuare doar la grafuri *finite*, adică vom studia doar grafuri cu mulțimile V și E finite. Numărul elementelor lui V determină ordinul grafului G. Dacă $|V| = n$, atunci se spune că graful este de ordin n. Numărul muchiilor $|E| = m$ este mărimea grafului. Pentru a specifica precum că V și E sunt mulțimile de vârfuri și muchii ale grafului G, pot fi utilizate notațiile V_G și E_G sau $V(G)$ și $E(G)$.

Dacă o muchie $e \in E$ este determinată de o pereche de vârfuri (u, v), atunci vom scrie $e = (u, v)$ sau $e = uv$ și vom spune că vârfurile u și v sunt unite cu ajutorul muchiei e. În acest caz, u și v se numesc *extremități* ale muchiei e și se spune că vârfurile u și v sunt *adiacente*. Se mai spune că fiecare dintre vârfurile u și v este *incident* muchiei e și viceversa. Adiacența dintre u și v se notează prin $u \sim v$. În mod similar, două muchii se numesc *adiacente*, dacă ele sunt incidente unui vârf comun. Există posibilitatea ca o muchie e să aibă extremitățile identice, o asemenea muchie poartă denumirea de *buclă*. Totodată, pentru mai multe muchii poate fi asociată o singură pereche de vârfuri. Astfel de muchii se numesc muchii *paralele* sau *multiple*. Un graf care conține muchii paralele se

numește *multigraf*. *Pseudograf* este un multigraf care conține cel puțin o buclă. Un graf fără bucle și muchii paralele se numește *graf simplu*. În cele ce urmează, în lucrarea dată, dacă nu se va specifica altfel, vor fi studiate doar grafurile simple.

Fie $G = (V, E)$ un graf cu mulțimea de vârfuri $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ și mulțimea de muchii $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$, $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$, $e_3 = (v_2, v_4)$, $e_4 = (v_2, v_4)$, $e_5 = (v_3, v_4)$, $e_6 = (v_3, v_5)$, $e_7 = (v_3, v_6)$, $e_8 = (v_6, v_6)$, $e_9 = (v_5, v_7)$, $e_{10} = (v_6, v_7)$, $e_{11} = (v_3, v_7)$. Aici graful G este reprezentat nemijlocit cu ajutorul mulțimilor de vârfuri şi muchii. În Figura 1.1.1 este dată reprezentarea geometrică a grafului G (vârfurile grafului corespund unor puncte în spațiu, iar orice muchie se reprezintă printr-o linie continuă, ce unește punctele corespunzătoare extremităților sale). În G muchia e_8 este o buclă, iar muchiile e_3 și e_4 sunt două muchii paralele. Deci, G este pseudograf.

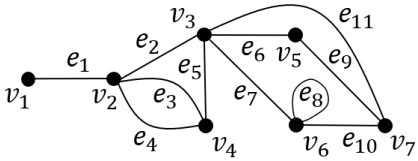


Figura 1.1.1. *Graf* $G = (V, E)$

Mulțimea vârfurilor grafului $G = (V, E)$ adiacente cu un vârf v se numește *vecinătatea* lui v și se notează prin $N(v) = \{u \in V : u \sim v\}$. Mulțimea $N(v) \cup \{v\}$ se notează prin $N[v]$. *Gradul* vârfului $v \in V$ este cardinalul mulțimii $N(v)$ şi se notează prin $\deg(v)$ sau $g(v)$. Cu alte cuvinte, gradul unui vârf v este egal cu numărul de vârfuri ale grafului, adiacente lui v (sau numărul de muchii incidente lui v). Gradul maxim şi gradul minim al vârfurilor unui graf G se notează prin $\Delta(G)$ şi $\delta(G)$. Astfel,

$$\Delta(G) = \max_{v \in V}\{\deg(v)\}, \ \delta(G) = \min_{v \in V}\{\deg(v)\}.$$

Să prezentăm câteva rezultate importante cu referire la gradele vârfurilor unui graf.

Teorema 1.1.1. *Pentru un graf G cu m muchii, este adevărată relația:*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m.$$

Demonstrație. Vom demonstra teorema utilizând inducția matematică după numărul de muchii m.

Fie $G_0 = (V, E_0)$ un graf cu n vârfuri și $m = 0$ muchii. Pentru orice vârf $v \in V$, avem $\deg_{G_0}(v) = 0$ și, ca urmare, $\sum_{v \in V} \deg_{G_0}(v) = 0 = 2m$. Presupunem că pentru orice graf $G_m = (V, E_m)$ definit pe aceeași mulțime de vârfuri V și cu m muchii, unde $m \geq 0$, are loc $\sum_{v \in V} \deg_{G_m}(v) = 2m$. Atunci la adăugarea unei muchii noi $e = (v_i, v_j)$, $v_i, v_j \in V$, în graful G_m se obține un graf nou $G_{m+1} = (V, E_{m+1})$, care satisface următoarele relații:

$$\deg_{G_{m+1}}(v) = \deg_{G_m}(v), \quad \forall v \in V \backslash \{v_i, v_j\};$$

$$\deg_{G_{m+1}}(v_i) = \deg_{G_m}(v_i) + 1 \text{ și } \deg_{G_{m+1}}(v_j) = \deg_{G_m}(v_j) + 1.$$

De unde rezultă că

$$\sum_{v \in V} \deg_{G_{m+1}}(v) =$$

$$= \sum_{v \in V \backslash \{v_i, v_j\}} \deg_{G_m}(v) + \left(\deg_{G_m}(v_i) + 1\right) + \left(\deg_{G_m}(v_j) + 1\right) =$$

$$= \sum_{v \in V} \deg_{G_m}(v) + 2 = 2m + 2 = 2(m + 1).$$

Teorema este demonstrată. □

Consecința 1.1.1. *În orice graf $G = (V, E)$ numărul vârfurilor de grad impar este par.*

Demonstrație. Să considerăm prin absurd că numărul vârfurilor de grad impar este impar. Fie $V = V_1 \cup V_2$, unde

$$V_1 = \{v \in V : \deg(v) \text{ este impar}\} \text{ și}$$

$$V_2 = \{v \in V : \deg(v) \text{ este par}\}.$$

Să notăm $d_1 = \sum_{v \in V_1} \deg(v)$ și $d_2 = \sum_{v \in V_2} \deg(v)$. d_1 este număr impar ca sumă impară de numere impare, iar d_2 este număr par ca sumă de numere pare. Deoarece $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, rezultă că $\sum_{v \in V} \deg(v) = d_1 + d_2$ și astfel $\sum_{v \in V} \deg(v)$ este număr impar, obținut ca sumă între un număr impar și unul par. Din Teorema 1.1.1 cunoaștem că $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, deci este număr par, contradicție. □

Vârful $v \in V$ se numește *izolat* în graful G, dacă $\deg(v) = 0$ şi *suspendat*, dacă $\deg(v) = 1$ (vârful *suspendat* se mai numește *vârf terminal*). Muchia incidentă unui vârf terminal, de asemenea, se numește *suspendată* (*terminală*). Evident, dacă $\delta(G) \geq 2$, atunci graful nu conţine vârfuri suspendate şi dacă $\delta(G) \geq 1$, atunci graful nu conţine vârfuri izolate. Pentru graful G arătat în Figura 1.1.1, $\deg(v_7) = 3$, vârful v_1 este un vârf suspendat și $\Delta(G) = 5$.

Definiția 1.1.2. *Pentru graful $G = (V, E)$, numim **lanț** în G o succesiune de vârfuri $L = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, dacă $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pentru orice $i = \overline{1, k-1}$. În acest caz, se spune că lanțul L **leagă** vârfurile v_1 și v_k.*

Vom considera că o muchie $e = (u, v) \in E$ aparţine lanţului L, dacă şi numai dacă u şi v sunt vârfuri consecutive în L. Vârfurile v_1 și v_k se numesc *extremități* ale lanțului, iar numărul $l = k - 1$ este *lungimea* lanțului L. Dacă $v_1 = v_k$, atunci L se numește *ciclu*. Un lanț cu proprietatea că oricare două vârfuri ale sale sunt distincte se numește *lanț elementar*. De asemenea, un lanț cu proprietatea că oricare două muchii ale sale sunt distincte două câte două, se numește *lanț simplu*. Se observă că orice lanț elementar este și un lanț simplu. În mod analog, ușor se definesc noțiunile de *ciclu elementar* și *ciclu simplu*. În graful G din Figura 1.1.1 lanțul $L = (v_1, v_2, v_3, v_6, v_7)$ este elementar și simplu, iar ciclul $C = (v_2, v_3, v_5, v_7, v_3, v_4, v_2)$ este simplu și nu este elementar.

Teorema 1.1.2. *Orice graf $G = (V, E)$, pentru care $\delta(G) \geq 2$, conține un lanț elementar de lungime cel puțin $\delta(G)$ și un ciclu elementar de lungime cel puțin $\delta(G) + 1$.*

Demonstrație. Fie $L = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ un lanț elementar de lungime maximă al grafului $G = (V, E)$ (Figura 1.1.2).

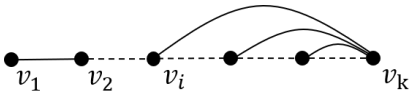


Figura 1.1.2

Este clar că toate vârfurile adiacente cu v_k aparțin lui L. Dacă am presupune contrariul, atunci am ajunge cu ușurință la contradicție cu maximalitatea lanţului ales. În consecință, $k - 1 \geq \delta(G)$ și $k \geq \delta(G) + 1$. Aceasta înseamnă că lanțul L conține cel puțin $\delta(G)$ muchii. Fie că i,

$1 \leq i \leq k-1$, este indicele minim pentru care $(v_i, v_k) \in E$. Atunci toate vârfurile adiacente cu v_k aparțin mulțimii $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}\}$ și deci $k - i \geq \delta(G)$. Așadar, $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ este un ciclu de lungime mai mare sau egală cu $\delta(G) + 1$. □

1.2. Subgrafuri și supergrafuri

Definiția 1.2.1. *Un graf $H = (V_H, E_H)$ se numește **subgraf** al grafului $G = (V_G, E_G)$, dacă $V_H \subseteq V_G$ și $E_H \subseteq E_G$. În acest caz, G se numește **supergraf** al grafului H.*

Conform definiției, orice graf poate fi considerat drept subgraf și supergraf al său.

Definiția 1.2.2. *Un graf $H = (V_H, E_H)$ se numește **subgraf parțial** al grafului $G = (V_G, E_G)$, dacă $V_H = V_G$ și $E_H \subseteq E_G$.*

Așadar, un subgraf parţial al unui graf se obţine păstrând aceeași mulţime de vârfuri şi eliminând o parte din muchii ale grafului inițial.

Definiția 1.2.3. *Un graf $H = (V_H, E_H)$ se numește subgraf al grafului $G = (V_G, E_G)$ **generat** (sau **indus**) de submulțimea de vârfuri $A \subseteq V_G$, dacă:*

1) *$V_H = A$;*
2) *două vârfuri sunt adiacente în H, dacă și numai dacă ele sunt adiacente în G.*

Un astfel de subgraf H se notează prin $G[A]$.

În Figura 1.2.1 sunt ilustrate două subgrafuri G_1 și G_2 ale grafului G din Figura 1.1.1. Subgraful G_1 este format din cinci vârfuri v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 și cinci muchii $e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}$. G_2 este subgraful grafului G generat de submulțimea de vârfuri $S = \{v_3, v_5, v_7\}$. Putem scrie $G_2 = G[S]$.

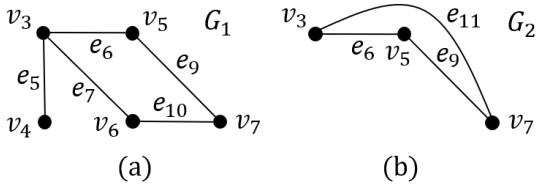


Figura 1.2.1. (a) *Subgraf G_1 al grafului G din Figura* 1.1.1;
(b) *subraf $G_2 = G[S]$, unde $S = \{v_3, v_5, v_7\}$*

1.3. Clase fundamentale de grafuri

În funcție de structura mulțimilor de vârfuri și de muchii, vom defini în continuare câteva clase fundamentale de grafuri.

Definiția 1.3.1. *Un graf format dintr-un vârf se numește* ***graf trivial****.*

Definiția 1.3.2. *Un graf care nu conține nicio muchie se numește* ***graf nul****. Graful nul de ordin n se notează prin O_n.*

Definiția 1.3.3. *Un graf, structura căruia reprezintă un lanț, se numește* ***graf lanț****. Graful lanț de ordin n se notează prin P_n.*

Definiția 1.3.4. *Un graf, structura căruia reprezintă un ciclu, se numește* ***graf ciclu****. Graful ciclu de ordin n se notează prin C_n.*

În Figura 1.3.1 sunt ilustrate un graf nul O_6, un graf lanț P_4 și un graf ciclu C_5. Este limpede că în P_n sunt $n-1$ muchii, iar în C_n sunt n muchii.

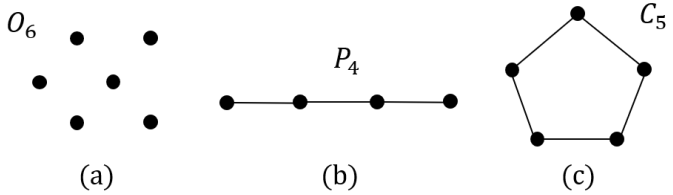


Figura 1.3.1. (a) O_6; (b) P_4; (c) C_5

Definiția 1.3.5. *Un graf, în care oricare două vârfuri distincte sunt adiacente, se numește* ***graf complet****. Graful complet de ordin n se notează prin K_n.*

În Figura 1.3.2 sunt ilustrate trei grafuri complete K_3, K_4 și K_5.

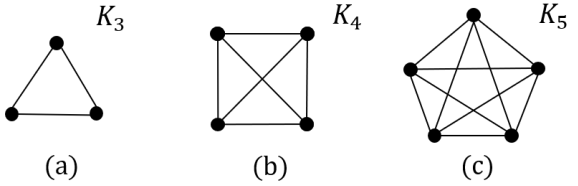


Figura 1.3.2. (a) K_3; (b) K_4; (c) K_5

Propoziția 1.3.1. *Într-un graf complet K_n sunt $\frac{n(n-1)}{2}$ muchii.*

Demonstrație. Graful complet K_n este un graf cu numărul maxim de muchii, care nu conține bucle și muchii multiple. De aici rezultă că numărul de muchii în K_n este egal cu numărul submulțimilor de două elemente ale mulțimii de vârfuri, care are n elemente. Deci numărul de muchii al grafului complet este $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$. □

Definiția 1.3.6. *Un graf, în care gradele tuturor vârfurilor sunt egale cu un număr k, se numeşte* ***graf k-regulat*** *sau simplu* ***graf regulat.***

De exemplu, graful din Figura 1.3.3 (a) este 3-regulat, iar graful din Figura 1.3.2 (c) este 4-regulat.

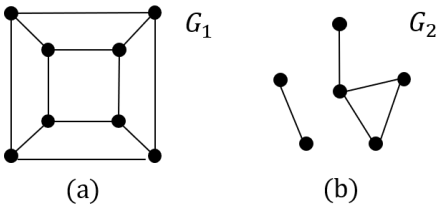


Figura 1.3.3. (a) *Graf 3-regulat conex* G_1; (b) *graf neconex* G_2

Definiția 1.3.7. *Un graf G pentru oricare două vârfuri ale căruia există un lanţ ce le leagă se numeşte* ***graf conex***.

În cazul când în G sunt două vârfuri pentru care nu există un lanț ce le leagă, atunci graful G se numește *neconex*. Se numește *componentă conexă* a grafului G un subgraf maximal conex al lui G. De exemplu, graful G_1 din Figura 1.3.3 (a) este conex, iar graful G_2 din Figura 1.3.3 (b) este neconex și constă din două componente conexe.

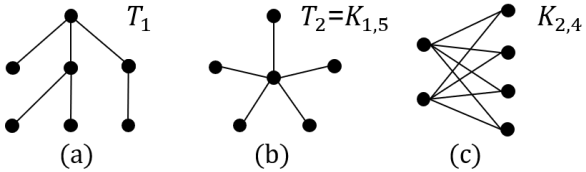


Figura 1.3.4. (a) T_1; (b) $T_2 = K_{1,5}$; (c) $K_{2,4}$

Un graf care nu conține cicluri se numește *aciclic*.

Definiția 1.3.8. *Un graf conex şi aciclic se numeşte* ***arbore***.

Graful arbore, de obicei, se notează prin T. Două exemple de arbori sunt prezentate în Figura 1.3.4 (a) și (b).

Definiția 1.3.9. *Un graf $G = (V, E)$ se numește **bipartit**, dacă mulțimea de vârfuri V poate fi divizată în două submulţimi V_1 şi V_2, astfel încât fiecare muchie din E are o extremitate în V_1, iar altă extremitate în V_2. Un asemenea graf bipartit se notează prin $G = (V_1, V_2, E)$.*

Dacă în graful bipartit $G = (V_1, V_2, E)$ fiecare vârf din V_1 este adiacent cu toate vârfurile din V_2, atunci acest graf se numește *bipartit complet*. Graful bipartit complet $G = (V_1, V_2, E)$ cu $|V_1| = p$ și $|V_2| = q$ se notează prin $K_{p,q}$. Dacă $p = 1$, atunci graful $K_{1,q}$ se numește *stea*. Câteva exemple de grafuri bipartite pot fi văzute în Figura 1.3.4.

Teorema 1.3.1. *Un graf este bipartit dacă și numai dacă nu are cicluri de lungime impară.*

Demonstrație. Să demonstrăm mai întâi necesitatea. Considerăm un graf bipartit $G = (V_1, V_2, E)$. Se observă că orice ciclu C al grafului G are forma $(v_1, u_1, v_2, u_2 \dots, v_k, u_k, v_1)$, unde $k \geq 2$, $v_i \in V_1$, $i = \overline{1,k}$, și $u_i \in V_2$, $i = \overline{1,k}$. Este clar că lungimea ciclului C este $2k$.

Vom demonstra suficiența. Fie $G = (V, E)$ un graf care nu are cicluri de lungime impară și $v \in V$ un vârf oarecare. Vom considera mulțimea V_1' formată din vârfurile $u \in V$, pentru care lungimea celui mai scurt lanț ce leagă v și u este pară. Definim mulțimile $V_1 = V_1' \cup \{v\}$ și $V_2 = V \backslash V_1$. Fie $u_1, u_2 \in V_1$ (sau $u_1, u_2 \in V_2$). Presupunem că $(u_1, u_2) \in E$ și să notăm cu $L(v, u_1)$ și $L(v, u_2)$ cele mai scurte lanţuri între v și u_1, respectiv v și u_2. Reuniunea lanțurilor $L(v, u_1)$ și $L(v, u_2)$ cu muchia (u_1, u_2) formează un ciclu C de lungime impară, deoarece din definiţia mulţimii V_1 rezultă că lungimea lanţurilor $L(v, u_1)$ și $L(v, u_2)$ este pară (impară). Existența unui astfel de ciclu contrazice ipoteza și deci $(u_1, u_2) \notin E$, de unde deducem că graful este bipartit. □

O generalizare a grafului bipartit este graful *p*-partit, care se definește în felul următor:

Definiția 1.3.10. *Graful $G = (V, E)$ se numește **p-partit**, dacă mulțimea vârfurilor V poate fi divizată în $p \geq 2$ submulțimi nevide și disjuncte două câte două $V_1, V_2, \dots, V_p$, numite **părțile grafului**, cu proprietatea că orice muchie are extremități în două părți diferite ale lui G.*

În Figura 1.3.5 este ilustrat un graf 3-partit.

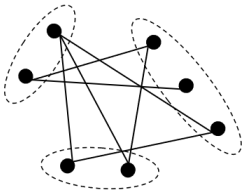


Figura 1.3.5. Graf 3-partit

1.4. Izomorfism

Definiția 1.4.1. *Fie $G = (V_G, E_G)$ și $H = (V_H, E_H)$ două grafuri. Funcția bijectivă $f: V_G \to V_H$ se numeşte* ***izomorfism*** *al grafurilor G și H, dacă pentru orice două vârfuri $v, u \in V_G$ imaginile lor $f(v)$, $f(u) \in V_H$ sunt adiacente în H dacă și numai dacă v și u sunt adiacente în G.*

Dacă există un asemenea izomorfism, se spune că grafurile G și H sunt *izomorfe* și se notează prin $G \cong H$.

Un exemplu de grafuri izomorfe este prezentat în Figura 1.4.1.

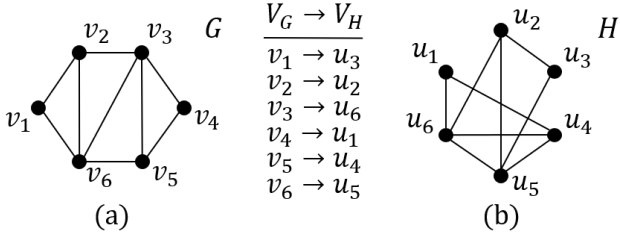


Figura 1.4.1. *Grafuri izomorfe G* (a) *și H* (b)

1.5. Reprezentări ale grafurilor

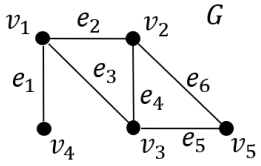
Pe lângă reprezentarea grafului descrisă nemijlocit cu ajutorul mulțimilor de vârfuri şi muchii, și reprezentarea geometrică (printr-un desen în plan), graful mai poate fi reprezentat algebric, prin intermediul matricei de adiacență, matricei de incidență și matricei Kirchhoff etc.

Fie $G = (V, E)$ un graf, unde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Definiția 1.5.1. ***Matricea de adiacență*** $A = \|a_{ij}\|$*, asociată grafului G, este o matrice pătratică de dimensiune $n \times n$, cu elementele:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } v_i \sim v_j; \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Elementele de pe diagonala principală ale matricei A sunt egale cu 0. Suma elementelor de pe linia i, $1 \leq i \leq n$, şi, respectiv, suma elementelor de pe coloana j, $1 \leq i \leq n$, au ca rezultat gradul vârfului i, respectiv j. Suma tuturor elementelor matricei de adiacență este suma gradelor tuturor vârfurilor grafului, adică dublul numărului de muchii ($2m$). În Figura 1.5.1 (b) este prezentată matricea de adiacență a grafului G din Figura 1.5.1 (a).



(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

Figura 1.5.1. (a) *Graf G*; (b) *matricea de adiacență a grafului G*

Definiția 1.5.2. ***Matricea lanțurilor*** $L = \|l_{ij}\|$, *asociată grafului* G, *este o matrice pătratică de dimensiune* $n \times n$, *cu elementele:*

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă în } G \text{ există un lanț ce leagă vârfurile } v_i \text{ și } v_j; \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Se observă că matricea lanțurilor, ca și matricea de adiacență, este simetrică, deoarece dacă există un lanț de la vârful u la vârful v, atunci există și un lanț de la v la u. De exemplu, pentru graful G din Figura 1.5.1 (a), matricea lanțurilor constă doar din unități, deoarece între oricare două vârfuri ale lui G există un lanț.

Definim următoarele operații:

Adunarea logică $(+)$: $\{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, definită prin $a + b = a \vee b$, $\forall a, b \in \{0,1\}$, unde $\vee$ este operația de disjuncție logică.

Înmulțirea logică $(*)$: $\{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, definită prin $a * b = a \wedge b$, $\forall a, b \in \{0,1\}$, unde $\wedge$ este operația de conjuncție logică.

Teorema 1.5.1. *Fie* $G = (V, E)$ *un graf,* A *– matricea sa de adiacență de dimensiune* $n \times n$, *unde* L *este matricea lanțurilor lui* G. *Atunci are loc relația:*

$$L = \sum_{k=1}^{n-1} A^k,$$

calculele fiind realizate folosind operațiile $+$ *și* $*$ *definite mai sus.*

Demonstrație. Să considerăm că în G există muchiile (v_i, v_j) și (v_j, v_k), atunci în matricea A avem $a_{ij} = a_{ji} = 1$ și $a_{jk} = a_{kj} = 1$, iar în matricea $A^2 = B = \|b_{ij}\|_{1 \le i,j \le n}$ avem:

$$b_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} * a_{sk} = a_{ij} * a_{jk} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} a_{is} * a_{sk} = 1 + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} a_{is} * a_{sk} = 1.$$

În general, folosind metoda inducției matematice, poate fi arătat că în matricea $A^p = B^* = \|b_{ij}^*\|_{1 \le i,j \le n}$, $2 \le p \le n-1$, avem $b_{ij}^* = 1$ dacă și numai dacă în graful G există un lanț de la v_i la v_j de lungime p, unde $v_i, v_j \in V$. Având în vedere că orice lanț de lungime cel puțin n între două vârfuri arbitrare neadiacente conține un sublanț de lungime mai mică sau egală cu $n-1$ între aceleași două vârfuri, rezultă corectitudinea relației $L = \sum_{k=1}^{n-1} A^k$. □

Având în vedere Teorema 1.5.1, putem concluziona că un graf este conex dacă și numai dacă toate elementele matricei lanțurilor L ale acestui graf sunt egale cu 1.

Definiția 1.5.3. ***Matricea de incidență*** $B = \|b_{ij}\|$, *asociată grafului* G, *este o matrice de dimensiune* $n \times m$, *cu elementele:*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă vârful } v_i \text{ este incident muchiei } e_j; \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Suma elementelor de pe linia i, $1 \le i \le n$, este egală cu gradul vârfului i, iar suma elementelor de pe coloana j, $1 \le j \le m$, este egală cu 2. Matricea de incidență a grafului din Figura 1.5.1 (a) este ilustrată în Figura 1.5.2 (a).

Definiția 1.5.4. ***Matricea Kirchhoff*** $C = \|c_{ij}\|$, *asociată grafului* G, *este o matrice pătratică de dimensiune* $n \times n$, *cu elementele:*

$$c_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{dacă } v_i \sim v_j; \\ \deg(v_i), & \text{dacă } i = j; \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Suma elementelor de pe orice linie și orice coloană a matricei Kirchhoff are ca rezultat 0.

Matricea Kirchhoff a grafului din Figura 1.5.1 (a) este ilustrată în Figura 1.5.2 (b).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) (b)

Figura 1.5.2. (a) *Matricea de incidență a grafului G din Figura* 1.5.1 (*a*); (b) *matricea Kirchhoff a lui G din Figura* 1.5.1 (*a*)

1.6. Operații asupra grafurilor

În continuare, vom cerceta operații care pot fi aplicate asupra grafurilor.

Definiția 1.6.1. *Operația de* ***eliminare a vârfului*** v *din graful* $G = (V, E)$ *constă în eliminarea lui* v *din* V *și ștergerea tuturor muchiilor incidente lui* v. *Se notează* $G - v$.

Cu alte cuvinte, după eliminarea vârfului v din G se obține graful $G' = (V', E')$, unde

$$V' = V \backslash \{v\} \text{ și } E' = E \backslash \{(u, v) : u \in N(v)\}.$$

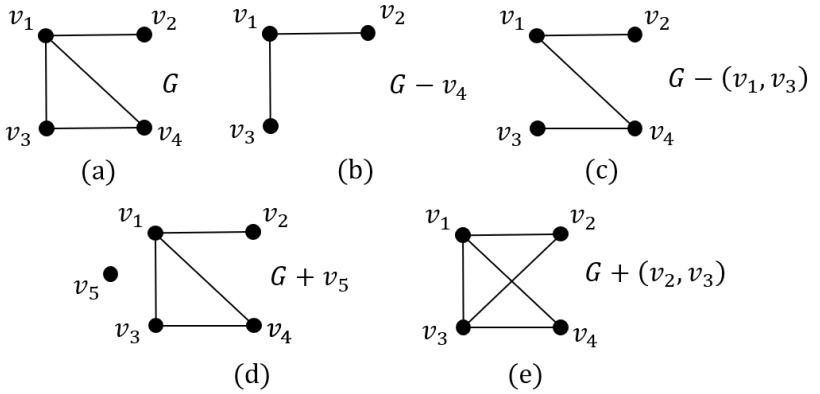


Figura 1.6.1. (a) *Graful* G; (b) $G - v_4$; (c) $G - (v_1, v_3)$; (d) $G + v_5$; (c) $G + (v_1, v_3)$

Definiția 1.6.2. *Operația de* ***eliminare a muchiei*** e *din graful* $G = (V, E)$ *constă în eliminarea muchiei* e *din* E. *Se notează* $G - e$.

Ușor pot fi definite și operații inverse: operația de *adăugare a vârfului* w, se notează $G + w$, și operația de *adăugare a muchiei* e, notează $G + e$.

Exemple de aplicare a operațiilor de adăugare și de eliminare a vârfurilor și muchiilor sunt prezentate în Figura 1.6.1.

Fie două grafuri $G_1 = (V_1, E_1)$ și $G_2 = (V_2, E_2)$.

Definiția 1.6.3. *Graful* $H = (V, E)$ *desemnat prin* $H = G_1 \cup G_2$ *în care* $V = V_1 \cup V_2$ *și* $E = E_1 \cup E_2$ *se numește* ***reuniunea grafurilor*** G_1 *și* G_2.

Dacă $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, atunci reuniunea $G_1 \cup G_2$ se numește *disjunctă*.

Definiția 1.6.4. *Graful* $H = (V, E)$, *în care* $V = V_1 \cap V_2$ *și* $E = E_1 \cap E_2$, *se numește* ***intersecția grafurilor*** G_1 *și* G_2. *Se notează* $H = G_1 \cap G_2$.

În Figura 1.6.2 (c) și (d) sunt ilustrate intersecția și reuniunea grafurilor G_1 (a) și G_2 (b) .

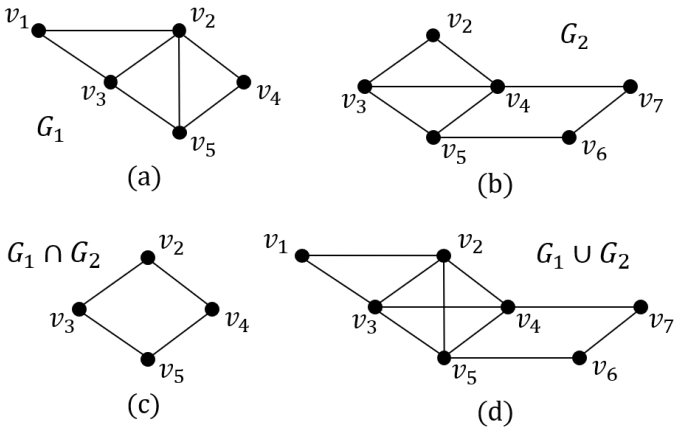


Figura 1.6.2. (a) *Graful* G_1; (b) *Graful* G_2; (c) $G_1 \cap G_2$; (d) $G_1 \cup G_2$

Definiția 1.6.5. *Graful* $G = (V, E)$, *ce se obține din grafurile* $G_1 = (V_1, E_1)$ *și* $G_2 = (V_2, E_2)$ *prin adăugarea tuturor muchiilor posibile de tipul* (u, v), *unde* $u \in V_1$ *și* $v \in V_2$, *se numește* ***suma grafurilor*** G_1 *și* G_2 *și se notează* $G_1 + G_2$.

Suma grafurilor G_1 și G_2 din Figura 1.6.3 (a) și (b) este prezentată în Figura 1.6.3 (c).

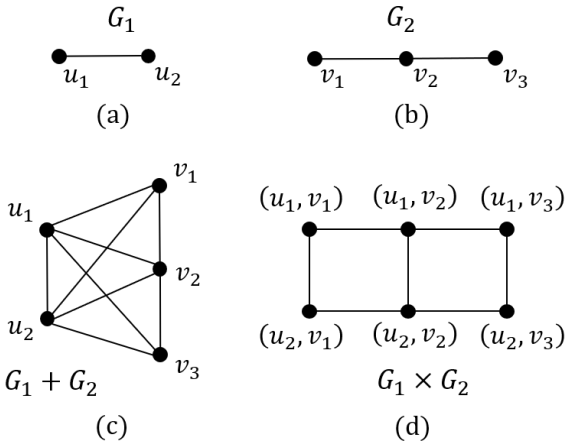


Figura 1.6.3. (a) *Graful* G_1; (b) *Graful* G_2; (c) G_1+G_2; (d) $G_1 \times G_2$

Definiția 1.6.6. *Graful* $G = G_1 \times G_2$ *se numește* ***produs cartezian****, dacă mulțimea vârfurilor sale este* $V(G) = V_1 \times V_2$*, iar mulțimea muchiilor* $E(G)$ *se definește după cum urmează: vârfurile* (u_1, v_1) *și* (u_2, v_2) *sunt adiacente în* G *dacă și numai dacă: a)* $u_1 = u_2$ *și* $v_1 \sim v_2$ *în* G_2 *sau b)* $v_1 = v_2$ *și* $u_1 \sim u_2$ *în* G_1.

Produsul cartezian al grafurilor G_1 și G_2 din Figura 1.6.3 (a) și (b) este ilustrat în Figura 1.6.3 (d).

Definiția 1.6.7. *Operația de* ***subdivizare*** *a muchiei* $e = (u, v) \in E$ *constă în eliminarea acestei muchii din graful* $G = (V, E)$ *și introducerea a două muchii noi* $e_1 = (u, w)$ *și* $e_2 = (w, v)$*, unde* w *este un vârf nou.*

Ca rezultat al subdivizării muchiei $e = (u, v) \in E$, se obține un graf nou $G' = (V', E')$ în care $V' = V \cup \{w\}$ și $E' = E \backslash \{e\} \cup \{(u, w), (w, v)\}$.

Definiția 1.6.8. *Operația de* ***contracție*** *a muchiei* $e = (u, v) \in E$ *constă în eliminarea muchiei* e *în din graful* $G = (V, E)$ *și înlocuirea vârfurilor* u *și* v *printr-un vârf nou* w *adiacent cu toate vârfurile din mulțimea* $\big(N(u) \cup N(v)\big) \backslash \{u, v\}$.

În urma contracției muchiei $e = (u, v) \in E$, se obține un graf nou $G' = (V', E')$ în care $V' = V \backslash \{u, v\} \cup \{w\}$ și

$$E' = E \backslash (\{(u, x) : x \in N(u)\} \cup \{(v, x) : x \in N(v)\}) \cup$$
$$\cup \big\{(w, x) : x \in \big(N(u) \cup N(v)\big) \backslash \{u, v\}\big\}.$$

Definiția 1.6.9. *Două grafuri se numesc* ***homeomorfe****, dacă ele se obțin prin aplicarea operației de subdivizare (contracție) succesivă a muchiilor aceluiași graf.*

În Figura 1.6.4 sunt prezentate grafurile homeomorfe obținute ca rezultat al operațiilor de subdivizare și contracție a muchiilor.

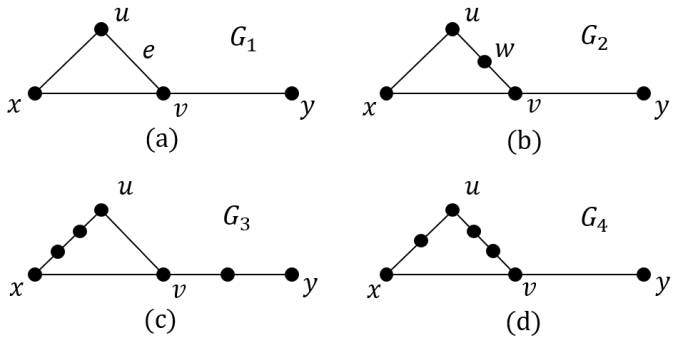


Figura 1.6.4. Grafurile G_1, G_2, G_3 și G_4 sunt homeomorfe. Graful G_2 (b) se obține ca rezultat al subdivizării muchiei e a grafului G_1 (a). În același timp, graful G_1 se obține din G_2 în urma contracției muchiei (u, w)

Definiția 1.6.10. ***Graf complementar*** *al grafului $G = (V, E)$ este graful cu aceeaşi mulțime de vârfui V, în care două vârfuri sunt adiacente dacă şi numai dacă ele nu sunt adiacente în G. Graful complementar se notează prin $\bar{G}$.*

Un exemplu de graf complementar $\bar{G}$ al grafului G este prezentat în Figura 1.6.5.

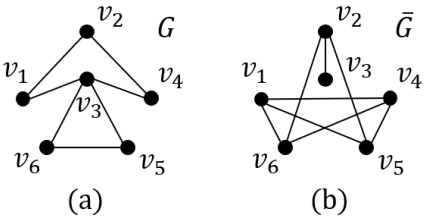
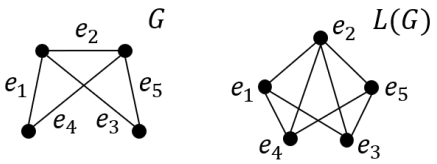


Figura 1.6.5. *Graful G* (a) *și graful complementar al său* (b)

Definiția 1.6.11. ***Graf al muchiilor*** *grafului $G = (V, E)$ este graful, vârfurile căruia corespund muchiilor grafului G şi două vârfuri sunt adiacente dacă şi numai dacă sunt adiacente muchiile corespunzătoare lor în G. Graf al muchiilor se notează prin $L(G)$.*

În Figura 1.6.6 este ilustrat un graf G și un graf al muchiilor $L(G)$.



(a) (b)

Figura 1.6.6. (a) *Graful G*; (b) *graf al muchiilor L*(*G*)

1.7. Caracteristici metrice ale grafurilor

Notăm prin $d(u,v)$ lungimea minimă a lanțului ce leagă vârfurile u și v în graful $G=(V,E)$. În caz că între două vârfuri $u,v\in V$ nu există niciun lanţ, atunci se consideră $d(u,v)=\infty$. Numărul $d(u,v)$ se numeşte *distanţa* dintre vârfurile u și v în G. Noțiunea de distanță satisface axiomele metricii, adică pentru oricare trei vârfuri $u,v,w\in V$ au loc următoarele relaţii:

1) $d(u,v)\geq 0$ şi $d(u,v)=0$ dacă şi numai dacă $u=v$;

2) $d(u,v)=d(v,u)$;

3) $d(u,w)+d(w,v)\geq d(u,v)$.

Cu ajutorul distanței se definește puterea de gradul $k\geq 1$ a grafului. Vom numi *putere de gradul* k a unui graf G graful G^k care conține aceeași mulțime de vârfuri cu G şi în care două vârfuri u,v sunt adiacente dacă şi numai dacă în G are loc inegalitatea $d(u,v)\leq k$.

Definiția 1.7.1. ***Excentricitatea*** *vârfului* v *al grafului* $G=(V,E)$*, notată prin* $e(v)$*, este distanța maximă dintre* v *si oricare vârf* u *al lui* G*:*

$$e(v)=\max_{u\in V} d(v,u).$$

Definiția 1.7.2. *Excentricitatea minimă a vârfurilor grafului* $G=(V,E)$ *se numește* ***raza*** *lui* G *și se notează prin* $r(G)$*. Deci,*

$$r(G)=\min_{v\in V} e(v)=\min_{v\in V}\max_{u\in V} d(v,u).$$

Un vârf v se numește *vârf central* în G, dacă $e(v)=r(G)$. Mulțimea tuturor vârfurilor centrale se numește *centrul grafului*.

Definiția 1.7.3. *Excentricitatea maximă a vârfurilor grafului* $G = (V, E)$ *se numește* ***diametrul*** *lui* G *și se notează prin* $D(G)$. *Deci,*

$$D(G) = \max_{v \in V} e(v) = \max_{v \in V} \max_{u \in V} d(v, u).$$

Un vârf v se numește *vârf periferic*, dacă $e(v) = D(G)$.

În cele ce urmează, vom determina raza, diametrul, centrul și vârfurile periferice ale grafului G din Figura 1.7.1.

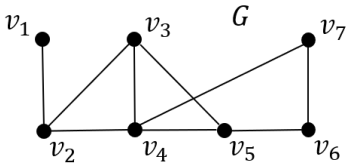


Figura 1.7.1

La început, vom determina excentricitățile vârfurilor grafului:

$$e(v_1) = 4, e(v_2) = 3, e(v_3) = 2, e(v_4) = 2,$$
$$e(v_5) = 3, e(v_6) = 4, e(v_7) = 3.$$

Acum, putem determina raza și diametrul lui G:

$r(G) = min\{4,3,2,2,3,4,3\} = 2$ și $D(G) = max\{4,3,2,2,3,4,3\} = 4$.

Mulțimea vârfurilor $\{v_3, v_4\}$ formează centrul grafului G, iar v_1 și v_4 sunt vârfuri periferice.

Teorema 1.7.1. *Într-un graf conex* $G = (V, E)$ *are loc relația:*

$$r(G) \leq D(G) \leq 2r(G).$$

Demonstrație. Inegalitatea $r(G) \leq D(G)$ rezultă imediat din definiția razei și, respectiv, a diametrului grafului, iar inegalitatea $D(G) \leq 2r(G)$ este consecința următorului șir de implicații:

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \max_{v \in V} d(u, v) \leq d(u, w) + \max_{v \in V} d(w, v) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \max_{u \in V} \max_{v \in V} d(u, v) \leq \max_{u \in V} d(u, w) + \max_{v \in V} d(w, v) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \max_{u \in V} \max_{v \in V} d(u, v) \leq \min_{w \in V} \max_{u \in V} d(u, w) + \min_{w \in V} \max_{v \in V} d(w, v) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow D(G) \leq 2r(G).$$

Teorema este demonstrată. □

1.8. Probleme și sarcini

1. Construiți un graf cu $2n$, $n \geq 3$, în care gradul oricărui vârf este trei şi nu conţine cicluri elementare de lungimea trei (triunghiuri).
2. Determinați numărul diagonalelor unui poligon convex cu n vârfuri.
3. Dați un exemplu de graf cu 6 vârfuri și 10 muchii pentru care $\delta(G) = 3$ și $\Delta(G) = 4$.
4. Determinați numărul grafurilor simple cu n vârfuri.
5. Stabiliți dacă în orice graf numărul vârfurilor de grad par este par.
6. Graful G se numește autocomplementar, dacă el este izomorf cu complementarul său $\bar{G}$. Construiți grafuri autocomplementare cu 4, 5 și 8 vârfuri.
7. Construiți matricea de adiacență, matricea de incidență și matricea Kirchhoff pentru graful G din Figura 1.8.1. Determinați diametrul, raza și centrul grafului G.

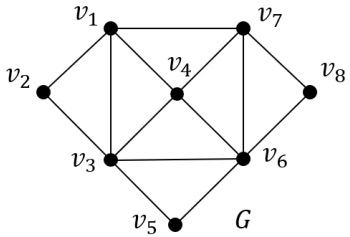


Figura 1.8.1

8. Determinați raza, diametrul și centrul grafurilor P_n și C_n pentru cazul $n \geq 3$.
9. Fie G un graf conex pentru care $D(G) \geq 3$. Demonstrați că are loc relația $D(\bar{G}) \leq 3$.
10. Demonstrați că dacă un graf G nu este conex, atunci graful complementar este conex.
11. Determinați suma și produsul cartezian al grafului din Figura 1.6.6 (a) cu un triunghi (graf format din trei vârfuri, oricare două vârfuri ale căruia sunt adiacente).
12. Stabiliți condițiile în care graf al muchiilor unui graf G este regulat.
13. Fie G un graf regulat conex cu 22 de muchii. Determinați câte vârfuri poate conține G.
14. Determinați dacă grafurile din Figura 1.8.2 sunt izomorfe.

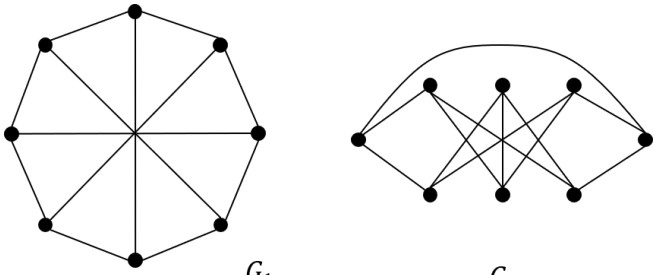


Figura 1.8.2

15. Fie $G = (V, E)$ un graf cu n vârfuri şi m muchii. Arătați că, dacă pentru orice $v \in V$ are loc $\deg(v) = k$ sau $\deg(v) = k + 1$, atunci numărul vârfurilor de grad k este $(k + 1)n - 2m$.
16. Arătați că numărul maxim de muchii într-un graf bipartit cu n vârfuri nu întrece $n^2/4$ în cazul când n este par și nu întrece $(n^2 - 1)/4$ când n este impar.

2. Mulțimi stabile

2.1. Mulțime stabilă interior

Definiția 2.1.1. *O submulțime de vârfuri $A \subseteq V$ a unui graf $G = (V, E)$ se numește* ***stabilă interior*** *în G, dacă nu conține două vârfuri adiacente.*

Definiția 2.1.2. *O submulțime stabilă interior $A \subseteq V$ se numește* ***maximală****, dacă în graful $G = (V, E)$ nu există o altă mulțime stabilă interior $B \subseteq V$, astfel încât $A \subset B$.*

Definiția 2.1.3. *O submulțime stabilă interior $A \subseteq V$ a grafului $G = (V, E)$ se numește* ***maximă****, dacă pentru orice mulțime stabilă interior $B \subseteq V$ are loc relația $|A| \geq |B|$.*

Definiția 2.1.4. *Cardinalul mulțimii stabile interior maxime a grafului G se notează prin $\alpha_0(G)$ şi se numeşte* ***număr de stabilitate internă.***

Evident, un vârf arbitrar al grafului este o mulțime stabilă interior. Prin urmare, pentru orice graf $G = (V, E)$ de ordin $n \geq 1$, are loc relația $1 \leq \alpha_0(G) \leq n$.

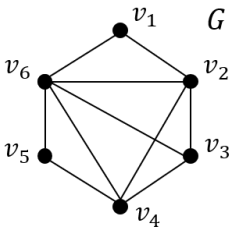


Figura 2.1.1. *Graful G pentru care $\alpha_0(G) = 3$*

Pentru graful G din Figura 2.1.1, mulțimile $A_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$, $A_2 = \{v_1, v_4\}$ și $A_3 = \{v_2, v_5\}$ sunt stabile interior maximale, iar A_1 este și stabilă interior maximă, deci $\alpha_0(G) = |A_1| = 3$.

Problema determinării valorii numărului $\alpha_0(G)$ este o problemă dificilă. De aceea sunt utile estimările inferioare și superioare ale acestui număr. Mai întâi vom lua cunoștință de estimările inferioare.

Teorema 2.1.1. *Pentru orice graf $G = (V, E)$ este adevărată relația:*

$$\alpha_0(G) \geq \sum_{v \in V} \big(1 + \deg(v)\big)^{-1}. \qquad (2.1)$$

Demonstrație. Observăm că dacă $G = K_n$, atunci afirmația teoremei este adevărată. Adică, avem:

$$\sum_{v \in V} \big(1 + \deg(v)\big)^{-1} = n \cdot (1 + n - 1)^{-1} = 1 \Rightarrow \alpha_0(G) \geq 1.$$

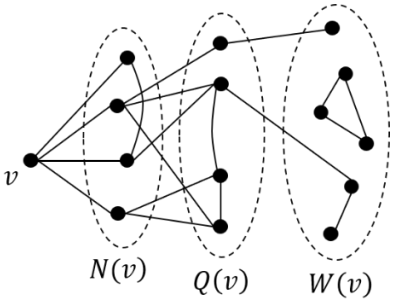


Figura 2.1.2. *Graful $G = (V, E)$ cu mulțimea de vârfuri $V = \{v\} \cup N(v) \cup Q(v) \cup W(v)$*

Considerăm că are loc inegalitatea $G \neq K_n$. Pentru demonstrația teoremei, vom folosi inducția matematică după numărul de vârfuri. Se verifică ușor că pentru $n \leq 2$ afirmația teoremei este adevărată. Fie acum $|V| = n > 2$ şi pentru orice graf de ordin mai mic ca n afirmația teoremei este adevărată. Alegem un vârf de grad minim $v \in V$ și reprezentăm mulțimea vârfurilor V în felul următor: $V = \{v\} \cup N(v) \cup Q(v) \cup W(v)$, unde $N(v)$ este vecinătatea vârfului v, $Q(v)$ reprezintă mulțimea vârfurilor aflate la distanța doi față de vârful v și $W(v) = V \backslash \big(\{v\} \cup N(v) \cup Q(v)\big)$ (Figura 2.1.2). Deci, suma din partea dreaptă a inegalității (2.1) este egală cu

$$\sum_{u\in V}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}=\big(1+\deg(v)\big)^{-1}+\sum_{u\in N(v)}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}+$$

$$+\sum_{u\in Q(v)}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}+\sum_{u\in W(v)}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}.$$

Vom arăta mai întâi că

$$\big(1+\deg(v)\big)^{-1}+\sum_{u\in N(v)}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}\le 1.$$

Deoarece $\deg(v)=\delta(G)$, avem:

$$\big(1+\deg(v)\big)^{-1}+\sum_{u\in N(v)}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}\le$$

$$\le\big(1+\deg(v)\big)^{-1}+\sum_{i=1}^{\deg(v)}\big(1+\deg(v)\big)^{-1}=$$

$$=\big(1+\deg(v)\big)\big(1+\deg(v)\big)^{-1}=1.$$

Să analizăm graful $G'=G-N[v]$. Conform presupunerii inductive, pentru G' teorema este adevărată. Dacă S este mulțimea stabilă interior maximă în G', atunci mulțimea $S\cup\{v\}$ este stabilă interior în G. Așadar, $\alpha_0(G)\ge\alpha_0(G')+1$.

Se observă că

$$\sum_{u\in Q(v)}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}+\sum_{u\in W(v)}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}\le$$

$$\le\sum_{u\in Q(v)}\big(1+\deg_{G'}(u)\big)^{-1}+\sum_{u\in W(v)}\big(1+\deg_{G'}(u)\big)^{-1}=$$

$$=\sum_{u\in V(G')}\big(1+\deg_{G'}(u)\big)^{-1}\le\alpha_0(G').$$

Prin urmare, obținem:

$$\sum_{u\in V}\big(1+\deg(u)\big)^{-1}\le 1+\sum_{u\in V(G')}\big(1+\deg_{G'}(u)\big)^{-1}\le$$

$$\le 1+\alpha_0(G')\le\alpha_0(G).$$

Așadar, teorema este demonstrată. □

Din Teorema 2.1.1 rezultă imediat următoarea consecință.

Consecința 2.1.1. *Pentru orice graf G de ordin n, este adevărată relația:*

$$\alpha_0(G) \geq \frac{n}{1+\Delta(G)}.$$

Vom nota prin $d(G)$ gradul mediu al vârfurilor grafului G care se calculează după formula

$$d(G) = \frac{1}{n}\sum_{v \in V(G)} \deg(v),$$

unde n este ordinul grafului G. Folosind noțiunea de grad mediu al vârfurilor grafului, putem obține o altă estimare a numărului de stabilitate internă mai comodă din punct de vedere practic.

Consecința 2.1.2. *Pentru orice graf G de ordinul n, este adevărată relația:*

$$\alpha_0(G) \geq \frac{n}{1+d(G)}.$$

Demonstrație. Este bine cunoscut că inegalitatea Cauchy-Buneakovski

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

este adevărată pentru orice valori ale lui $a_i \geq 0$ și $b_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$. Vom considera că $a_i = 1 + \deg(v_i)$ și $b_i = \left(1 + \deg(v_i)\right)^{-1}$, pentru orice $v_i \in V(G)$. În acest caz, vom avea:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(1+\deg(v_i)\right)\left(1+\deg(v_i)\right)^{-1}} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(1+\deg(v_i)\right)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(1+\deg(v_i)\right)^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(1+\deg(v_i)\right)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(1+\deg(v_i)\right)^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\big(1+\deg(v_i)\big)\sum_{i=1}^{n}\big(1+\deg(v_i)\big)^{-1}.$$

În virtutea relației (2.1), obținem:

$$\alpha_0(G) \geq \sum_{i=1}^{n}\big(1+\deg(v_i)\big)^{-1} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\big(1+\deg(v_i)\big)} =$$

$$= \frac{n^2}{n+d(G)n} = \frac{n}{1+d(G)}.$$

Consecința este demonstrată. □

Este cunoscută și o estimare superioară a numărului $\alpha_0(G)$.

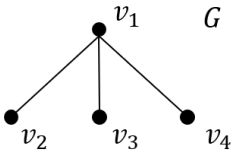
Fie că p^0, p^-, p^+ sunt respectiv numărul de rădăcini ale ecuației caracteristice $|A-\lambda E|=0$, care sunt egale cu 0, mai mici decât 0 și mai mari decât 0 (A este matricea de adiacență a grafului G, iar E este matricea unitate).

Teorema 2.1.2. *Pentru orice graf G, are loc relația:*

$$\alpha_0(G) \leq p^0 + min\,\{p^-, p^+\}.$$

Demonstrația acestei teoreme se omite.

În calitate de exemplu, vom determina estimarea inferioară și superioară a numărului de stabilitate internă $\alpha_0(G)$ pentru graful $G=(V,E)$ din Figura 2.1.3 (a), utilizând Teoremele 2.1.1 și 2.1.2.



(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

Figura 2.1.3. *Graf stea G*

Se verifică ușor că mulțimea $S=\{v_2, v_3, v_3\}$ este stabilă interior maximă a grafului G. Deci, $\alpha_0(G)=3$.

Să determinăm estimarea inferioară a lui $\alpha_0(G)$ cu ajutorul relației $\alpha_0(G) \geq \sum_{v\in V}\big(1+\deg(v)\big)^{-1}$ din Teorema 2.1.1 Substituim în sumă gradele vârfurilor grafului G din Figura 2.1.3 (a) și obținem:

$$\sum_{v\in V}\left(1+\deg(v)\right)^{-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_0(G)\geq 1\frac{3}{4}\Rightarrow \alpha_0(G)\geq 2.$$

Matricea de adiacentă a grafului G este prezentată în Figura 2.1.3 (b). Rezolvăm ecuația caracteristică:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 0 & 0\\ 1 & 0 & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$(-1)^{4+1}*1\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}*(-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$$

$$\lambda^4-3\lambda^2=0\Leftrightarrow\lambda^2(\lambda^2-3)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=-\sqrt{3},\lambda_4=+\sqrt{3},$$

$$p^0+\min\{p^-,p^+\}=2+1=3\Rightarrow\alpha_0(G)\leq 3.$$

2.2. Mulțime stabilă exterior

Definiția 2.2.1. *O submulțime de vârfuri A a grafului $G=(V,E)$ se numește **stabilă exterior**, dacă pentru orice vârf $v\in V\backslash A$ există cel puțin un vârf $u\in A$, astfel încât $u\sim v$.*

Cu alte cuvinte, mulțimea A este stabilă exterior, dacă orice vârf al grafului G aparține lui A sau aparține mulțimii $N(A)=\cup_{v\in A}N(v)$.

Mulțimea stabilă exterior se mai numește și *mulțime dominantă*. Fie v un vârf care face parte dintr-o mulțime dominantă a grafului G. Se spune că v *domină* vârfurile mulțimii $N[v]$. La rândul său, se spune că vârfurile mulțimii $N[v]$ sunt dominate de vârful v. Submulțimea de vârfuri a unui graf, care este atât stabilă exterior, cât şi stabilă interior, se numeşte *nucleu* al acestui graf.

Definiția 2.2.2. *O submulțime stabilă exterior A se numește **minimală**, dacă în G nu există o altă mulțime stabilă exterior B, astfel încât $B\subset A$.*

Definiția 2.2.3. *O submulțime stabilă exterior A se numește **minimă**, dacă pentru orice mulțime stabilă exterior B a grafului G are loc relația: $|A|\leq|B|$.*

Definiția 2.2.4. *Cardinalul mulțimii stabile exterior minime a grafului G se notează prin $\gamma(G)$ și se numește* ***număr de stabilitate externă.***

Toate vârfurile grafului formează mulțimea stabilă exterior. Așadar, pentru orice graf $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 1$, are loc relația $1 \leq \gamma(G) \leq n$.

Pentru graful G din Figura 2.2.1, mulțimile $A_1 = \{v_1, v_6, v_{11}\}$, $A_2 = \{v_2, v_5, v_7, v_{10}\}$ sunt stabile exterior minimale, iar A_1 este și stabilă exterior minimă. Prin urmare, $\gamma(G) = |A_1| = 3$.

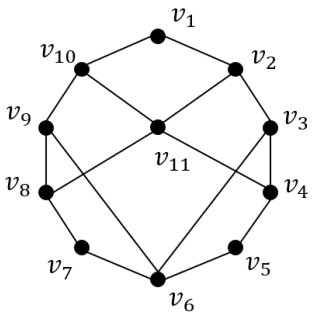


Figura 2.2.1. *Graful G pentru care $\gamma(G) = 3$*

Teorema 2.2.1. *Fie S o mulțime stabilă exterior a grafului G. Atunci S este stabilă exterior minimală dacă și numai dacă pentru orice vârf $u \in S$ se îndeplinește una din următoarele două condiții:*

1) *u este un vârf izolat în $G[S]$;*
2) *există un vârf $v \in V \backslash S$, astfel încât u este singurul vârf din S adiacent cu v.*

Demonstrație. Să presupunem că S este mulțimea stabilă exterior minimală. Atunci pentru orice vârf $u \in S$, mulțimea $S \backslash \{u\}$ nu este stabilă exterior, ceea ce înseamnă că există un vârf $v \in V \backslash (S \backslash \{u\})$ care nu este dominat de niciun vârf din $S \backslash \{u\}$. Dacă $v = u$, atunci vârful v este izolat în $G[S]$ și, prin urmare, se îndeplinește condiția 1). Dacă $v \neq u$, cum mulțimea S este stabilă exterior, are loc condiția 2).

Presupunem acum că mulțimea S nu este stabilă exterior minimală. Atunci există un vârf $u \in S$ pentru care mulțimea $S \backslash \{u\}$ rămâne a fi stabilă exterior. Aceasta înseamnă că u este adiacent cu anumite vârfuri din $S \backslash \{u\}$ și deci u nu este izolat în $G[S]$. Mai mult, dacă v este un vârf arbitrar din mulțimea $V \backslash S$, atunci v este adiacent cu oarecare vârfuri din $S \backslash \{u\}$. În consecința, condițiile 1) și 2) nu se îndeplinesc. □

Definiția 2.2.5. *Fie S o mulțime stabilă exterior a grafului G și $u \in S$. Mulțimea vârfurilor dominate de u și nedominate de vârfurile mulțimii $S\backslash\{u\}$ se numește* ***vecinătatea privată a vârfului*** *u* ***relativă la*** *S.*

Vecinătatea privată a vârfului u relativă la S se notează prin $P_N(u,S)$ și este egală cu $P_N(u,S) = N[u]\backslash\left(\bigcup_{v\in S\backslash\{u\}} N[v]\right)$. Trebuie de menționat că $u \in P_N(u,S)$ dacă și numai dacă u este un vârf izolat în $G[S]$.

Teorema 2.2.1 poate fi acum reformulată după cum urmează:

Teorema 2.2.2. *O mulțime stabilă exterior S este minimală în G dacă și numai dacă $P_N(u,S) \neq \emptyset$ pentru orice $u \in S$.*

Consecința 2.2.1. *Fie $G = (V,E)$ un graf ce nu conține vârfuri izolate. Dacă S este mulțimea stabilă exterior minimală în G, atunci mulțimea $V\backslash S$ este stabilă exterior în G.*

Demonstrație. Deoarece mulțimea S este stabilă exterior minimală în graful G, conform Teoremei 2.2.2, $P_N(u,S) \neq \emptyset$ pentru orice $u \in S$. Aceasta înseamnă că pentru orice $u \in S$ există un vârf $v \in V\backslash S$ care îl domină. Așadar, mulțimea $V\backslash S$ este stabilă exterior în G. □

Consecința 2.2.2. *Pentru orice graf $G = (V,E)$ de ordin $n \geq 2$, $\delta(G) \geq 1$, are loc relația $\gamma(G) \leq n/2$.*

Demonstrație. Cum $\delta(G) \geq 1$, G nu conține vârfuri izolate. Fie S este mulțimea stabilă exterior minimală a grafului G. În virtutea Consecinței 2.2.1, mulțimea $V\backslash S$ este stabilă exterior în G. Cu siguranță, mulțimea S sau $V\backslash S$ conține nu mai mult de $n/2$ vârfuri. □

Teorema 2.2.3. *Orice mulțime stabilă interior maximală este și stabilă exterior minimală.*

Demonstrație. Fie S este mulțimea stabilă interior maximală a grafului $G = (V,E)$. Atunci, mulțimea S este stabilă exterior, deoarece în caz contrar, există așa un vârf $v \in V\backslash S$ care nu e adiacent cu niciun vârf din S, ceea ce înseamnă că mulțimea $S' = S \cup \{v\}$ este stabilă interior și $S \subset S'$. Din contradicția obținută rezultă că mulțimea S este stabilă exterior. Fie că S nu este minimală, atunci există un vârf $u \in S$, la eliminarea căruia se obține mulțimea stabilă exterior $S'' = S\backslash\{u\}$, ceea ce înseamnă că u este adiacent cu cel puțin un vârf din S, însă aceasta vine în contradicție cu faptul că mulțimea S este stabilă interior. □

Ca și în cazul mulțimii stabile interior maxime, problema determinării valorii numărului $\gamma(G)$ este o problemă dificilă. În continuare, vom prezenta câteva rezultate ce țin de estimarea inferioară și superioară a numărului de stabilitate externă.

Teorema 2.2.4. *Pentru orice graf G de ordin n, se îndeplinesc relațiile:*

$$\frac{n}{1+\Delta(G)} \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

Demonstrație. Din definiția mulțimii stabile exterior se deduce că orice vârf v din G domină $1 + \deg(v)$ vârfuri. Dacă vârful v este ales astfel încât $\deg(v) = \Delta(G)$, atunci v domină $1 + \Delta(G)$ vârfuri, adică v domină toate vârfurile grafului G, cu excepția a $n - \big(1 + \Delta(G)\big)$ vârfuri. Deoarece fiecare din cele $n - \big(1 + \Delta(G)\big)$ vârfuri nu este dominat de v, există mulțime stabilă exterior de cardinal $n - \big(1 + \Delta(G)\big) + 1 = n - \Delta(G)$. Deci, avem $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

Fie $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este mulțimea stabilă exterior minimă a lui G. Întrucât v_i domină $1 + \deg(v_i)$ vârfuri în G pentru orice i, $1 \leq i \leq k$, și vârfurile mulțimii S domină toate vârfurile grafului G, obținem:

$$\sum_{i=1}^{k} \big(1 + \deg(v_i)\big) \geq n.$$

Întrucât $1 + \deg(v_i) \leq 1 + \Delta(G)$ pentru orice $1 \leq i \leq k$, avem:

$$n \leq \sum_{i=1}^{k} \big(1 + \deg(v_i)\big) \leq k\,\big(1 + \Delta(G)\big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ n \leq k\big(1 + \Delta(G)\big).$$

Deoarece $\gamma(G) = k$, rezultă că

$$\gamma(G) \geq \frac{n}{1+\Delta(G)}.$$

Teorema este demonstrată. □

Teorema 2.2.5. *Pentru orice graf conex $G = (V, E)$, are loc relația:*

$$\gamma(G) \geq \frac{D(G)+1}{3}.$$

Demonstrație. Fie u și v două vârfuri din G pentru care $d(u,v) = D(G)$ și fie L un lanț de lungime $d(u,v)$ care leagă vârfurile u și v. Fie S este mulțimea stabilă exterior a grafului G. Vom arăta că orice vârf din S domină cel mult trei vârfuri din L. Fie w un vârf din S. Dacă w aparține lanțului L, atunci w domină cel mult trei vârfuri din L: w și cel mult două vârfuri adiacente cu w. Dacă w nu aparține lanțului L, atunci, la fel, w domină cel mult trei vârfuri, care trebuie să fie amplasate consecutiv în L, în caz contrar, există un lanț de lungime mai scurtă decât L care leagă u și v. Ca rezultat, orice vârf din S domină cel mult trei vârfuri din L. Deoarece numărul de vârfuri în L este $D(G)+1$, obținem $\gamma(G) \geq \frac{D(G)+1}{3}$. □

2.3. Acoperire de vârfuri. Clică

Fie $e = (u,v)$ o muchie a grafului $G = (V,E)$. Se spune că vârfurile u și v acoperă muchia e, și invers, muchia e acoperă vârfurile v și u.

Definiția 2.3.1. *Submulțimea de vârfuri $S \subseteq V$ se numește* ***acoperire de vârfuri*** *a grafului $G = (V,E)$, dacă fiecare muchie din G este acoperită cel puțin de un vârf din S.*

Se observă că orice acoperire de vârfuri a unui graf conex este şi mulţime stabilă exterior. Afirmaţia inversă însă nu este adevărată.

Ca și în cazul mulțimilor stabile exterior, vom defini acoperire de vârfuri *minimală* și *minimă.* O acoperire de vârfuri se numeşte *minimală,* dacă orice submulțime proprie a sa nu formează acoperire de vârfuri. Acoperirea de vârfuri cu un număr minim de elemente se numește acoperire *minimă.* Cardinalul mulțimii de vârfuri ce formează o acoperire minimă a grafului G se notează prin $\beta_0(G)$.

Pentru graful G din Figura 2.3.1, mulțimile $S_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ și $S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}$ sunt acoperiri de vârfuri minimale, iar S_2 este și acoperire de vârfuri minimă. Pentru G avem $\beta_0(G) = |S_2| = 3$.

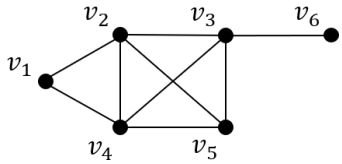


Figura 2.3.1. *Graful G pentru care $\beta_0(G) = 3$ și $\varphi(G) = 4$*

Teorema 2.3.1. *Submulțimea de vârfuri $S \subseteq V$ este stabilă interior în graful G dacă și numai dacă mulțimea $V \backslash S$ este o acoperire de vârfuri în $G = (V, E)$.*

Demonstrație. Submulțimea S este stabilă interior dacă și numai dacă ea nu conține vârfuri adiacente. Astfel, orice muchie din G este incidentă cu cel puțin un vârf din $V \backslash S$. Acest lucru se produce, dacă $V \backslash S$ formează o acoperire de vârfuri a grafului G. □

Consecința 2.3.1. *Pentru orice graf G, are loc relația:*

$$\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n.$$

Demonstrație. Fie S este mulțimea stabilă interior maximă a grafului G. Conform Teoremei 2.3.1, mulțimea $V \backslash S$ este acoperire de vârfuri în G și, prin urmare, $|V \backslash S| = n - \alpha_0(G) \geq \beta_0(G)$. De asemenea, fie W este acoperirea minimă de vârfuri a lui G. Atunci $V \backslash W$ este mulțimea stabilă interior și $|V \backslash W| = n - \beta_0(G) \leq \alpha_0(G)$. Aceste două inegalități împreuna implică egalitatea $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = n$. □

Definiția 2.3.2. *O submulțime de vârfuri $S \subseteq V$ a unui graf $G = (V, E)$ se numește **clică**, dacă oricare două vârfuri din S sunt adiacente.*

Conform acestei definiţii, dacă S este o clică a grafului G, atunci ea generează în G un subgraf complet. Prin analogie cu mulțimea stabilă interior, ușor se definește clica *maximală* și cea *maximă*.

Definiția 2.3.3. *Cardinalul clicii maxime a lui G se notează prin $\varphi(G)$ şi se numeşte **densitatea** grafului G.*

Orice vârf sau muchie a grafului este o clică. Evident, pentru orice graf $G = (V, E)$, $|V| = n \geq 1$, are loc relația $1 \leq \varphi(G) \leq n$.

De exemplu, mulțimile de vârfuri $S_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$, $S_2 = \{v_3, v_6\}$ și $S_3 = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ formează clici maximale în graful G din Figura 2.3.1. Pe lângă aceasta, clica S_3 este maximă în G. De aceea, $\varphi(G) = |S_3| = 4$.

Din definiția noțiunilor de clică și mulțime stabilă interior se deduce următorul rezultat.

Teorema 2.3.2. *Submulțimea de vârfuri $S \subseteq V$ a grafului $G = (V, E)$ este clică (maximă, maximală) dacă şi numai dacă în graful complementar $\bar{G}$ submulțimea S este stabilă interior (maximă, maximală).*

Consecința 2.3.2. *Pentru orice graf G, are loc egalitatea $\varphi(G) = \alpha_0(\bar{G})$.*

2.4. Probleme și sarcini

1. Determinați mulțimea de vârfuri stabilă interior maximă, nucleul și acoperirea minimă de vârfuri pentru graful din Figura 2.4.1.

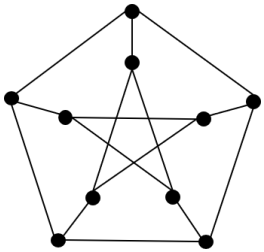


Figura 2.4.1. *Graful Petersen*

2. Construiți un graf în care orice mulțime de vârfuri stabilă exterior minimă nu este și stabilă interior.
3. Fie G un graf cu n vârfuri care conține mulțime stabilă interior formată din k vârfuri, $k \leq n$. Determinați numărul maxim de muchii ce pot aparține lui G.
4. Construiți un graf conex cu un număr par de vârfuri, pentru care $\gamma(G) = |V|/2$.
5. Determinați valoarea $\gamma(C_n), n \geq 3$.
6. Fie G un graf. Verificați inegalitatea $\alpha_0(G) \geq \gamma(G)$.
7. Demonstrați că pentru orice numere naturale k și n, $1 \leq k \leq n$, există un graf de ordin n, pentru care $\gamma(G) = k$.
8. Demonstrați că într-un graf bipartit G cu m muchii are loc inegalitatea $m \leq \alpha_0(G)\beta_0(G)$, care se transformă într-o egalitate dacă și numai dacă G este un graf bipartit complet.
9. Arătați că pentru graful G cu diametrul 2 ($D(G) = 2$), are loc relația $\gamma(G) \leq \delta(G)$.
10. Demonstrați că un graf G este bipartit dacă și numai dacă satisface următoarea proprietate: fiecare subgraf H al lui G conține o mulțime stabilă interior care are cel puțin jumătate de vârfuri din $V(H)$.

3. Cuplaje

3.1. Cuplaj. Acoperire de muchii

Întâi de toate, vom defini noțiunea de *cuplaj*.

Definiția 3.1.1. *O submulțime de muchii $M \subseteq E$ neadiacente două câte două se numește* ***cuplaj*** *al grafului $G = (V, E)$.*

Ca și în cazul mulțimilor de vârfuri stabile interior, se definesc noțiunile de cuplaj *maximal* și cuplaj *maxim*.

Definiția 3.1.2. *Cuplajul M se numește* ***maximal*** *în graful G, dacă nu există un alt cuplaj W în G, astfel încât $M \subset W$.*

Definiția 3.1.3. *Cuplajul M se numește* ***maxim*** *în graful G, dacă pentru orice cuplaj W din G are loc relația $|M| \geq |W|$.*

Cardinalul cuplajului maxim în graful G se notează prin $\alpha_1(G)$. O muchie arbitrară a grafului formează un cuplaj. De aceea, pentru orice graf G care conține cel puțin o muchie, are loc relația $1 \leq \alpha_1(G) \leq m$, unde $m = |E(G)|$.

De exemplu, pentru graful G din Figura 3.1.1, pot fi menționate câteva cuplaje:

$$M_1 = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_6, v_7)\}, M_2 = \{(v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_7, v_8)\},$$
$$M_3 = \{(v_2, v_6), (v_3, v_5)\}, M_4 = \{(v_1, v_4), (v_2, v_6), (v_3, v_5), (v_7, v_8)\}.$$

Cuplajul M_3 nu este maximal, fiindcă $M_3 \subset M_4$. Cuplajele M_1, M_2 și M_4 sunt maximale, iar M_4 este și maxim. Astfel, obținem relația:

$$\alpha_1(G) = |M_4| = 4.$$

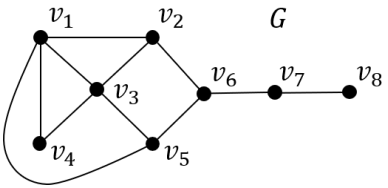


Figura 3.1.1. *Graf G pentru care $\alpha_1(G) = 4$*

Din definiția cuplajului, mulțimii stabile interior și a grafului muchiilor, rezultă următoarea propoziție.

Propoziția 3.1.1. *Orice cuplaj al grafului G este mulțime stabilă interior în graful $L(G)$ și deci are loc egalitatea $\alpha_1(G) = \alpha_0\big(L(G)\big)$.*

Astfel, cuplajele unui graf G pot fi studiate prin intermediul mulțimilor stabile interior ale grafului muchiilor $L(G)$.

O altă noțiune strâns legată de cuplaj este *acoperirea de muchii*.

Definiția 3.1.4. *O submulțime de muchii $P \subseteq E$ se numește* ***acoperire de muchii*** *a grafului $G = (V, E)$, dacă orice vârf din V este acoperit de cel puțin o muchie din P.*

În mod analog cu acoperirea de vârfuri, se definesc următoarele două noțiuni.

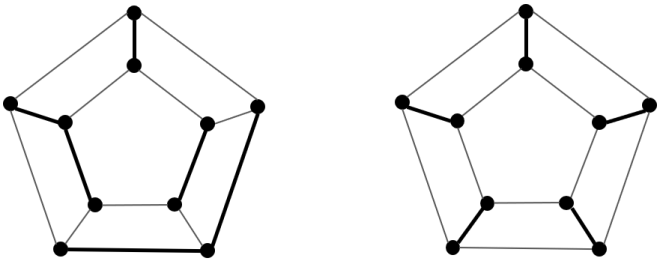
Definiția 3.1.5. *O acoperire de muchii se numeşte* ***minimală****, dacă orice submulțime proprie a sa nu este acoperire de muchii.*

Definiția 3.1.6. *Acoperirea de muchii cu un număr minim de elemente se numeşte* ***minimă****.*

Cardinalul acoperirii minime de muchii a grafului G se notează prin $\beta_1(G)$. În orice graf care nu conține vârfuri izolate, există o acoperire de muchii. În calitate de acoperire de muchii trivială poate servi mulţimea tuturor muchiilor grafului.

Definiția 3.1.7. *Cuplajul unui graf care este și o acoperire de muchii a acestui graf se numește* ***cuplaj perfect****.*

În Figura 3.1.2 (a) este prezentată o acoperire de muchii a grafului G, iar în Figura 3.1.2 (b) este prezentat un cuplaj perfect, care prin definiție este și o acoperire minimă de muchii a lui G. Deci, $\beta_1(G) = 5$.



(a) (b)

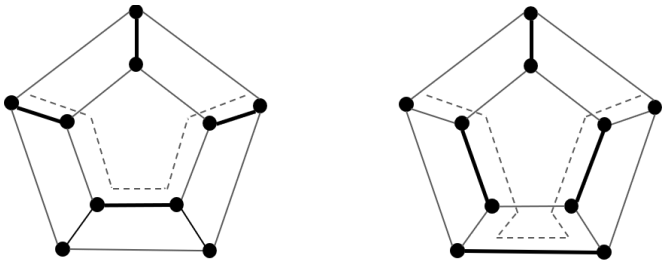
Figura 3.1.2. *Graf G pentru care $\beta_1(G) = 5$. Cu linia îngroșată sunt marcate acoperiri de muchii*

Din definiția cuplajului rezultă următoarea propoziție.

Propoziția 3.1.2. *Dacă G este un graf de ordin $n = 2k + 1$, atunci G nu conține un cuplaj perfect.*

Definiția 3.1.8. *Fie M un cuplaj al grafului $G = (V, E)$. Lanțul elementar ale cărui muchii aparțin alternativ mulțimilor M și $E \setminus M$ se numește* ***lanț alternant*** *în raport cu cuplajul M. Lanțul alternant ale cărui extremități nu sunt acoperite de cuplajul M se numește* ***lanț de majorare*** *în raport cu cuplajul M.*

Lanţurile de majorare sunt utilizate la studierea cuplajelor maxime în grafuri.



(a) (b)

Figura 3.1.3. *În* (a) *este prezentat un lanț alternant, iar în* (b) *un lanț de majorare. Cuplajele sunt marcate cu linia îngroșată, iar lanțurire alternante – cu linia întreruptă*

Este important următorul rezultat.

Teorema 3.1.1. (Berge) *Fie $G = (V, E)$ un graf pentru care $E \neq \emptyset$ și M este un cuplaj al acestuia. Atunci M este un cuplaj maxim dacă și numai dacă în G nu există niciun lanț de majorare în raport cu cuplajul M.*

Demonstrație. Pentru implicația directă, raționăm prin reducere la absurd. Fie M un cuplaj maxim și L un lanț de majorare în raport cu M. Observăm că în L numărul de muchii acoperite de cuplajul M este cu o unitate mai mic decât numărul de muchii neacoperite de M. Definim un nou cuplaj M' format din muchiile lanțului L neacoperite de M și din muchiile cuplajului M care nu aparțin lui L. Este clar că $|M'| = |M| + 1$. Am obținut o contradicție.

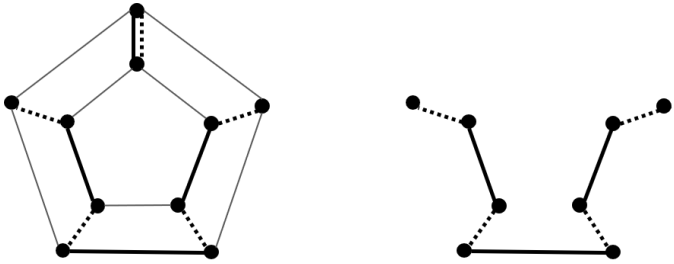


Figura 3.1.4. (a) *Cuplajele M* (*linia îngroșată*) *și M′* (*linia întreruptă*); (b) *diferența simetrică a cuplajelor M și M′*

Pentru implicația inversă, fie M un cuplaj pentru care nu există niciun lanț de majorare. Prin reducere la absurd presupunem că M nu este un cuplaj maxim. Fie M' un astfel de cuplaj maxim. Atunci în mod evident $|M'| > |M|$. Urmează să analizăm diferența simetrică a acestor două mulțimi $S = (M \backslash M') \cup (M' \backslash M)$ (Figura 3.1.4). Dat fiind faptul că fiecare vârf $v \in V$ poate fi incident maximum cu o muchie din M și maximum cu o muchie din M', gradul fiecărui vârf în subgraful H format din mulțimea de muchii S și mulțimea de vârfuri incidente muchiilor din S este mai mic decât trei. Prin urmare, fiecare componentă conexă a lui H reprezintă un lanț sau un ciclu în care muchiile din M alternează cu muchiile din M'. În cazul ciclului, alternanța muchiilor din M cu cele din M' înseamnă că lungimea oricărui ciclu din H este pară și numărul de muchii din M și M' în oricare ciclu este același. Combinând cele spuse cu relația $|M'| > |M|$ se obține existența în H a unui lanț a cărui primă și ultimă muchie aparțin lui M', adică extremitățile acestui lanț nu sunt acoperite de M. Un astfel de lanț nu este altceva decât un lanț de majorare în raport cu M. □

Următoarea teoremă stabilește relația dintre cardinalul cuplajului maxim și cardinalul acoperirii minime de muchii într-un graf G.

Teorema 3.1.2. *Pentru orice graf $G = (V, E)$ de ordin n care nu conține vârfuri izolate, are loc relația:*

$$\alpha_1(G) + \beta_1(G) = n.$$

Demonstrație. Notăm $\alpha_1(G)$ prin α_1 și $\beta_1(G)$ prin β_1. Vom demonstra în continuare următoarele două inegalități din care rezultă egalitatea cerută:

$$\alpha_1 + \beta_1 \leq n, \tag{3.1}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq n. \tag{3.2}$$

Vom demonstra mai întâi relația (3.1). Fie M este cuplajul maxim în G, $|M| = \alpha_1$ și V' mulțimea vârfurilor lui G neacoperite de muchiile din M. Evident, V' este o mulțime vidă sau este o mulțime stabilă interior și $|V'| = n - 2\alpha_1$, în caz contrar, cuplajul M n-ar fi maxim. Dacă V' nu este vidă, atunci pentru orice $v \in V'$ există cel puțin un vârf $u \in V \backslash V'$ astfel încât $u \sim v$, ceea ce rezultă din faptul că G nu conține vârfuri izolate. Pentru fiecare vârf $v \in V'$, alegem exact o muchie incidentă lui. Mulțimea de muchii astfel alese o notăm prin S, $|S| = |V'| = n - 2\alpha_1$. Dacă $V' = \emptyset$, atunci şi S este vidă. $S \cup M$ este o acoperire de muchii care nu este numaidecât minimă. Rezultă că

$$\beta_1 \leq |S \cup M| = n - 2\alpha_1 + \alpha_1 = n - \alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1 + \beta_1 \leq n.$$

În continuare, vom demonstra corectitudinea relației (3.2). Fie P este acoperirea minimă de muchii a lui G, $|P| = \beta_1$. Vom analiza subgraful G' format din mulțimea de vârfuri V și mulțimea de muchii P. Deoarece P este acoperire minimă, orice muchie din G' este incidentă cu un vârf de grad 1, adică fiecare componentă conexă a lui G' este o stea. Fie $t \geq 1$ este numărul de componente conexe în G' și k_i este numărul de muchii în steaua cu indicele i, $1 \leq i \leq t$. Observăm că într-o stea numărul de muchii este cu o unitate mai mic decât numărul de vârfuri. Alegem câte o muchie din fiecare componentă conexă a grafului G' și obținem un cuplaj al grafului inițial G care nu este numaidecât maxim. Deci $t \leq \alpha_1$. Deoarece în G' nu sunt vârfuri izolate, rezultă că

$$n = \sum_{i=1}^{t}(k_i + 1) = \sum_{i=1}^{t} k_i + t = |P| + t = \beta_1 + t \leq \beta_1 + \alpha_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geq n. \qquad \square$$

3.2. Cuplaje în grafuri bipartite

În cele ce urmează, vom efectua analiza cuplajelor în grafuri bipartite.

Teorema 3.2.1. (Hall) *În graful bipartit* $G = (V_1, V_2, E)$ *există un cuplaj care acoperă mulțimea* V_1 *dacă și numai dacă orice submulțime* $A \subseteq V_1$ *satisface relația* $|A| \leq |N(A)|$, *unde* $N(A) = \cup_{v \in A} N(v)$.

Demonstrație. Observăm că condiția necesară a teoremei este adevărată. Vom demonstra suficiența prin inducție matematică după numărul de vârfuri din V_1. Pentru $m = |V_1| = 1$ unicul vârf din V_1 este incident cu cel puțin o muchie, care și formează cuplajul necesar.

Fie $m > 1$ și afirmația teoremei este adevărată pentru orice graf bipartit cu $|V_1| < m$. Vom analiza două cazuri posibile.

1) Pentru orice submulțime $A \subseteq V_1$ are loc $|A| < |N(A)|$. În graful G alegem o muchie arbitrară $e = (u, v)$, $u \in V_1$ și $v \in V_2$. La eliminarea vârfurilor u și v din G se obține un graf bipartit nou $G' = (V_1', V_2', E')$ în care $|V_1'| = |V_1| - 1 < m$. Fie A' o submulțime arbitrară a mulțimii V_1'. Deoarece în graf G are loc $|A'| < |N(A')|$, iar din V_2 a fost eliminat doar un singur vârf, avem $|A'| \leq |N_{G'}(A')|$. Conform ipotezei inductive, în G' există un cuplaj M care acoperă mulțimea V_1'. Adăugând la M muchia e, se formează cuplajul grafului G care acoperă V_1.

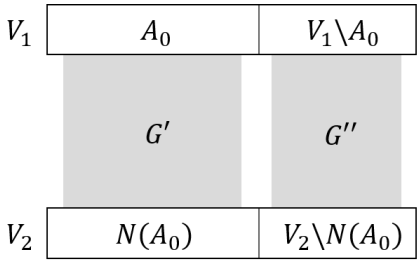


Figura 3.2.1

2) Fie că în mulțimea V_1 există o submulțime proprie A_0 pentru care $|A_0| = |N(A_0)|$. Notăm prin G' subgraful bipartit generat de mulțimile A_0 și $N(A_0)$ (Figura 3.2.1). Evident, pentru orice submulțime $A \subseteq A_0$, avem $N_G(A) = N_{G'}(A)$ și $|A| \leq |N_{G'}(A)|$. Notăm prin G'' subgraful bipartit generat de mulțimile $V_1 \backslash A_0$ și $V_2 \backslash N(A_0)$. Pentru orice submulțime $A' \subseteq V_1 \backslash A_0$, avem

$$|A_0|+|A'| = |A_0 \cup A'| \leq |N_G(A_0 \cup A')| = |N_G(A_0)|+|N_{G''}(A')| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow |A'| \leq |N_{G''}(A')|.$$

Conform presupunerii inductive, în G' există un cuplaj M' care acoperă A_0, iar în G'' există un cuplaj M'' care acoperă $V_1 \backslash A_0$. Concluzionăm că cuplajul $M' \cup M''$ acoperă mulțimea de vârfuri V_1 a grafului bipartit G. □

Consecința 3.2.1. *În orice graf bipartit regulat $G = (V_1, V_2, E)$ există un cuplaj perfect.*

Demonstrație. Fie $G = (V_1, V_2, E)$ un graf bipartit regulat și $\deg(v) = m$ pentru orice $v \in V_1 \cup V_2$. Atunci pentru submulțimea arbitrară $A \subseteq V_1$ numărul muchiilor incidente vârfurilor din A este egal cu $m|A|$. Deoarece gradele tuturor vârfurilor sunt egale cu m, avem $|N(A)| \geq \frac{m|A|}{m} = |A|$. În conformitate cu Teorema 3.2.1, în G există cuplaj care acoperă V_1. În orice graf bipartit regulat are loc $|V_1| = |V_2|$, de unde rezultă că orice cuplaj care acoperă mulțimea V_1 este perfect. □

Consecința 3.2.2. *Fie $G = (V_1, V_2, E)$ un graf bipartit și t un număr natural, $t \leq |V_1|$. În G există un cuplaj de cardinal t dacă și numai dacă orice submulțime $A \subseteq V_1$ satisface relația $|N(A)| \geq |A| + t - |V_1|$.*

Demonstrație. Construim un graf bipartit nou $G' = (V_1, V_2', E')$ prin adăugarea a $|V_1| - t$ vârfuri noi la mulțimea V_2 astfel încât fiecare vârf nou să fie adiacent cu toate vârfurile din V_1. Existența în G a unui cuplaj de cardinal t este echivalentă cu existența în G' a unui cuplaj care acoperă V_1, iar pentru aceasta, conform Teoremei 3.2.1, trebuie să fie satisfăcută relația $|A| \leq |N_{G'}(A)|$. Deci, avem

$$|A| \leq |N_{G'}(A)| = |N_G(A)| + |V_1| - t \Longrightarrow |N_G(A)| \geq |A| + t - |V_1|.$$

Consecința este demonstrată. □

Teorema 3.2.2. *Pentru orice graf bipartit G, este adevărată egalitatea $\alpha_1(G) = \beta_0(G)$.*

Demonstrație. Fie M un cuplaj maxim al grafului bipartit $G = (V_1, V_2, E)$. Deoarece orice acoperire de vârfuri a grafului G conține cel puțin câte un vârf incident cu fiecare muchie din M și oricare două muchii din M nu sunt adiacente, se obține $\alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$. Urmează să arătăm că pentru orice acoperire minimă de vârfuri B a lui G există un cuplaj de cardinal $|B|$.

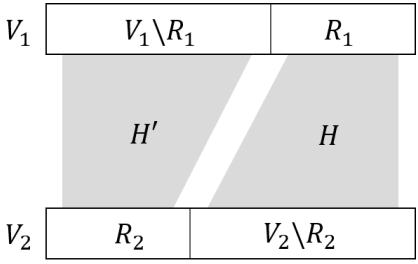


Figura 3.2.2

Fie $R_1 = B \cap V_1$ și $R_2 = B \cap V_2$. Fie H și H' două subgrafuri ale lui G induse de mulțimile de vârfuri $R_1 \cup (V_2\backslash R_2)$ și $R_2 \cup (V_1\backslash R_1)$ (Figura 3.2.2). Deoarece reuniunea $R_1 \cup R_2$ formează acoperirea de vârfuri, graful G nu conține muchii între mulțimile $V_1\backslash R_1$ și $V_2\backslash R_2$. Fie $S \subseteq R_1$ și deci $N_H(S) \subseteq V_2\backslash R_2$. Dacă $|N_H(S)| < |S|$, atunci substituind S cu $N_H(S)$ în B obținem o acoperire de vârfuri B' pentru care $|B'| < |B|$, adică obținem contradicție cu faptul că B este acoperire minimă de vârfuri. De aici, având în vedere Teorema 3.2.1, în H există un cuplaj M_H care acoperă R_1. Aplicând același raționament pentru H', obținem existența în H' a unui cuplaj $M_{H'}$ în H' care acoperă R_2. Întrucât $H \cap H' = \emptyset$, avem $|M_H \cup M_{H'}| = |B|$. □

3.3. Cuplaje în grafuri arbitrare

În paragraful precedent au fost studiate cuplaje în grafuri bipartite. Urmează să prezentăm câteva rezultate importante cu referire la cuplaje pentru grafuri arbitrare.

Vom nota prin $q(G)$ numărul de componente conexe cu un număr impar de vârfuri ale grafului G. Următoarea teoremă este prezentată fără demonstrație.

Teorema 3.3.1. (Tutte) *În graf $G = (V, E)$ există un cuplaj perfect dacă și numai dacă $q(G - S) \leq |S|$ pentru orice $S \subseteq V$.*

Teorema 3.3.2. (Petersen) *În orice graf conex* 3*-regulat (cubic), care nu conține istmuri, există un cuplaj perfect.*

Demonstrație. Fie $G = (V, E)$ un graf 3-regulat, ce nu conține istmuri, și $S \subset V$. Vom nota prin $G_1, G_2, \dots, G_q$ componentele conexe cu un număr

impar de vârfuri ale grafului $G - S$. Fie m_i este numărul de muchii cu o extremitate în G_i și cu cealaltă în S, $1 \leq i \leq q$. Deoarece graful G este 3-regulat, avem

$$\sum_{v \in V(G_i)} \deg_G(v) = 3|V(G_i)| \quad \text{și} \quad \sum_{v \in S} \deg_G(v) = 3|S|.$$

Din prima relație rezultă că

$$m_i = \sum_{v \in V(G_i)} \deg_G(v) - 2|E(G_i)|$$

este un număr impar. Prin urmare, în virtutea faptului că G nu conține istmuri, $m_i \geq 3$ pentru orice i, $1 \leq i \leq q$. Așadar, numărul de componente conexe ale lui $G - S$ cu un număr impar de vârfuri satisface relația

$$q \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{q} m_i \leq \frac{1}{3}\sum_{v \in S} \deg_G(v) = |S|.$$

Astfel, conform Teoremei 3.3.1, în G există un cuplaj perfect. □

Într-un graf cubic care conține istmuri poate să nu existe un cuplaj perfect (Figura 3.3.1 (a)). Pe de altă parte, într-un graf cubic care conține istmuri, poate exista un cuplaj perfect (Figura 3.3.1 (b)).

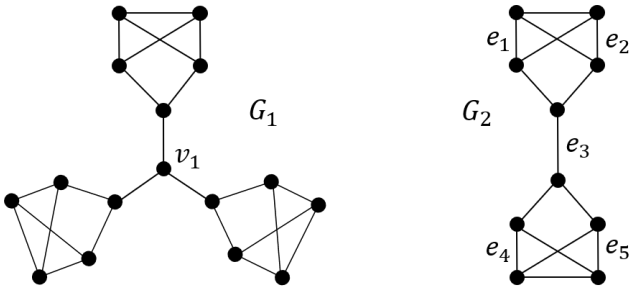


Figura 3.3.1. *În G_1 pentru mulțimea $S = \{v_1\}$, avem $q(G_1 - S) = 3 > 1 = |S|$. În G_2, mulțimea $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ formează un cuplaj perfect, iar e_3 este un istm*

Teorema 3.3.3. (Berge) *Pentru orice graf G de ordin n, este adevărată relația:*

$$\alpha_1(G) = \frac{n - max\{q(G - S) - |S| : S \subseteq V(G)\}}{2}.$$

Demonstrație. Fie $t = max\{q(G - S) - |S| : S \subseteq V(G)\}$. Este limpede că cel mult $n - t$ vârfuri pot fi acoperite de muchiile cuplajului maxim în G. Pentru a arăta că această estimare poate fi atinsă, vom folosi un graf nou $H = G + K_t$. Fie $S' \subseteq V(H)$. Dacă $S' = \emptyset$, atunci $q(H - S') \leq |S'|$, deoarece H conține un număr par de vârfuri, ceea ce rezultă din faptul că t are aceeași paritate ca și $|V(G)|$. Dacă $S' \neq \emptyset$ și S' nu include $V(K_t)$, atunci $H - S'$ constă dintr-o singură componentă conexă și $1 \leq |S'|$. În final, dacă $V(K_t) \subseteq S'$, atunci notăm $S = S' \cap V(G)$. Obținem $H - S' = G - S$ și $q(H - S') = q(G - S) \leq |S| + t = |S'|$. Conform Teoremei 3.3.1, în H există un cuplaj perfect M. Ca rezultat al eliminării muchiilor din M care au o extremitate în $V(K_t)$, se obține un cuplaj M' al grafului G care nu acoperă cel mult t vârfuri. Așadar, are loc relația $|M'| \geq \frac{n-t}{2}$. □

3.4. Probleme și sarcini

1. Determinați cuplajul maxim și acoperirea de muchii minimă a grafului din Figura 3.4.1.

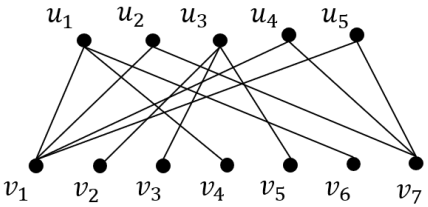


Figura 3.4.1

2. Demonstrați sau respingeți printr-un exemplu concret afirmația: orice cuplaj al grafului se conține într-un cuplaj maxim.
3. Determinați numărul cuplajelor perfecte ale arborelui T cu n vârfuri.
4. Determinați numărul cuplajelor perfecte ale grafului complet K_{2n}.
5. Fie într-un graf bipartit $G = (V_1, V_2, E)$ gradul oricărui vârf din V_1 nu este mai mic decât gradul oricărui vârf din V_2. Arătați că în G există un cuplaj care acoperă mulțimea V_1.
6. Verificați dacă pentru orice graf bipartit *k*-regulat există cuplajul perfect.

4. Conexitatea

4.1. Grafuri conexe. Componente conexe

Conform Definiției 1.3.7, un graf G pentru oricare două vârfuri ale căruia există un lanț ce le leagă se numește graf *conex*. În caz contrar, G este un graf *neconex*. La fel, se cunoaște că o *componentă conexă* a grafului G este un subgraf maximal conex al lui G.

Definiția 4.1.1. *O submulțime de vârfuri $S \subset V$ se numește* ***mulțime de separare*** *a grafului $G = (V, E)$ dacă la eliminarea ei din G se obține un graf nou cu mai multe componente conexe. Mulțimea de separare a grafului se mai numește* ***mulțime de articulație****.*

Dacă S este o mulțime de separate a grafului G și $S = \{v\}$, atunci v se numește *vârf de articulație (inflexiune)* al lui G. O muchie la eliminarea căreia se obține un graf cu mai multe conexe se numește *istm* sau *punte*. Evident, dacă e este un istm al unui graf cu $n \geq 3$ vârfuri, atunci cel puțin una dintre extremitățile sale este vârf de articulație.

Definiția 4.1.2. *Numărul minim de vârfuri la eliminarea cărora din graful G se obține un graf neconex sau graful trivial K_1 se numește* ***număr de conexitate după vârfuri*** *și se notează prin $k(G)$.*

Definiția 4.1.3. *Numărul minim de muchii la eliminarea cărora din graful G se obține un graf neconex se numește* ***număr de conexitate după muchii*** *și se notează prin $\lambda(G)$.*

De exemplu, mulțimea $S = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ este o mulțime de separare a grafului G_1 din Figura 4.1.1 (a). Pentru acest graf, avem $k(G_1) = 2$ și

$\lambda(G_1) = 3$. Vârfurile v_2, v_3, v_5 ale grafului G_2 din Figura 4.1.1 (b) sunt vârfuri de articulație, iar muchiile $(v_2, v_4), (v_3, v_5), (v_5, v_6), (v_5, v_7)$ sunt istmuri.

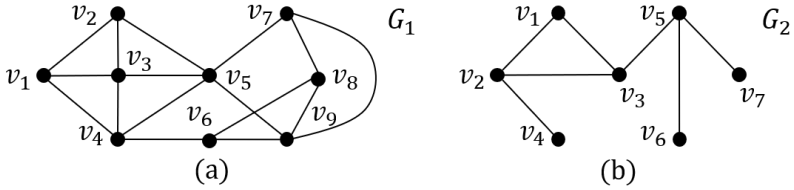


Figura 4.1.1. (a) *Graf G_1 pentru care $k(G_1) = 2$ și $\lambda(G_1) = 3$;*
(b) *graf G_2 cu 3 vârfuri de articulație și 4 istmuri*

Teorema 4.1.1. *Pentru orice graf conex G, diferit de graful trivial, sunt adevărate relațiile:*

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

Demonstrație. Evident că $\lambda(G) \leq \delta(G)$, deoarece la eliminarea tuturor muchiilor incidente unui vârf de grad $\delta(G)$, se obține un graf neconex. Rămâne să arătăm că $k(G) \leq \lambda(G)$.

Dacă G nu este conex sau conține un istm, atunci $k(G) = \lambda(G)$. Fie G un garf conex care nu conține istmuri. Să notăm prin S mulțimea muchiilor de cardinalul $\lambda(G)$ la eliminarea cărora se obține un graf neconex. Notăm prin S' o submulțime lui S pentru care $|S'| = \lambda(G) - 1$. Se observă că graful ce se obține din G la eliminarea mulțimii de muchii S' este conex și conține un istm $e = (u, v)$. Pentru fiecare muchie din S', selectăm o extremitate a ei diferită de vârfurile u și v. La eliminarea vărfurilor selectate din G, totodată se vor elimina şi toate muchiile din S'. Dacă graful rezultat nu este conex, atunci $k(G) \leq \lambda(G) - 1$. În caz contrar, dacă graful rezultat rămâne conex, atunci în urma eliminării vârfului u sau v se va genera un graf neconex sau un graf trivial. Prin urmare, rezultă relația $k(G) \leq \lambda(G)$. □

Teorema 4.1.2. *Pentru orice trei numere naturale p, q, r, care satisfac relația $p \leq q \leq r$, există un graf G pentru care $k(G) = p$, $\lambda(G) = q$ și $\delta(G) = r$.*

Demonstrație. Definim un graf $G = (V, E)$ de ordinul $2(r + 1)$, mulțimea vârfurilor căruia este $V = V_1 \cup V_2$, $V_i = \{v_1^i, \dots, v_{r+1}^i\}$, $i = \overline{1,2}$. Mulțimea E conține muchiile (v_k^i, v_l^i), $i = \overline{1,2}$, $k, l = \overline{1, r+1}$, $k \neq l$. Astfel

mulțimile V_1 și V_2 sunt clici în G. Mulțimea E conține și toate muchiile de tipul (v_k^1, v_k^2), $k = \overline{1,p}$, și de tipul (v_p^1, v_{p+k}^2), $k = \overline{1,q-p}$. Structura grafului obținut este prezentată în Figura 4.1.2. Ușor ne putem convinge că graful construit posedă proprietățile necesare: $k(G) = p$, $\lambda(G) = q$ și $\delta(G) = r$. □

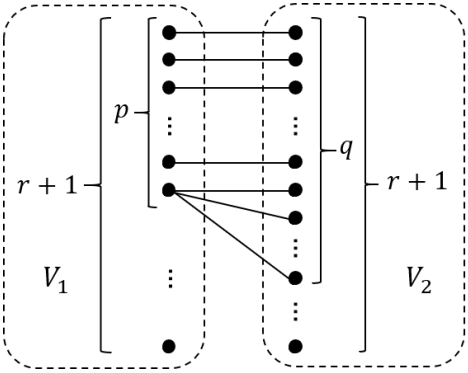


Figura 4.1.2. *Graf G pentru care* $k(G) = p$, $\lambda(G) = q$ *și* $\delta(G) = r$

Definiția 4.1.4. *Un graf G se numește* ***k-conex****, dacă se îndeplinește relația* $k(G) \geq k$.

De exemplu, graful G_1 din Figura 4.1.1 (a), pentru care $k(G) = 2$, este 1-conex și 2-conex.

Definiția 4.1.5. *Un subgraf maximal* ***k-conex*** *al grafului G se numește* ***componentă k-conexă*** *a lui G*.

Subgraful lui G_1 din Figura 4.1.1 (a) indus de mulțimea de vârfuri $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ reprezintă componentă 3-conexă a lui G_1.

Teorema 4.1.3. *Oricare două componente k-conexe diferite ale grafului conțin cel mult* $k - 1$ *vârfuri comune.*

Demonstrație. Fie $G_1 = (V_1, E_1)$ și $G_2 = (V_2, E_2)$ două componente k-conexe diferite ale grafului G și $V_0 = V_1 \cap V_2$. Presupunem contrariul, adică $|V_0| \geq k$. Vom demonstra în continuare că în acest caz graful $G_1 \cup G_2$ este k-conex.

Alegem o submulțime arbitrară de vârfuri $S \subseteq V_1 \cup V_2$ astfel încât $|S| = k - 1$. Notăm $S_1 = (V_1 \backslash V_0) \cap S$, $S_2 = (V_2 \backslash V_0) \cap S$ și $S_0 = V_0 \cap S$ (Figura 4.1.3). Deoarece $|S_1 \cup S_0| \leq k - 1$, $|S_2 \cup S_0| \leq k - 1$ și G_1, G_2

sunt două grafuri k-conexe, rezultă că $H_1 = G_1 - (S_1 \cup S_0)$ și $H_2 = G_2 - (S_2 \cup S_0)$ sunt grafuri conexe.

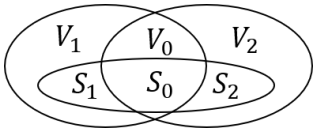


Figura 4.1.3

Ținând cont de presupunerea $|V_0| \geq k$, se constată că H_1 și H_2 au cel puțin un vârf comun. Astfel, reuniunea grafurilor H_1 și H_2 formează un graf conex, ceea ce contrazice faptul că G_1 și G_2 sunt componente k-conexe. □

4.2. Grafuri 2-conexe

Mai întâi vom prezenta câteva rezultate care pot fi ușor verificate.

Propoziția 4.2.1. *Gradul oricărui vârf al grafului 2-conex este mai mare decât unu.*

Propoziția 4.2.2. *Dacă grafurile G_1 şi G_2 sunt 2-conexe şi au cel puţin două vârfuri comune, atunci graful $G_1 \cup G_2$ la fel este 2-conex.*

Propoziția 4.2.3. *Dacă G este un graf 2-conex şi L este un lanţ elementar extremităţile căruia aparţin lui G, atunci $G \cup L$ este un graf 2-conex.*

Propoziția 4.2.4. *Într-un graf 2-conex pentru orice trei vârfuri distincte u, v, w există un lanț elementar care leagă vârfurile u, v și nu trece prin vârful w.*

Teorema 4.2.1. *Pentru orice graf conex $G = (V, E)$ de ordin $n \geq 2$, sunt echivalente următoarele afirmații:*

1) *G este un graf 2-conex;*
2) *orice două vârfuri ale grafului G aparţin unui ciclu elementar;*
3) *orice vârf şi orice muchie ale lui G aparţin unui ciclu elementar;*
4) *orice două muchii ale lui G aparţin unui ciclu elementar;*
5) *pentru orice două vârfuri u, v şi orice muchie e a grafului G, există un lanț elementar ce leagă vârfurile u, v și trece prin muchia e;*
6) *pentru orice trei vârfuri u, v și w, există un lanț elementar cu extremitățile în u și v care conține al treilea vârf w.*

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm șirul de implicații:

$$1) \Rightarrow 2),\ 2) \Rightarrow 3),\ 3) \Rightarrow 4),\ 4) \Rightarrow 5),\ 5) \Rightarrow 6),\ 6) \Rightarrow 1).$$

$1) \Rightarrow 2)$. $G = (V, E)$ este un graf 2-conex şi u, v două vârfuri arbitrare ale lui G. Din Propoziția 4.2.1, avem $\deg(u) \geq 2$, ceea ce înseamnă că există două vârfuri x și y adiacente cu u. Conform Propoziției 4.2.4, în G există un lanț elementar L care leagă vârfurile x, y și nu trece prin u. Ciclul elementar care conține vârful u poate fi obținut prin reuniunea lanțului L cu muchiile (u, x) și (u, y). Notăm prin C_u mulțimea tuturor ciclurilor elementare care conțin vârful u. Dacă vârful v aparține unui ciclu din C_u, atunci implicația $1) \Rightarrow 2)$ este demonstrată.

Presupunem că în C_u nu există cicluri care ar conține v. Vom diviza în acest caz V în două submulțimi: V_u – mulțimea vârfurilor ce aparțin ciclurilor din C_u și $V_u' = V \backslash V_u$. Deoarece G este conex, în G există două vârfuri adiacente z și t, astfel încât $z \in V_u$ și $t \in V_u'$. Fie $C_{u,z}$ un ciclu elementar care conține u și z. Conform Propoziției 4.2.4, există un lanț elementar $L_{t,u}$ cu extremitățile în t și u care nu conține z. Fie că w este primul vârf al lui $L_{t,u}$, socotit de la t spre u, care aparține ciclului $C_{u,z}$. Acum ușor putem construi ciclul elementar $C_{u,t}$ care se obține ca rezultat al reuniunii lanțului $L_{w,z}$, ce trece prin u și este parte componentă a ciclului $C_{u,z}$, cu muchia (z, t) şi cu lanțul $L_{t,w}$ care este parte componentă a lanțului $L_{t,u}$ (Figura 4.2.1). Așadar, am obținut contradicție cu faptul că $t \in V_u'$. Prin urmare, $V_u' = \emptyset$ și vârfurile u și v aparțin unui ciclu elementar.

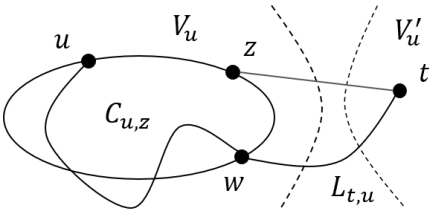


Figura 4.2.1

$2) \Rightarrow 3)$. Fie u un vârf și $e = (v, w)$ o muchie a grafului G. Conform afirmației 2) din teoremă, în G există un ciclu elementar $C_{u,v}$ care trece prin vârfurile u şi v. Este clar că dacă acest ciclu conține muchia e sau vârful w, atunci implicația $2) \Rightarrow 3)$ are loc. Să admitem că muchia e și vârful w nu se conțin în $C_{u,v}$. Ținând cont de afirmația 2) din teoremă, există un

ciclu elementar $C_{u,w}$ care trece prin u și w. Un ciclu elementar care conține vârful u și muchia e se obține în urma reuniunii lanțului $L_{u,v}$, ce pornește din vârful u și este parte componentă a ciclului $C_{u,v}$, cu muchia e și cu lanțul $L_{w,u}$, care este partea componentă a ciclului $C_{u,w}$.

3) $\Longrightarrow$ 4). Fie $e_1 = (u, v)$ și $e_2 = (x, y)$ două muchii ale grafului G. Conform afirmației 3) din teoremă, există cicluri elementare C_1 și C_2, astfel încât C_1 conține muchia e_1 și vârful x, iar C_2 conține muchia e_1 și vârful y. Deci, în mod similar cu cazurile precedente poate fi construit un ciclu care conține ambele muchii e_1 și e_2.

4) $\Longrightarrow$ 5). Fie u, v două vârfuri și $e = (x, y)$ o muchie a lui G. Fiind conex, graful G conține un lanț elementar $L_{u,v}$ cu extremitățile în u și v. În baza afirmației 4) din teoremă, în G există un ciclu elementar C care conține muchiile e și (u, w), unde $w \in L_{u,v}$ și $u \sim w$. Ușor se observă că în reuniunea ciclului C cu lanțul $L_{u,v}$ există lanțul căutat.

5) $\Longrightarrow$ 6). Fie $u, v, w \in V$ și $e = (w, t)$ este o muchie a grafului G. Având în vedere afirmația 5) din teoremă, în graful G există un lanț elementar cu extremitățile u, v care trece prin muchia e și ca rezultat trece prin vârful w.

6) $\Longrightarrow$ 1). Fie $u \in V$. Vom arăta că graful $G - u$ este conex, i.e. pentru orice pereche de vârfuri v și w există un lanț ce le leagă. Conform afirmației 6) din teoremă, în G există un lanț $L_{u,w}$ ce trece prin v. Evident, acest lanț conține un sublanț $L_{v,w}$ ce nu trece prin u, ceea ce înseamnă că $G - u$ este conex. □

4.3. Teorema lui Mengher

Teorema lui Mengher reprezintă unul din rezultatele clasice ale teoriei grafurilor care stabilește o legătură directă între conexitatea grafurilor și noțiunea de separabilitate a vârfurilor în graf prin intermediul lanțurilor disjuncte.

Definiția 4.3.1. *Într-un graf G două lanțuri se numesc **disjuncte**, dacă acestea nu conțin vârfuri comune decât la extremitățile sale.*

Fie u și v două vârfuri ale grafului G. O familie de lanțuri cu extremitățile în vârfurile u și v se numește *disjunctă*, dacă orice două lanțuri din aceasta familie sunt disjuncte.

Definiția 4.3.2. *O submulțime de vârfuri $S \subset V$ se numește* ***mulțime de separare a vârfurilor*** *u și v, $u, v \in V$, dacă la eliminarea mulțimii S din graful $G = (V, E)$ se obține un graf nou în care vârfurile u și v aparțin diferitelor componente conexe. Vom mai spune că mulțimea S* ***separă*** *vârfurile u și v.*

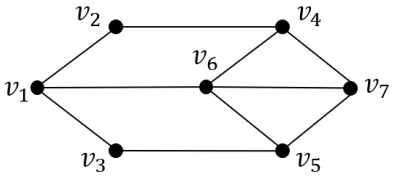


Figura 4.3.1

De exemplu, pentru graful din Figura 4.3.1, numărul maxim de lanțuri disjuncte, ce unesc vârfurile $u = v_1$ și $v = v_7$, este trei:

$$L_1 = (v_1, v_2, v_4, v_7),\ L_2 = (v_1, v_6, v_7),\ L_3 = (v_1, v_3, v_5, v_7).$$

Familia $L = \{L_1, L_2, L_3\}$ este disjunctă, iar mulțimile $S_1 = \{v_2, v_6, v_3\}$ și $S_2 = \{v_4, v_6, v_5\}$ sunt mulțimi de separare a vârfurilor u și v.

Teorema 4.3.1. (Mengher) *Numărul minim de vârfuri ce separă două vârfuri neadiacente u și v ale grafului este egal cu numărul maxim de lanțuri disjuncte ce leagă vârfurile u și v.*

Demonstrație. Este clar că dacă numărul minim de vârfuri care separă u și v este k, atunci există nu mai mult de k lanțuri disjuncte ce leagă vârfurile u și v. Vom arăta că în acest caz există exact k lanțuri disjuncte ce leagă u și v. Pentru $k = 1$ afirmația teoremei este evidentă.

Să presupunem că pentru $k > 1$ afirmația teoremei nu este adevărată. Fie h este cea mai mică valoare a lui k și H un graf cu numărul minim de vârfuri pentru care afirmația teoremei nu este adevărată. Vom elimina din H câte o muchie până când se obține un graf G în care vârfurile u și v să fie separate de h vârfuri, iar în $G - e$ de $h - 1$ vârfuri, unde e este o muchie arbitrară din G. Din construcția grafului G rezultă că pentru orice muchie e există mulțimea vârfurilor S_e, $|S_e| = h - 1$, care separă u și v în $G - e$. Graful $G - S_e$ conține cel puțin un lanț ce leagă u și v, deoarece în G există h vârfuri ce separă u și v. Fiecare astfel de lanț L trece prin muchia $e = (s, t)$, fiindcă L nu formează un lanț în $G - e$. Deci $s, t \notin S_e$ și dacă $s \neq u$ și $s \neq v$, atunci $S_e \cup \{s\}$ separă u și v în G.

Sunt adevărate următoarele două observații despre graful G:

1) *În graful G nu există vârfuri adiacente concomitent cu u și v.*

Fie w este un vârf adiacent cu u și v. Atunci în graful $G - w$, cu numărul de vârfuri mai mic decât în H, trebuie să existe $h - 1$ lanțuri disjuncte ce leagă vârfurile u și v. Acum, în urma adăugării vârfului w și a muchiilor (u, w), (w, v), graful G va avea h lanțuri disjuncte care leagă vârfurile u și v, ceea ce contrazice presupunerea despre graful H.

2) *Orice mulțime de separare W, $|W| = h$, a vârfurilor u și v se conține în vecinătatea lui u sau v.*

Fie W este o mulțime de separare a vârfurilor u și v în G și $|W| = h$. Un lanț care leagă u cu un vârf arbitrar $w_i \in W$ și care nu conține alte vârfuri din W îl notăm prin L_u. În mod analog, un lanț care leagă v cu un vârf arbitrar $w_i \in W$ și care nu conține alte vârfuri din W îl notăm prin L_v. Vom nota familia tuturor lanțurilor L_u prin P_u și, respectiv, familia tuturor lanțurilor L_v o vom nota prin P_v. Din faptul că orice lanț L ce leagă u și v conține un vârf din W, rezultă că fiecare astfel de lanț L este compus dintr-un lanț din P_u și dintr-un lanț din P_v care se intersectează într-un vârf $w_i \in W$. Lanțurile din P_u și P_v nu au alte vârfuri comune decât vârfurile din W, altfel există un lanț ce leagă u, v și nu conține niciun vârf din W. Avem $L_u - W = u$ pentru orice lanț L_u din P_u, sau $L_v - W = u$ pentru orice lanț L_v din P_v, fiindcă, în caz contrar, lanțurile din familia P_u împreună cu vârful v și cu muchiile din $\{(w_1, v), (w_2, v), \dots\}$ sau lanțurile din P_v împreuna cu vârful u și cu muchiile din $\{(u, w_1), (u, w_2), \dots\}$ generează grafuri conexe cu un număr mai mic de vârfuri decât în G, în care u și v nu sunt adiacente și, prin urmare, fiecare din aceste două grafuri conține câte h lanțuri disjuncte ce leagă u și v. Reuniunea segmentelor L_u și L_v ale acestor lanțuri formează h lanțuri disjuncte ce leagă u și v în G. Din această contradicție rezultă corectitudinea observației 2).

Fie $P = (u, w_1, w_2, \dots, v)$ un lanț de lungime minimă ce leagă vârfurile u, v în G și $e = (w_1, w_2)$. Din observația 1), obținem $w_1 \neq v$, $w_2 \neq v$ și $(w_1, v) \notin E(G)$. Definim mulțimea $S_e = \{x_1, x_2, \dots, x_{h-1}\}$ ce separă vârfurile u și v în $G - e$. Având în vedere observația 2), faptul că $(w_1, v) \notin E(G)$, și folosind mulțimea de separare $W = S_e \cup \{w_1\}$, avem $(u, x_i) \in E(G)$ și $(x_i, v) \notin E(G)$ pentru orice $i = \overline{1, h-1}$. Însă, dacă $W = S_e \cup \{w_2\}$, atunci în baza observației 2) avem $(u, w_2) \in E(G)$, ceea

ce vine în contradicție cu faptul că P este un lanț de lungime minimă ce leagă u și v în G. Așadar, nu există graful G cu proprietățile menționate, iar aceasta înseamnă că nu există nici graful H pentru care afirmația teoremei nu are loc. Teorema este demonstrată. □

4.4. Grafuri k-conexe

Lema 4.4.1. *Pentru orice graf k-conex $G = (V, E)$, $k \geq 2$, și o muchie arbitrară $e \in E$, graful $G - e$ este $(k-1)$-conex.*

Demonstrație. Fie $e = (u, v)$ și W este mulțimea de vârfuri pentru care graful $H = G - e - W$ este neconex sau trivial. Dacă u sau v aparține lui W, atunci $H = G - W$ și $|W| \geq k$. În caz contrar, u și v fac parte din graful neconex H. Acum dacă graful $G - u - W$ este neconex, atunci are loc relația $|W| \geq k - 1$. În caz contrar, H este format din vârful izolat u și încă o componentă conexă diferită de vârful u. Prin urmare, graful $G - v - W$ este trivial sau neconex și $|W| \geq k - 1$. □

Teorema 4.4.1. *Un graf $G = (V, E)$ este k-conex, $k \geq 1$, dacă și numai dacă numărul de lanțuri disjuncte ce leagă oricare două vârfuri distincte ale lui G este nu mai mic de k.*

Demonstrație. Să presupunem mai întâi că asemenea lanțuri există. Selectăm două vârfuri arbitrare u și v ale lui G, $u \neq v$. Dintr-o mulțime de k lanțuri disjuncte ce leagă u și v cel mult un lanț nu conține vârfuri diferite de u și v, ceea ce înseamnă că $|V| \geq k + 1$. Este suficient de arătat că orice mulțime de articulație U a lui G constă din nu mai puțin de k vârfuri. Fie P este mulțimea lanțurilor disjuncte ce leagă vârfurile grafului G care aparțin componentelor conexe diferite ale lui $G - U$. Atunci, U conține cel puțin câte un vârf din fiecare lanț al mulțimii P. Astfel, $|U| \geq k$.

Să presupunem că G este un graf k-conex și fie u și v două vârfuri distincte din G. În cazul $k = 1$ rezultatul este trivial, deci să considerăm $k \geq 2$. Dacă u și v nu sunt adiacente, orice mulțime de separare a vârfurilor u și v are cel puțin k elemente. De aici, conform Teoremei 4.3.1, există cel puțin k lanțuri disjuncte ce leagă u și v. În caz contrar, din Lema 4.4.1 rezultă că graful $G - (u, v)$ este $(k-1)$-conex. Deci, conform Teoremei 4.3.1, există cel puțin $k - 1$ lanțuri disjuncte ce leagă u și v în $G - (u, v)$,

iar împreună cu lanțul format dintr-o singură muchie (u, v) se obțin cel puțin k lanțuri disjuncte ce leagă u și v în G. □

Propoziția 4.4.1. *Fie $u_1, u_2, \dots, u_k$ sunt vârfuri distincte ale grafului k-conex $G = (V, E)$ și H un graf care se obține din G prin adăugarea unui vârf nou v și a muchiilor (u_i, v), $i = \overline{1,k}$. Atunci graful H este k-conex.*

Corectitudinea Propoziției 4.4.1 poate fi ușor verificată.

Lema 4.4.2. *Fie $G = (V, E)$ un graf k-conex, $k \geq 1$, u un vârf din V și S o submulțime de vârfuri din $V \backslash \{u\}$, $|S| \geq k$. Atunci în G există k lanțuri disjuncte, ce leagă v cu k vârfuri distincte din S.*

Demonstrație. Construim un graf nou H prin adăugarea la G a unui vârf nou v, astfel încât v să fie adiacent cu toate vârfurile din S. Din Propoziția 4.4.1 rezultă că graful H este k-conex. Conform Teoremei 4.4.1, în H există k lanțuri disjuncte $L_1, L_2, \dots, L_k$ ce leagă u și v. Este clar că în urma eliminării vârfului v din fiecare lanț L_i, $i = \overline{1,n}$, se obțin k lanțuri disjuncte, care leagă v cu k vârfuri distincte din S. □

Teorema 4.4.2. *Orice k vârfuri ale grafului k-conex $G = (V, E)$, $k \geq 2$, aparțin unui ciclu elementar.*

Demonstrație. Fie U o mulțime formată din k vârfuri ale grafului G și fie C un ciclu elementar care conține numărul maxim de vârfuri din U. Să zicem că C conține l vârfuri. Teorema 4.2.1 implică $l \geq 2$. Fie v un vârf din U care nu se conține în C.

Presupunem că $l < k$. Ținând cont de Lema 4.4.2, există mulțimea lanțurilor disjuncte care leagă v cu fiecare vârf din C. Înlocuirea unei muchii a lui C cu două dintre aceste lanțuri generează un ciclu care conține un număr mai mare de vârfuri din U decât C. Am obținut contradicție.

Fie că $l \geq k$ și W este o mulțime formată din k vârfuri din C. Conform Lemei 4.4.2, există mulțimea lanțurilor disjuncte care leagă v cu fiecare vârf din W. Să notăm aceste lanțuri prin L_i, unde $w_i \in W$, $i = \overline{1,k}$. Fie că x_i este primul vârf al lanțului L_i, socotit de la v spre w_i, care aparține ciclului C. Considerăm sublanțul L_i' al lui L_i care leagă v și x_i. Înlocuind fiecare lanț L_i cu sublanțul corespunzător L_i', și W cu mulțimea $W' = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, putem considera că orice lanț din mulțimea lanțurilor

disjuncte se atinge de C doar în vârful său terminal. Acum, există două vârfuri x_i și x_j ale lui W', astfel încât unul din sublanțurile din C care leagă x_i și x_j nu conține un oarecare vârf din $W \cup U$ diferit de x_i și x_j. Înlocuind acest sublanț cu un lanț ce trece prin v, compus din L_i' și L_j', obținem un ciclu care conține un număr mai mare de vârfuri din U decât C. Din nou am obținut contradicție. □

Teorema 4.4.3. *Fie G un graf de ordin $n \geq 2$ și k un număr natural, $1 \leq k \leq n-1$. Dacă $\delta(G) \geq \frac{1}{2}(n+k-2)$, atunci G este k-conex.*

Demonstrație. Presupunem că graful G nu este k-conex. Atunci în G există mulțimea de articulație U, $|U| = l \leq k-1$. Fie G_1 o componentă conexă a grafului $G-U$ cu numărul minim de vârfuri n_1. Atunci $n_1 \leq (n-l)/2$. Dacă v este un vârf din G_1, atunci în G vârful v poate fi adiacent doar cu vârfurile mulțimii U și cu vârfurile din G_1. Așadar, obținem

$$\delta(G) \leq \deg(v) \leq l + n_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(n+l-2) \leq \frac{1}{2}(n+k-3).$$

Teorema este demonstrată. □

4.5. Probleme și sarcini

1. Determinați valorile numerelor $k(G)$ și $\lambda(G)$ pentru graful G din Figura 4.5.1.

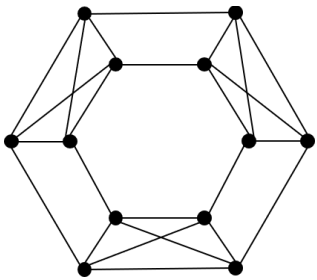


Figura 4.5.1

2. Arătați că orice graf k-conex de ordinul n are cel puțin $kn/2$ muchii.
3. Care este numărul maxim de vârfuri de articulație în graful de ordinul n?

4. Construiți un exemplu de graf G pentru care $k(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$ și $\delta(G) = 4$.
5. Arătați că orice graf k-critic este conex.
6. Arătați că dacă G şi $\bar{G}$ sunt grafuri conexe de ordin $n \geq 5$, atunci cel puţin unul dintre ele conţine un ciclu elementar.
7. Arătați că într-un graf conex orice două lanţuri elementare de lungime maximă au cel puţin un vârf comun.
8. Demonstrați că pentru price graf G, care satisface condiția $\Delta(G) \leq 3$, are loc $k(G) = \lambda(G)$.
9. Fie G un graf cu n vârfuri. Arătați că dacă $\delta(G) \geq n/2$, atunci G este conex.

5. Arbori

5.1. Caracterizarea arborilor

Să ne aducem aminte definiția arborelui:

Definiția 5.1.1. *Un graf conex şi aciclic (fără cicluri) se numeşte* ***arbore****. Deseori un graf arbore se notează prin* T.

Definiția 5.1.2. *Graful ale cărui componente conexe sunt arbori se numește* ***pădure****.*

În Figura 5.1.1 sunt reprezentați toți arborii cu șase vârfuri.

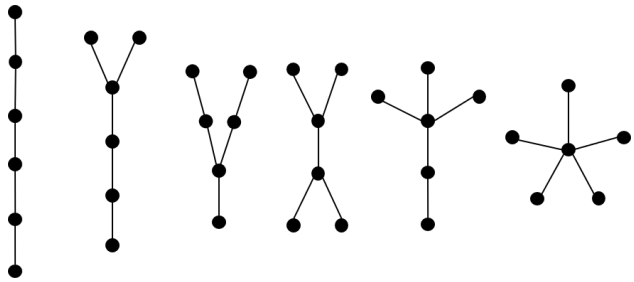


Figura 5.1.1. *Toți arborii cu șase vârfuri*

Înainte de a trece la caracterizarea arborilor, vom demonstra următoarea lemă.

Lema 5.1.1. *Orice graf conex cu* n *vârfuri conține cel puțin* $n - 1$ *muchii.*

Demonstrație. Fie G un graf nul cu n vârfuri. Este clar că adăugarea unei muchii la un graf diferit de graful complet reduce numărul de componente conexe ale acestuia cu cel mult una. Prin urmare, graful care se obține în

urma adăugării a k muchii la G conține cel puțin $n-k$ componente conexe. Așadar, fiecare graf cu n vârfuri și nu mai mult de $n-2$ muchii are cel puțin două componente conexe, iar în calitate de graf conex cu n vârfuri și $n-1$ muchii poate servi graful lanț. □

Teorema 5.1.1. *Pentru orice graf $G=(V,E)$ cu n vârfuri şi m muchii, sunt echivalente următoarele afirmații:*

1) *G este arbore;*
2) *G este conex şi $m=n-1$;*
3) *G este aciclic şi $m=n-1$;*
4) *pentru orice două vârfuri distincte ale lui G există un singur lanţ ce le leagă;*
5) *G este maximal aciclic, adică dacă în G se adaugă o muchie nouă, atunci graful rezultat va conține un ciclu.*

Demonstrație. Vom demonstra șirul de implicații: 1) $\Longrightarrow$ 2), 2) $\Longrightarrow$ 3), 3) $\Longrightarrow$ 4), 4) $\Longrightarrow$ 5), 5) $\Longrightarrow$ 1).

1) $\Longrightarrow$ 2). Graful $G=(V,E)$ este arbore, deci este conex și aciclic. Urmează să arătăm că $m=n-1$. Aplicăm inducţia după numărul de vârfuri n. Pentru $n=1$ implicația este evidentă. Fie acum $n>1$. Presupunem că implicația este adevărată pentru orice arbore de ordin mai mic decât n. Selectăm o muchie arbitrară $e\in E$. Din definiția arborelui, G nu conține cicluri şi ca rezultat, graful $G-e$ constă din două componente conexe G_1 și G_2, care, la rândul lor, sunt arbori. Numărul de vârfuri în G_1 și G_2 îl notăm prin n_1 și n_2, iar numărul de muchii în G_1 și G_2 îl notăm prin m_1 și, respectiv, m_2. Conform presupunerii inductive, avem $m_1=n_1-1$ și $m_2=n_2-1$. Pentru G obținem

$$m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=$$
$$=(n_1+n_2)-1=n-1.$$

2) $\Longrightarrow$ 3). Graful G este conex şi $m=n-1$. Să demonstrăm că G este aciclic. Presupunem contrariul, adică în G există un ciclu şi e este o muchie a acestui ciclu. Atunci graful $G-e$ este conex şi are $m=n-2$ muchii, ceea ce vine în contradicție cu Lema 5.1.1, adică cu faptul că orice graf conex conține cel puțin $n-1$ muchii. Deci graful G este aciclic.

3) $\Longrightarrow$ 4). Graful G conține $k\geq 1$ componente conexe. Fiecare componentă G_i este un graf cu n_i vârfuri şi m_i muchii, $i=\overline{1,k}$. Deoarece

G este aciclic, fiecare G_i este un arbore și are loc egalitatea $m_i = n_i - 1$, $i = \overline{1,k}$. Prin urmare, obținem:

$$n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k \Longrightarrow k = 1.$$

Așadar, G este conex și pentru orice două vârfuri din G există un lanț ce le leagă. Dacă în G ar exista două lanțuri distincte între oarecare două vârfuri u și v, atunci reuniunea lor ar genera în G un ciclu. Ca rezultat, pentru orice două vârfuri distincte ale lui G, există un singur lanţ ce le leagă.

4) $\Longrightarrow$ 5). Pentru orice două vârfuri ale grafului G, există un singur lanț ce le leagă. Deci, G este aciclic. Fie u și v două vârfuri neadiacente ale grafului G. Deoarece în G exită un lanț ce unește u și v, graful $G + (u, v)$, va conține un ciclu. Deci G este maximal aciclic.

5) $\Longrightarrow$ 1). Trebuie de arătat că G este conex. Dacă în G există două vârfuri u și v care aparţin diferitelor componente conexe, atunci graful $G + (u, v)$ este aciclic, contradicţie cu faptul că G este maximal aciclic. Deci G este conex și conform definiției este arbore. □

Teorema 5.1.2. *Un șir de numere întregi pozitive* $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, $n \geq 2$, *reprezintă șirul gradelor vârfurilor unui arbore dacă și numai dacă* $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Demonstrație. Dacă d este șirul gradelor vârfurilor unui arbore, atunci în conformitate cu Teoremele 1.1.1 și 5.1.1 avem

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n - 1) = 2n - 2.$$

Vom demonstra implicația inversă. Dacă $n = 2$, atunci $d = (1,1)$ reprezintă șirul gradelor vârfurilor arborelui K_2. Presupunem că $n > 2$ și implicația este valabilă pentru orice șir al numerelor întregi pozitive de lungime $n - 1$. Să considerăm că $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Atunci $d_1 > 1$, altfel obținem $\sum_{i=1}^{n} d_i = n < 2n - 2$, și $d_n = 1$, căci, în caz contrar, $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$. Suma numerelor din șirul $d' = (d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1})$ este egală cu $2n - 4$, ceea ce înseamnă că d' reprezintă șirul gradelor vârfurilor unui arbore T de ordinul $n - 1$. Adăugând la T un vârf u și o muchie (u, v), unde $\deg_T(v) = d_1 - 1$, obținem un arbore cu șirul gradelor vârfurilor d. □

Consecința 5.1.1. *Un arbore cu un vârf de grad $k \geq 1$ conține cel puțin k vârfuri suspendate. În particular, orice arbore de ordin $n \geq 2$ conține cel puțin două vârfuri suspendate.*

Demonstrație. Cazul $k = 1$ este trivial. Fie T un arbore de ordin n cu un vârf de gradul $k \geq 2$ și $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ șirul gradelor vârfurilor lui T. Să notăm prin l numărul vârfurilor suspendate ale lui T. Fără a pierde din generalitate, considerăm că $1 = d_1 = d_2 = \cdots = d_l$ și $d_{l+1} = k$. Atunci în baza Teoremei 5.1.2 obținem

$$2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i = l + k + \sum_{i=l+2}^{n} d_i \geq l + k + 2(n-l-1).$$

Aceasta se reduce la $l \geq k$.

Dacă $n = 2$, atunci ambele vârfuri ale lui T sunt suspendate. Dacă $n > 2$, atunci T conține cel puțin un vârf v pentru care $\deg(v) \geq 2$ și, în virtutea celor demonstrate mai sus, T conține cel puțin două vârfuri suspendate. □

Teorema 5.1.3. *Fie T un arbore cu n vârfuri. Dacă G este un graf și $\delta(G) \geq n - 1$, atunci G conține un subgraf izomorf cu T.*

Demonstrație. Vom demonstra teorema folosind inducția matematică după numărul de vârfuri n. Cazul $n = 1$ este trivial. Fie $n > 1$ și u un vârf suspendat al lui T adiacent cu un vârf v. Prin ipoteza inductivă, există un izomorfism f al grafurilor $T' = T - u$ și H, unde H este un subgraf al lui G. Întrucât $\deg_T(v) \leq n - 1$, avem $\deg_{T'}(v) \leq n - 2$. Dat fiind că $\deg_G f(v) \geq n - 1$, în G există un vârf u' adiacent cu $f(v)$ și care nu aparține lui H. În consecință, f poate fi extins la un izomorfism între T și un subgraf al lui G prin asocierea $u \to u'$. □

5.2. Arbori parțiali

Definiția 5.2.1. *Subgraful parţial conex şi aciclic se numeşte **arbore parţial** al grafului.*

În general, arborele parțial al unui graf nu este unic. De exemplu, pentru graful G din Figura 5.2.1 (a), sunt ilustrați trei arbori parțiali T_1, T_2 și T_3.

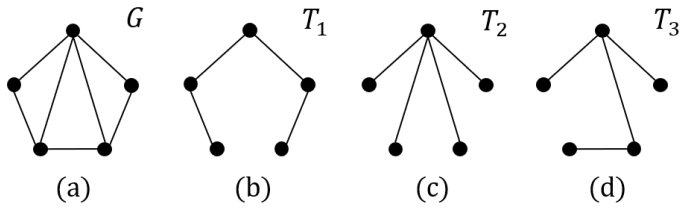


Figura 5.2.1. (a) *Graf G și trei arbori parțiali* T_1 (b), T_2 (c) și T_3 (d)

Teorema 5.2.1. *Un graf G este conex dacă și numai dacă G conține un arbore parțial.*

Demonstrație. Din definiția arborelui parțial rezultă că dacă G conține un arbore parțial, atunci G este conex. Să demonstrăm implicația inversă. Considerăm că G este conex. Dacă G este minimal conex, adică la eliminarea unei muchii arbitrare din G se obține un graf neconex, atunci $T = G$ este un arbore parțial al lui G. În caz contrar, eliminăm succesiv muchiile grafului G, astfel încât să rămână valabilă proprietatea de conexitate. Ultimul subgraf pentru care această proprietate rămâne valabilă va fi un arbore, care și este arbore parțial al lui G. □

Teorema 5.2.2. *Fie v un vârf al grafului conex G. Atunci G conține un arbore parțial T în care pentru orice vârf $u \in V(T) = V(G)$ are loc relația $d_T(v,u) = d_G(v,u)$.*

Demonstrație. Fie G un graf conex. Vom construi un arbore parțial al lui G care satisface condiția teoremei.

Considerăm următoarele vecinătăți ale vârfului v:

$$N_i(v) = \{u \in V(G): d_G(v,u) = i\}, 1 \le i \le e(v).$$

Fie H un graf obținut în urma eliminării din G a tuturor muchiilor din fiecare subgraf indus $G[N_i(v)]$. Este limpede că graful H este conex. Vom nota prin $B_i(v)$ subgraful lui H indus de mulțimea de vârfuri $\bigcup_{j=1}^{i} N_j(v)$. $B_1(v)$ nu conține cicluri. Dacă $B_2(v)$ conține cicluri, atunci eliminăm din H succesiv muchiile care au o extremitate în $N_1(v)$ și cealaltă în $N_2(v)$, câte o muchie din fiecare ciclu, până $B_2(v)$ devine aciclic. Procedând în mod analog pentru eliminarea muchiilor din H care au extremitățile în $N_i(v)$ și $N_{i+1}(v)$ pentru ca $B_{i+1}(v)$, $1 \le i \le e(v) - 1$, să devină aciclic, vom obține un arbore parțial T al lui G. În această construcție a arborelui T pentru orice vârf $u \in V(T) = V(G)$ rămâne exact un lanț de lungime

$d_T(v,u) = d_G(v,u)$ care leagă vârfurile v și u. Așadar, teorema este demonstrată. □

Propoziția 5.2.1. *Dacă T este un arbore parțial al grafului G, e este o muchie a lui G care nu aparține lui T și e' este o muchie ce aparține ciclului din $T + e$, atunci $T + e - e'$ este un arbore pațial.*

Demonstrație. $T + e - e'$ este un graf conex, deoarece e' aparține ciclului din $T + e$ și deci nu este un istm. Având în vedere că numărul de muchii din $T + e - e'$ coincide cu numărul de muchii din T și este egal cu $n - 1$, unde n este ordinul lui G, se deduce că $T + e - e'$ este un arbore. □

5.3. Arbori parțiali de cost minim

Definiția 5.3.1. *Fie că pe mulțimea de muchii a grafului $G = (V, E)$ este definită o funcție $f: E \to R^+$ care pune în corespondența fiecărei muchii $e \in E$ un număr $f(e) \in R^+$, numit **cost** sau **pondere**. Perechea (G, f) se numește **graf ponderat**, iar numărul $\sum_{e \in E} f(e)$ se numește **cost** sau **ponderea grafului** G.*

Teorema 5.3.1. *Pentru un graf conex ponderat $G = (V, E)$ există un subgraf parțial conex și de cost minim $H = (V_H, E_H)$ care este arbore.*

Demonstrație. Dacă G este arbore, atunci $H = G$, deoarece orice muchie s-ar elimina, acesta se va transforma într-un subgraf neconex. Dacă G nu este arbore, el conține un număr finit de subgrafuri parțiale conexe, să le notăm prin $G_1, G_2, \dots, G_k$. Alegem pe cel de cost minim H. Presupunem prin reducere la absurd că H nu este arbore. Cum el este conex rezultă că are cel puțin un ciclu. Eliminând o muchie oarecare ce aparține unui ciclu din H, obținem un subgraf parțial conex al lui H costul căruia va fi mai mic decât costul lui H, ceea ce contrazice ipoteza că H este de cost minim. Rezultă că H este arbore. □

Definiția 5.3.2. *Un **arbore parțial de cost minim** este un arbore parțial având costul mai mic sau cel mult egal cu costul tuturor celorlalți arbori parțiali.*

Ca și cazul arborilor parțiali, arborele parțial de cost minim al unui graf nu este unic. De exemplu, în Figura 5.3.1 sunt prezentați doi arbori parțiali de cost minim ai grafului.

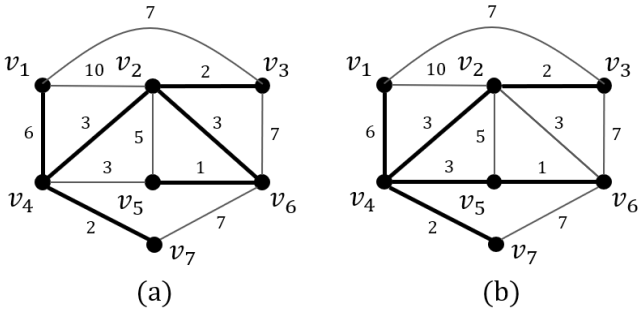


Figura 5.3.1. *Doi arbori parțiali de cost minim*

Teorema 5.3.2. *Dacă $G = (V, E)$ este un graf ponderat, $U \subset V$ și e este o muchie de cost minim dintre toate muchiile care au o extremitate în U și cealaltă în $V \backslash U$, atunci în G există un arbore parțial de cost minim care conține e.*

Demonstrație. Fie T un arbore parțial de cost minim al lui G. Dacă e aparține lui T, teorema este demonstrată. Presupunem că e nu face parte din T și considerăm graful $H = T + e$, care conține un ciclu C. Ciclului C aparține e și încă o muchie $e' = (u, v)$ pentru care $u \in U$ și $v \in V \backslash U$. Este clar că costul muchiei e este mai mic sau egal decât costul muchiei e'. Cum e' aparține lui C, obținem arborele parțial $T' = H - e'$ al lui G de cost minim care conține muchia e. □

Din Teorema 5.3.2 rezultă următorul algoritm (algoritmul lui Prim) pentru determinarea arborelui parțial de cost minim al grafului $G = (V, E)$. Inițial, submulțimea U constă dintr-un vârf arbitrar al lui G și mulțimea muchiilor $M = \emptyset$. La fiecare iterație, se alege o muchie de cost minim (u, v), unde $u \in U$ și $v \in V \backslash U$. Se adaugă v la U și (u, v) la M. Procesul se repetă atâta timp cât $U \neq V$. Arborele parțial de cost minim va fi $T = (U, M)$.

5.4. Numărarea arborilor parțiali

Se știe că pentru orice graf conex, există un arbore parțial al său care, în caz general, nu este unic. Apare întrebarea: care este numărul de arbori parțiali ai unui graf? Numărul de arbori parțiali ai unui graf conex poate fi determinat aplicând Teorema lui Kirchhoff care se dă fără demonstrație.

Teorema 5.4.1. (Kirchhoff) *Fie $G = (V, E)$ un graf conex de ordin $n \geq 2$. Numărul arborilor parțiali ai lui G este egal cu complementul algebric al oricărui element al matricei Kirchhoff a lui G.*

Teorema 5.4.2. *Numărul arborilor parțiali ai graful complet K_n este n^{n-2}.*

Demonstrație. Matricea Kirchhoff pentru graful K_n are forma:

$$C = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Să analizăm complementul algebric al elementului c_{11} care ocupă poziția $(1,1)$ în matricea C. Evident, complementul algebra al lui c_{11} este egal cu determinantul matricei C_{11} de ordinul $n-1$ care se obține la suprimarea liniei 1 și coloanei 1 din matricea C. La prima linie a matricei C_{11}, adăugăm toate celelalte $n-1$ linii. Pentru prima coloană, avem

$$n - 1 + (n-2) \cdot (-1) = 1.$$

Similar, pentru celelalte elemente ale primei linii avem 1. Adăugăm prima linie la restul liniilor matricei C_{11} și ca rezultat obținem:

$$det(C_{11}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}.$$

Teorema este demonstrată. □

Consecința 5.4.1. *Numărul arborilor distincți de ordinul n este n^{n-2}.*

Corectitudinea Consecinței 5.4.1 rezultă imediat din faptul că numărul arborilor distincți cu n vârfuri este egal cu numărul arborilor parțiali în graful K_n.

Ca exemplu, vom utiliza teorema lui Kirchhoff pentru determinarea numărului de arbori parțiali ai grafului $G = (V, E)$ din Figura 5.4.1.

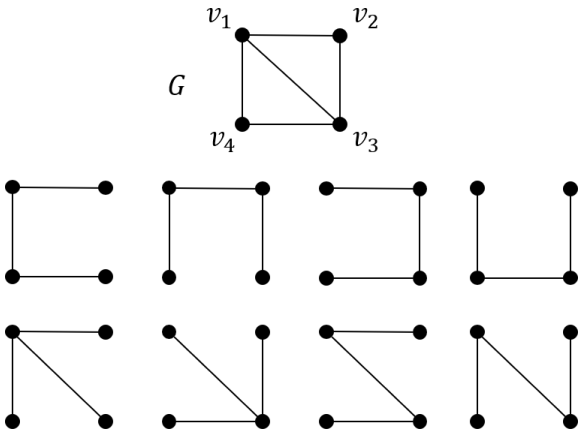


Figura 5.4.1. *Toți arbori parțiali ai grafului G*

Construim matricea Kirchhoff pentru graful G.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Complementul algebra al lui c_{11} este egal cu

$$det(C_{11}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 2 = 8.$$

Deci, există 8 arbori parțiali ai grafului G. Toți arbori parțiali ai grafului G sunt reprezentați în Figura 5.4.1.

5.5. Probleme și sarcini

1. Construiți toți arborii de ordinul 7, neizomorfi între ei.
2. Determinați toți arborii T pentru care $\overline{T}$ la fel este arbore.
3. Arătați că orice arbore este un graf bipartit.
4. Demonstrați că centrul oricărui arbore este format dintr-un vârf sau din două vârfuri adiacente.
5. Verificați afirmația: dacă diametrul unui graf conex este k, atunci în G există un arbore parțial cu diametrul egal cu k.
6. Găsiți toți arborii parțiali în K_5 și $K_{3,3}$.
7. Care este relaţia dintre raza şi diametrul unui arbore?

8. Identificați toți arbori parțiali de cost minim ai grafului din Figura 5.5.1.

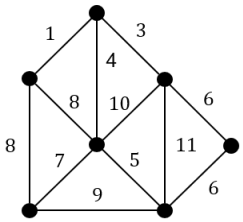


Figura 5.5.1

9. Fie $G = (V, E)$ un arbore. Notăm prin g_i numărul vârfurilor ce au gradul i şi prin g numărul vârfurilor de grad mai mare decât 2. Demonstrați că $g_1 \geq g + 2$.
10. Fie G un graf ponderat în care ponderile tuturor muchiilor sunt distincte două câte două. Demonstrați că G conține un singur arbore parțial de cost minim.

6. Grafuri cordale

6.1. Grafuri cordale. Rezultate principale

Definiția 6.1.1. *Un graf conex se numeşte* ***cordal****, dacă orice ciclu elementar cu cel puțin patru vârfuri conține cel puțin o coardă (o muchie între două vârfuri care fac parte din ciclu, dar nu sunt adiacente în ciclu).*

În Figura 6.1.1 este ilustrat un exemplu de graf cordal cu 8 vârfuri și 13 muchii.

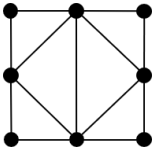


Figura 6.1.1

Propoziția 6.1.1. *Orice subgraf al grafului cordal indus de o mulțime de vârfuri este cordal.*

Demonstrație. Presupunem contrariul, adică presupunem că G conține un subgraf indus de o mulțime de vârfuri care nu este cordal. Acest subgraf, conform definiției grafului cordal, conține un ciclu indus C (un ciclu în care doar vârfurile consecutive ale lui C sunt conectate printr-o muchie) de lungime cel puțin 4. Evident, ciclul C rămâne indus în G, ceea ce vine în contradicție cu faptul că G este cordal. □

Teorema 6.1.1. *Un graf este cordal dacă și numai dacă orice mulțime de articulație minimală este o clică.*

Demonstrație. Fie $G = (V, E)$ un graf cordal și S o mulțime de articulație minimală a lui G. Presupunem că în urma eliminării lui S din G se obțin două componente conexe $G'_1 = (V_1, E_1)$ și $G'_2 = (V_2, E_2)$. Definim două grafuri noi $G_1 = G[V_1 \cup S]$ și $G_2 = G[V_2 \cup S]$ (Figura 6.1.2). Trebuie să arătăm că S formează o clică. Să considerăm o pereche de vârfuri arbitrare $u, v \in S$, $u \neq v$. Dat fiind că S este mulțimea de articulație minimală, vecinătățile vârfurilor u și v se intersectează cât cu V_1, atât și cu V_2. Selectăm un lanț de lungime minimă L_1 care leagă vârfurile u, v și trece cel puțin printr-un vârf din V_1. La fel, selectăm un lanț de lungime minimă L_2 care leagă vârfurile u, v și trece cel puțin printr-un vârf din V_2. Combinând aceste două lanțuri, obținem un ciclu C_k, $k \geq 4$. Ținând cont de faptul că nu există muchii între vârfurile mulțimilor V_1, V_2 și G este un graf cordal, vârfurile u și v trebuie să fie adiacente, de unde rezultă că mulțimea S este o clică. În cazul în care după eliminarea mulțimii S se formează mai multe componente conexe, este suficient de analizat doar două dintre ele.

Fie $G = (V, E)$ un graf în care orice mulțime de articulație minimală este o clică. Să presupunem că G nu este cordal. Atunci, în G se conține un ciclu indus C_k, $k \geq 4$. Alegem în C_k două vârfuri arbitrare și neadiacente u și v. C_k este format din două lanțuri care leagă vârfurile u și v. Deoarece $k \geq 4$, fiecare dintre aceste două lanțuri conține cel puțin un vârf diferit de vârfurile u, v (astfel de vârfuri le vom numi *vârfuri interioare*). Întrucât C_k este un subgraf indus al grafului G, vârfurile interioare ale celor două lanțuri nu sunt adiacente. Se observă că orice mulțime, ce separă vârfurile u și v, conține cel puțin câte un vârf interior din cele două lanțuri ce leagă u și v, și ca rezultat conține cel puțin două vârfuri neadiacente. Am obținut contradicție. □

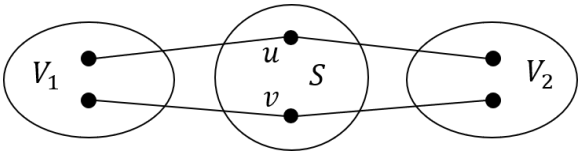


Figura 6.1.2

Definiția 6.1.2. *Un vârf v se numește **simplicial**, dacă vecinătatea lui v formează o clică.*

Teorema 6.1.2. *Orice graf cordal care nu este complet conține cel puțin două vârfuri simpliciale neadiacente.*

Demonstrație. Fie $G = (V, E)$ un graf cordal de ordinul n care nu este complet. Vom demonstra teorema folosind inducția matematică după numărul de vârfuri n. Evident, teorema este adevărată pentru orice graf cordal care nu este complet de ordinul cel mult 4. Să presupunem că $n \geq 5$ și teorema este adevărată pentru orice graf cordal care nu este complet de ordinul cel mult $n - 1$.

Deoarece G nu este complet, în G există două vârfuri neadiacente u și v. Prin urmare, mulțimea $V \backslash \{u, v\}$ este mulțime de articulație a grafului G. Selectăm din $V \backslash \{u, v\}$ o mulțime de articulație minimală S. Conform Teoremei 6.1.1, mulțimea S formează o clică. Presupunem că în urma eliminării lui S din G se obțin două componente conexe diferite $G'_1 = (V_1, E_1)$ și $G'_2 = (V_2, E_2)$, fie $G_1 = G[V_1 \cup S]$ și $G_2 = G[V_2 \cup S]$ (Figura 6.1.2). Conform presupunerii inductive subgrafurile G_1 și G_2 sunt cordale.

Să considerăm subgraful G_1. Dacă G_1 este complet, atunci orice vârf din V_1 este simplicial în G_1 și în G, deoarece nu există muchii între V_1 și V_2. Fie G_1 nu este complet. Atunci G_1 este conex, deoarece G'_1 reprezintă o singură componentă conexă și S formează o clică. Mai mult decât atât, numărul vârfurilor din G_1 este strict mai mic decât n, ceea ce urmează din relația $V_2 \neq \emptyset$. Conform ipotezei inductive, graful G_1 conține cel puțin două vârfuri simpliciale neadiacente. Cum S este o clică, aceste două vârfuri nu pot aparține concomitent mulțimii S. Așadar, cel puțin un vârf simplicial aparține lui V_1, și deoarece nu există muchii între V_1 și V_2, vârful simplicial din V_1 este simplicial pentru întregul graf G. Din aceleași considerente în V_2 există un alt vârf simplicial. Drept rezultat, am demonstrat că în G există cel puțin două vârfuri simpliciale neadiacente.

Dacă numărul de componente conexe obținute în urma eliminării lui S este $k \geq 3$, atunci aplicând aceleași raționamente pentru fiecare componentă, ușor poate fi demonstrat că G conține k vârfuri simpliciale neadiacente. □

Consecința 6.1.1. *Orice graf cordal conține cel puțin un vârf simplicial.*

Demonstrație. Orice vârf al grafului complet este simplicial. Combinând aceasta cu Teorema 6.1.2, obținem corectitudinea consecinței date. □

Consecința 6.1.2. *Orice arbore T de ordinul $n \geq 2$ conține cel puțin două vârfuri suspendate.*

Demonstrație. Cazul $n = 2$ este trivial. Fie că $n \geq 3$. Din definiția grafului cordal rezultă că arborele este un graf cordal. Având în vedere Teorema 6.1.2, în arborele T există cel puțin două vârfuri suspendate. □

6.2. Seria ordonată de eliminare a vârfurilor simpliciale

Fie G_1 un graf cordal care conține un vârf simplicial v_1. Eliminăm v_1 din G_1 și obținem un graf nou G_2. Graful G_2 este un subgraf al lui G_1, adică G_2 la fel este graf cordal și conține un vârf simplicial v_2, la eliminarea căruia se obține un graf cordal G_3. Continuând procedura de eliminare a vârfurilor simpliciale, vom obține o serie de grafuri cordale G_1, G_2, G_3, … , G_{n+1}, unde $G_{n+1} = \emptyset$. Plus la aceasta, se obține și o serie ordonată compusă din vârfurile simpliciale v_1, v_2, v_3, … , v_n, pe care o vom nota prin $\sigma = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$. Seria σ o vom numi *seria ordonată de eliminare a vârfurilor simpliciale*.

Teorema 6.2.1. *Un graf G este cordal dacă și numai dacă pentru G există o serie ordonată de eliminare a vârfurilor simpliciale.*

Demonstrație. Combinând Consecința 6.1.1 cu procedura de construire a seriei ordonate de eliminare a vârfurilor simpliciale descrise mai sus, rezultă necesitatea. Rămâne de demonstrat suficiența. Să presupunem că un graf G pentru care există o serie ordonată de eliminare a vârfurilor simpliciale nu este cordal. Atunci G conține un ciclu indus C_k, $k \geq 4$. La construirea seriei ordonate de eliminare a vârfurilor simpliciale, mai devreme sau mai târziu, se va ajunge la un vârf al ciclului C_k care, evident, nu este simplicial. Am obținut contradicție. □

În baza Teoremei 6.2.1 poate fi obținută definiția alternativă a grafului cordal.

Definiția 6.2.1. *Un graf $G = (V, E)$ se numește **cordal**, dacă îndeplinește una din următoarele două condiții:*

1) $|V| = 1$;
2) *G se obține dintr-un alt graf cordal G' prin adăugarea unui vârf nou care este simplicial în G.*

Pentru graful cordal din Figura 6.2.1, poate fi obținută seria ordonată de eliminare a vârfurilor simpliciale: $\sigma = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$.

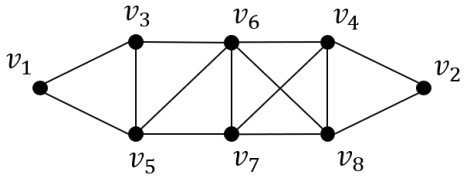


Figura 6.2.1

Teorema 6.2.2. *Într-un graf cordal, orice vârf poate fi plasat pe ultima poziție în seria ordonată de eliminare a vârfurilor simpliciale*.

Demonstrație. Fie G un graf cordal și v un vârf arbitrar al lui G. Deoarece orice graf cordal obținut la fiecare etapă de construire a seriei ordonate de eliminare a vârfurilor simpliciale, cu excepția ultimelor două etape când se obține un graf trivial și un graf vid, conține cel puțin două vârfuri simpliciale, noi putem omite eliminarea vârfului v la toate aceste etape ale procedurii sus-menționate. □

Teorema 6.2.3. *Dacă v este un vârf simplicial al grafului cordal $G = (V, E)$, atunci în G există o mulțime stabilă interior maximă $S \subseteq V$, astfel încât $v \in S$.*

Demonstrație. Dat fiind că v este un vârf simplicial, orice mulțime stabilă interior maximă S' a lui G conține exact un vârf din mulțimea $N[v]$. În caz contrar, cardinalul mulțimii stabile interior $\{v\} \cup S'$ va fi mai mare decât cardinalul mulțimii S'. Dacă mulțimii S' aparține un vârf u din $N(v)$, atunci definim o nouă mulțime stabilă interior maximă $S = (S' \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ care conține vârful v. □

Notăm prin $\theta(G)$ numărul minim de clici care acoperă vârfurile grafului G.

Definiția 6.2.2. *Un graf G se numește **perfect**, dacă $\theta(G) = \alpha_0(G)$.*

De exemplu, mulțimea minimă de clici care acoperă vârfurile grafului G din Figura 6.2.1 este $\{\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_4, v_6, v_7, v_8\}, \{v_2\}\}$. De aici, $\theta(G) = 3$. În același timp $\alpha_0(G) = 3$, deci graful G este perfect.

Teorema 6.2.4. *Orice graf cordal este perfect.*

Demonstrație. Teorema este adevărată pentru orice graf cordal de ordinul cel mult 4. Fie $G = (V, E)$ un graf cordal de ordin $n \geq 5$. Aplicăm inducția matematică. Să presupunem că teorema este adevărată pentru orice graf cordal de ordin mai mic decât n.

Presupunem că G este conex. Ținând cont de Consecința 6.1.1, G conține un vârf simplicial v. Fie u un vârf adiacent cu v. Deoarece v este un vârf simplicial în G (deci, și în $G - u$), avem $\theta(G - u) = \theta(G)$. Conform presupunerii inductive, $G - u$ este un graf cordal, ceea ce înseamnă că $G - u$ este perfect și $\theta(G - u) = \alpha_0(G - u)$. În consecință, obținem $\theta(G) = \theta(G - u) = \alpha_0(G - u) \leq \alpha_0(G)$. Orice clică dintr-o mulțime de clici care acoperă vârfurile grafului G poate conține cel mult un vârf dintr-o mulțime stabilă interior maximă a lui G. Prin urmare, pentru a acoperi vârfurile mulțimii stabile interior maxime ale grafului G, sunt necesare cel puțin $\alpha_0(G)$ clici. Așadar, avem $\theta(G) \geq \alpha_0(G)$. Combinând aceasta relație cu relația de mai sus, obținem $\theta(G) = \alpha_0(G)$.

Dacă G nu e conex, atunci aplicăm același raționament pentru fiecare componentă conexă a lui G. □

6.3. Probleme și sarcini

1. Determinați care grafuri din Figura 6.3.1 sunt cordale.
2. Determinați toate vârfurile simpliciale ale grafurilor din Figura 6.3.1.
3. Identificați mulțimea de articulație minimală pentru grafurile din Figura 6.3.1.
4. Construiți seria ordonată de eliminare a vârfurilor simpliciale pentru grafurile cordale din Figura 6.3.1.

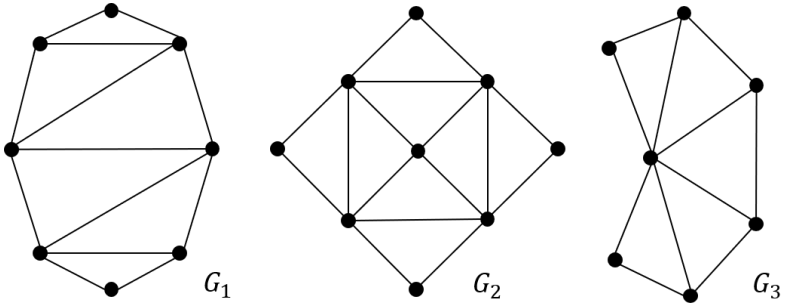


Figura 6.3.1

7. Grafuri euleriene și hamiltoniene

7.1. Grafuri euleriene

Definiția 7.1.1. *Un lanț (ciclu) al unui graf G care trece exact o singură dată prin toate muchiile grafului G se numește lanț (ciclu)* ***eulerian****.*

Definiția 7.1.2. *Un graf care conține un ciclu eulerian se numește* ***graf eulerian****.*

Evident, orice graf eulerian este conex.

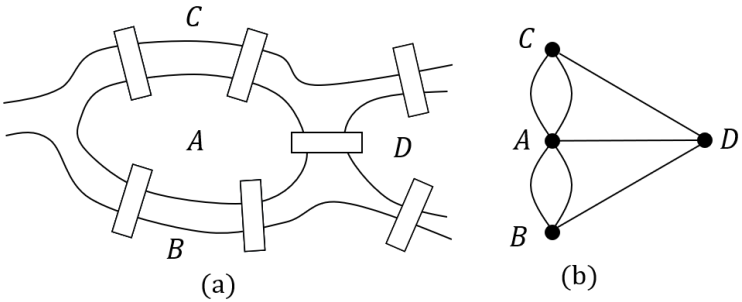


Figura 7.1.1. *Șapte poduri din Königsberg* (a); *graful asociat celor șapte poduri din Königsberg* (b)

De obicei, grafurile euleriene se asociază cu problema celor șapte poduri din Königsberg, care a constat în următoarele: În sec. al XVIII-lea orășelul Königsberg (astăzi Kaliningrad, Rusia) era străbătut de râul Pregel, care pe teritoriul orașului se bifurcă în două brațe, formând două insule. Insulele erau legate de maluri cu șapte poduri (Figura 7.1.1). Se cerea de stabilit dacă există un traseu care parcurge toate cele șapte poduri

exact o singură dată. Această problemă a fost soluționată de Leonhard Euler care în anul 1736 a arătat cu nu există un astfel de traseu. Soluția lui Euler a problemei date a dus la apariția și dezvoltarea teoriei grafurilor!

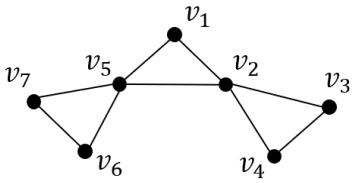


Figura 7.1.2. *Graf eulerian*

Graful din Figura 7.1.2 este eulerian, deoarece el conține ciclul eulerian $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_5, v_6, v_7, v_5, v_1)$.

Lema 7.1.1. *Fie $G = (V, E)$ un graf conex cu n vârfuri și m muchii. Dacă gradele vârfurilor grafului G sunt pare, atunci în G există un ciclu.*

Demonstrație. Cum G este conex și gradul fiecărui vârf al lui G este par, rezultă că pentru orice $v \in V$ are loc relația $\deg(v) \geq 2$. Prin sumare, obținem $2m = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2n$. Astfel graful G conține cicluri întrucât, pentru a fi aciclic, G trebuie să fie un arbore, iar în acest caz trebuie să fie adevărată egalitatea $m = n - 1$. □

Teorema 7.1.1. (Euler) *Graful conex G este eulerian dacă și numai dacă gradele tuturor vârfurilor sale sunt numere pare.*

Demonstrație. Necesitatea. Fie G un graf eulerian. Vom arăta că gradele vârfurilor grafului G sunt numere pare. Deoarece G e eulerian, în G există un ciclu eulerian C. De fiecare dată când ciclul eulerian intră într-un vârf v pe o muchie, trebuie să părăsească acest vârf pe o altă muchie. Întrucât fiecare muchie apare în ciclul C exact o singură dată, numărul de muchii incidente cu v este par. De aici rezultă că gradele vârfurilor grafului G sunt numere pare.

Suficiența. Fie G un graf conex și fie gradul fiecărui vârf al lui G este par. Demonstrația va fi realizată prin inducție după numărul de muchii. Evident, pentru graful G cu două muchii afirmația teoremei este adevărată. Presupunem că afirmația teoremei este adevărată pentru toate grafurile cu numărul de muchii mai mic decât $|E(G)|$. Având în vedere Lema 7.1.1, graful G conține un ciclu C. Prin eliminarea muchiilor ciclului C din G se

obține un graf nou G' în care gradele tuturor vârfurilor, de asemenea, sunt pare. Graful G' poate să nu fie conex, dar fiindcă G este conex, ciclul C trece prin toate componentele conexe ale lui G'. Dacă G' nu este conex, atunci conform presupunerii inductive, fiecare componentă a lui G' conține un ciclu eulerian. Acum, vom combina ciclul C cu toate ciclurile euleriene ale componentelor conexe din graful G' în felul următor: parcurgem ciclul C parcurgând ciclul eulerian al fiecărei componente conexe în cazul în care pentru prima dată întâlnim un vârf arbitrar al acestei componente în C (Figura 7.1.3). În acest mod se obține ciclul eulerian al grafului inițial G. Dacă G' este conex, atunci conform presupunerii inductive, G' conține un ciclu eulerian și în mod analog cu cele descrise mai sus poate fi construit un ciclu eulerian al grafului G. □

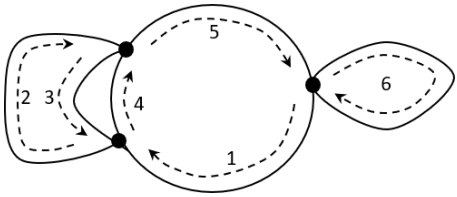


Figura 7.1.3. *Parcurgerea ciclului eulerian se realizează în ordinea indicată*

Consecința 7.1.1. *Graful conex G este eulerian dacă și numai dacă mulțimea muchiilor sale poate fi descompusă în cicluri.*

Teorema 7.1.2. *Graful conex $G = (V, E)$ conține un lanț eulerian dacă și numai dacă cel mult două vârfuri ale sale au grade impare.*

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că graful G conține un lanț eulerian L, care trece prin toate muchiile lui G exact o singură dată. Dacă L este un ciclu, atunci, potrivit Teoremei 7.1.1, necesitatea este demonstrată. Fie că L nu formează un ciclu și v_1, v_2 sunt extremitățile lanțului L. Considerăm graful $G' = G + (v_1, v_2)$ în care, prin adăugarea muchiei (v_1, v_2) la lanțul eulerian, se obține un ciclu eulerian și astfel G' este un graf eulerian. Conform Teoremei 7.1.1, gradele vârfurilor din G' sunt numere pare, deci $\deg_{G'}(v_1)$ și $\deg_{G'}(v_2)$ sunt numere pare. La eliminarea muchiei (v_1, v_2) din G' ne întoarcem la graful inițial G în care gradele $\deg_G(v_1)$ și $\deg_G(v_2)$ sunt numere impare, iar gradele celorlalte vârfuri rămân pare, deci cel mult două vârfuri ale grafului G au grade impare.

Suficiența. Se cunoaște că în orice graf numărul vârfurilor de grad impar este par. Aceasta implică faptul că în G numărul vârfurilor de grad impar este egal cu 0 sau 2. Dacă numărul vârfurilor de grad impar este 0, rezultă că toate vârfurile au grad par și atunci conform Teoremei 7.1.1 graful G conține un ciclu eulerian, deci și un lanț eulerian. Dacă numărul vârfurilor de grad impar este 2 și v_1 și v_2 sunt vârfurile de grad impar din G, atunci construim graful $G' = G + (v_1, v_2)$ în care gradele tuturor vârfurilor sunt pare și ca rezultat, conform Teoremei 7.1.1, G' conține un ciclu eulerian. Eliminând din acest ciclu muchia (v_1, v_2), se obține un lanț eulerian al grafului G. □

7.2. Grafuri hamiltoniene

Definiția 7.2.1. *Un lanț (ciclu) al unui graf G care trece exact o singură dată prin toate vârfurile grafului G se numește lanț (ciclu)* ***hamiltonian***.

Definiția 7.2.2. *Un graf care conține un ciclu hamiltonian se numește* ***graf hamiltonian***.

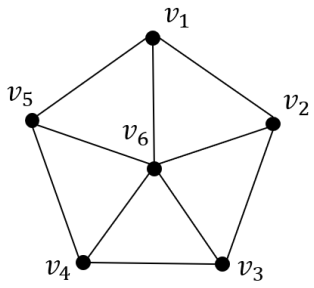


Figura 7.2.1. *Graf hamiltonian*

Graful din Figura 7.2.1 este hamiltonian, deoarece el conține ciclul hamiltonian $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1)$. Spre deosebire de cazul ciclului eulerian, pentru ciclul hamiltonian nu există un criteriu exact de determinare a existenței acestuia într-un graf arbitrar. Totuși, există câteva condiții suficiente care stabilesc prezența ciclului hamiltonian în anumite grafuri.

Teorema 7.2.1. (Ore) *Fie $G = (V, E)$ un graf cu $n \geq 3$ vârfuri. Dacă pentru orice două vârfuri neadiacente u și v ale lui G are loc inegalitatea $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, atunci graful G este hamiltonian.*

Demonstrație. Presupunem că graful G satisface condițiile teoremei, dar nu este hamiltonian. Vom adăuga muchii în graful G până când se obține un graf G' care la adăugarea ulterioară a unei muchii noi se transformă într-un graf hamiltonian. Cu alte cuvinte, G' este un graf maximal nehamiltonian care satisface condițiile teoremei. Un astfel de graf trebuie să existe, deoarece G nu este hamiltonian, iar graful complet K_n este hamiltonian. Deci, pentru orice două vârfuri neadiacente u și v ale lui G', graful $G' + (u, v)$ va conține un ciclu hamiltonian C. Este clar că ciclul C va conține muchia $e = (u, v)$. De aici, $C - e$ reprezintă un lanț hamiltonian $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ al grafului G', unde $v_1 = u$ și $v_n = v$ (Figura 7.2.2).

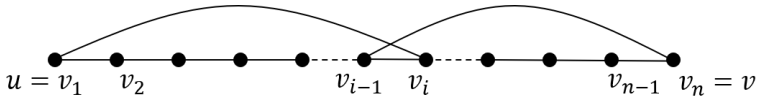


Figura 7.2.2

Se observă că dacă $v_i \in N(u)$, atunci $v_{i-1} \notin N(v)$. În caz contrar, în G' ar exista ciclul hamiltonian $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_i, v_1)$. Prin urmare, pentru orice vârf v_i adiacent cu u, vârful v_{i-1} nu este adiacent cu v. Însă, atunci $\deg_{G'}(v) \leq (n-1) - \deg_{G'}(u)$. Aceasta conduce la $\deg_{G'}(u) + \deg_{G'}(v) \leq n - 1$ și, prin urmare, la

$$\deg_G(u) + \deg_G(v) \leq n - 1.$$

Din contradicția obținută se deduce corectitudinea teoremei. □

Consecința 7.2.1. *Fie $G = (V, E)$ un graf cu $n \geq 3$ vârfuri. Dacă $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ pentru orice vârf $v \in V$, atunci graful G este hamiltonian.*

Consecința 7.2.2. *Fie $G = (V, E)$ un graf cu $n \geq 3$ vârfuri. Dacă pentru orice două vârfuri neadiacente u și v ale lui G are loc inegalitatea $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$, atunci graful G conține un lanț hamiltonian.*

Demonstrație. Fie graful G' se obține din G în urma adăugării unui vârf nou w adiacent cu toate vârfurile grafului G. Atunci, gradul fiecărui vârf din G crește cu 1 și în G' avem $\deg_{G'}(u) + \deg_{G'}(v) \geq n + 1$ pentru fiecare pereche de vârfuri neadiacente u și v din G'. Dat fiind faptul că $|V(G')| = n + 1$ și ținând cont de Teorema 7.2.1, G' este un graf hamiltonian. Dacă C' este un ciclu hamiltonian al lui G', atunci $C' - w$ este un lanț hamiltonian în G. Așadar, G conține un lanț hamiltonian. □

Teorema 7.2.2. *Orice graf cu $n \geq 3$ vârfuri și $m \geq C_{n-1}^2 + 2$ muchii este hamiltonian.*

Demonstrație. Presupunem că afirmația teoremei nu este adevărată. Atunci există cel mai mic număr natural n pentru care există un graf G cu n vârfuri și $C_{n-1}^2 + 2$ muchii care nu este hamiltonian. Deoarece afirmația teoremei se verifică pentru orice graf cu 3, 4 și 5 vârfuri, rezultă că $n \geq 6$. Din faptul că G nu este hamiltonian, rezultă cu siguranță că G nu este complet.

Fie u și v două vârfuri neadiacente care aparțin grafului G. Atunci graful $H = G - u - v$ conține $C_{n-1}^2 + 2 - \deg(u) - \deg(v)$ muchii și $n - 2$ vârfuri. Așadar, obținem inegalitatea

$$C_{n-1}^2 + 2 - \deg(u) - \deg(v) \leq C_{n-2}^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \deg(u) + \deg(v) \geq C_{n-1}^2 - C_{n-2}^2 + 2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \deg(u) + \deg(v) \geq$$
$$\geq \big(1 + 2 + \ldots + (n-2)\big) - \big(1 + 2 + \ldots + (n-3)\big) + 2 = n.$$

În virtutea Teoremei 7.2.1, G este hamiltonian. Am obținut contradicție. □

În următoarea teoremă se formulează condiția necesară de existență a ciclului hamiltonian.

Teorema 7.2.3. *Dacă graful $G = (V, E)$ este hamiltonian, atunci pentru orice submulțime $S \subseteq V$, graful G' care se obține în urma eliminării submulțimii de vârfuri S din G conține cel mult $|S|$ componente conexe.*

Demonstrație. Fie $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sunt componentele conexe diferite ale grafului G'. Începem parcurgerea ciclului hamiltonian al lui G dintr-un vârf al componentei G_1 (Figura 7.2.3).

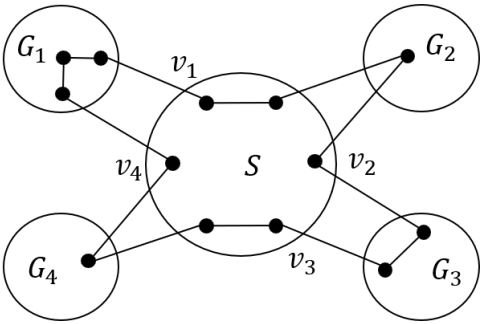


Figura 7.2.3

Observăm că din G_1 nu ne putem deplasa într-o altă componentă G_i, $i \neq 1$, decât printr-un vârf $v_1 \in S$. Analog, părăsind componenta G_i, $i \geq 2$ apare necesitatea de a trece printr-un vârf $v_i \in S$. Deoarece are loc parcurgerea grafului G de-a lungul ciclului hamiltonian C, vârfurile $v_1, v_2, \dots, v_k$ trebuie să fie distincte. Drept urmare, numărul de vârfuri în mulțimea S trebuie să fie nu mai mic decât k. □

7.3. Probleme și sarcini

1. Verificați afirmația: pentru orice două muchii ale unui graf eulerian care sunt incidente cu același vârf există un ciclu în care aceste muchii pot fi parcurse consecutiv.
2. Arătați prin intermediul unui exemplu că condițiile suficiente de existență a ciclului hamiltonian din Teorema 7.2.1 și Consecința 7.2.1 nu sunt și necesare.
3. Folosind condiția necesară de existență a ciclului hamiltonian din Teorema 7.2.3, arătați că graful din Figura 7.3.1 nu este hamiltonian.

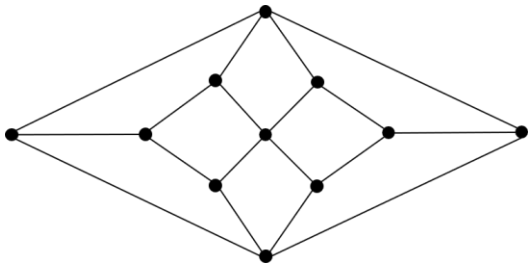


Figura 7.3.1

4. Formulați condiția necesară de existența a ciclului hamiltonian într-un graf bipartit $K_{n,m}$.
5. Fie G un graf conex regulat cu $n \geq 3$ vârfuri. Demonstrați că graf al muchiilor $L(G)$ este eulerian.
6. Fie G un graf regulat conex care nu este eulerian. Demonstrați că dacă $\bar{G}$ este conex, atunci $\bar{G}$ este eulerian.
7. Determinați numărul de cicluri hamiltoniene în graful bipartit complet $K_{n,n}$.
8. Fie G și H două grafuri hamiltoniene. Demonstrați că produsul cartezian $G_1 \times G_2$ este un graf hamiltonian

8. Grafuri planare

8.1. Grafuri planare. Grafuri plane

Definiția 8.1.1. *Graful G se numește **planar**, dacă admite o reprezentare în plan, astfel încât orice două muchii ale sale se pot intersecta doar în vârfuri. Însăși reprezentarea grafului planar, ce posedă proprietatea indicată, se numește **graf plan**.*

În Figura 8.1.1, graful G_1 este planar, deoarece el este izomorf cu G_2 și G_3 care sunt grafuri plane.

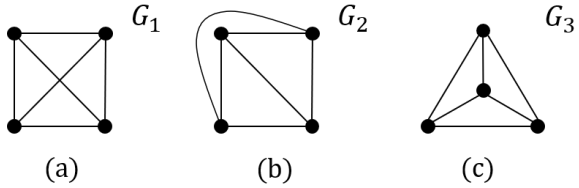


Figura 8.1.1. (a) *Graf planar G_1 și grafuri plane G_2* (b) și G_3 (d)

Definiția 8.1.2. *Fie $G = (V, E)$ un graf și R un spațiu. Vom spune că G **poate fi amplasat** în spațiul R, dacă există un graf $G' = (V', E')$, astfel încât:*

1) *$G \cong G'$ (G este izomorf cu G');*
2) *V' este o mulțime de puncte distincte din R;*
3) *orice muchie $e' \in E'$ este o curbă simplă conținută în R care unește cele două extremități din V';*
4) *orice punct al lui R este sau un vârf al grafului G', sau prin el trece cel mult o singură muchie a lui G'.*

*G' se numește **amplasare** a lui G în R.*

Teorema 8.1.1. *Orice graf* $G = (V, E)$ *poate fi amplasat în spațiul* R^3.

Demonstrație. Toate vârfurile grafului se amplasează în puncte diferite ale axei OX. Din fasciculul de plane care trece prin axa OX se aleg $m = |E|$ plane distincte. Fiecărei muchii $(u, v) \in E$ i se asociază un plan în care ea se reprezintă printr-o curbă simplă ce trece prin vârfurile u şi v (Figura 8.1.2).

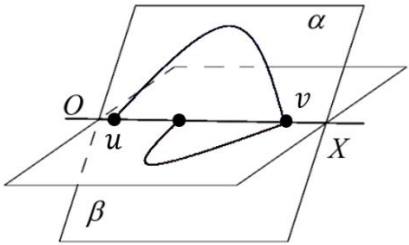


Figura 8.1.2

Deoarece toate muchiile se află în plane diferite şi se intersectează doar în vârfurile incidente cu ele, se obține o amplasare a grafului G în R^3. □

Teorema 8.1.2. *Un graf este planar dacă și numai dacă el poate fi amplasat pe sferă.*

Demonstrație. Vom demonstra că orice graf amplasat pe sferă este planar. Fie G o amplasare a unui graf pe sfera S. Construim planul α tangent la S, astfel încât polul nord N (punctul diametral opus punctului de tangență) să nu nimerească pe o muchie sau pe un vârf al lui G. Fie v un punct de pe sfera S. Construim dreapta care trece prin polul nord N, punctul v și intersectează planul α într-un punct v'. Punctul v' reprezintă imagine stereografică pe planul α a punctului v al sferei (Figura 8.1.3).

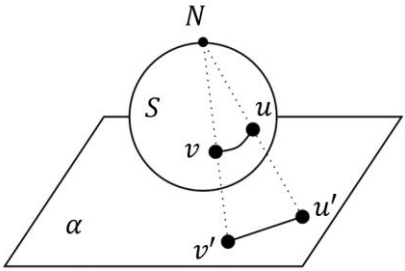


Figura 8.1.3

Astfel fiecărui punct de pe sfera S i se asociază un punct în planul α determinat în mod unic, iar amplasării grafului G în acest plan îi corespunde graful G', care este plan și izomorf cu G. Deci G este un graf planar.

Afirmația inversă se demonstrează în mod analog. □

Definiția 8.1.3. *Porțiunea din plan în care orice două puncte pot fi unite cu o curbă fără a intersecta muchiile grafului se numește* ***față*** *a grafului plan.*

Definiția 8.1.4. *Mulțimea vârfurilor şi muchiilor grafului plan care aparțin unei fețe formează* ***frontiera feței****.*

Orice graf plan are o singură față nemărginită numită față *exterioară*. Celelalte fețe se numesc *interioare*. Noțiunea de față în mod natural se extinde pentru multigrafuri și pseudografuri. În Figura 8.1.4 (a) este reprezentat un graf plan pentru care fața f_4 este exterioară, iar fețele f_1, f_2 și f_3 sunt interioare. Frontiera feței f_4 este $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_4, v_1)$, iar frontiera feței f_2 este $(v_1, v_6, v_7, v_8, v_9, v_6, v_1, v_3, v_4, v_1)$.

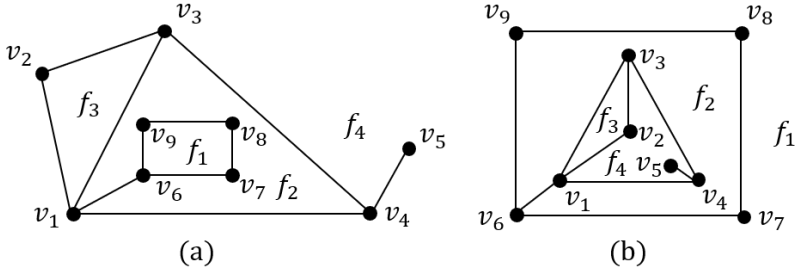


Figura 8.1.4

Propoziția 8.1.1. *Fie G un graf planar și f o față a amplasării în plan a grafului G. Graful G admite o amplasare în plan în care frontiera feței exterioare coincide cu frontiera feței f.*

Demonstrație. Bazându-ne pe Teorema 8.1.2, amplasăm graful G pe o sferă, în așa mod încât polul nord N să fie localizat în interiorul feței corespunzătoare feței f. Imaginea stereografică G' a grafului G din punctul N pe plan reprezintă un graf plan care satisface proprietatea menționată. □

În Figura 8.1.4 (b) este ilustrată o amplasare în plan a grafului din Figura 8.1.4 (a), astfel încât fața f_1 să fie exterioară.

8.2. Formula lui Euler. Criteriul de planaritate al lui Kuratowski

Daca un graf este planar, atunci în orice amplasare a sa în plan numărul de fețe rămâne constant. Aceasta rezultă din următoarea teoremă.

Teorema 4.2.1. (Euler) *Pentru orice graf plan conex cu n vârfuri, m muchii și f fețe, este adevărată egalitatea:*

$$n - m + f = 2 \tag{8.1}$$

Egalitatea (8.1) *se numește formula lui Euler.*

Demonstrație. Fie G un graf plan conex. Vom cerceta un arbore parțial T al acestui graf. Evident, arborele T are o față (exterioară) și n vârfuri. Deoarece T este arbore, numărul de muchii în T este egal cu $n - 1$. Ușor se verifică că pentru T egalitatea (8.1) este adevărată. Treptat vom adăuga în T muchiile rămase ale grafului G. La fiecare pas al procesului, numărul de vârfuri rămâne același, iar numărul de muchii și numărul de fețe cresc cu o unitate. Astfel, formula (8.1) rămâne adevărată pentru grafurile construite la fiecare pas al procesului descris. Rezultă că și pentru graful G este adevărată egalitatea (8.1). □

Pot fi obținute și rezultatele suplimentare care ne permit să stabilim mai multe proprietăți importante.

Consecința 8.2.1. *Pentru orice graf planar conex G cu $n \geq 3$ vârfuri și m muchii, este adevărată inegalitatea $m \leq 3n - 6$.*

Demonstrație. Amplasăm graful G în plan. Deoarece G nu conține bucle și muchii multiple, frontiera fiecărei fețe conține cel puțin trei muchii (cu excepția cazului când G este un arbore cu trei vârfuri, însă pentru $n = 3$ inegalitatea se verifică nemijlocit). Orice muchie a grafului plan sau separă două fețe, sau este un istm. Notăm prin c_i, $1 \leq i \leq f$, numărul muchiilor care aparțin feței cu indicele i. Pentru graful G, $n \geq 4$, are loc inegalitatea:

$$2m \geq \sum_{i=1}^{f} c_i \geq \sum_{i=1}^{f} 3 = 3f \Longrightarrow 3f \leq 2m$$

Substituind $f = m - n + 2$ (conform formulei lui Euler) în inegalitatea obținută, avem $3(m - n + 2) \leq 2m$. De aici obținem $m \leq 3n - 6$. □

Consecința 8.2.2. *Dacă G este un graf planar, atunci $\delta(G) \leq 5$.*

Demonstrație. Dacă $n \leq 5$, atunci $\delta(G) \leq \Delta(G) \leq 5$. Fie că $n \geq 6$. Din Consecința 8.2.1 avem $m \leq 3n - 6$. Obținem relația:

$$\delta(G)n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \leq 2(3n - 6) = 6n - 12 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow n(\delta(G) - 6) \leq -12.$$

În consecință, $\delta(G) - 6$ este un număr negativ, ceea ce înseamnă că $\delta(G) \leq 5$. □

Propoziția 8.2.1. *K_5 este graful cu numărul minim de vârfuri care nu este planar.*

Demonstrație. Ușor se verifică că oricare graf cu $n \leq 4$ vârfuri este planar. Presupunem că K_5 este planar. Substituind valorile $n = 5$ și $m = 10$ în inegalitatea $m \leq 3n - 6$ din Consecința 8.2.1, obținem $10 \leq 9$. Din contradicția obținută se deduce că K_5 nu este planar. □

Propoziția 8.2.2. *Graful $K_{3,3}$ nu este planar.*

Demonstrație. Pentru $K_{3,3}$ avem $n = 6$ și $m = 9$. Presupunem că $K_{3,3}$ este planar. Conform formulei lui Euler, pentru orice amplasare a grafului $K_{3,3}$ în plan are loc relația $f = 5$. Deoarece $K_{3,3}$ este graful bipartit complet, frontiera fiecărei fețe a acestui graf este mărginită de cel puțin patru muchii. Prin urmare, avem:

$$4f \leq 2m \Longrightarrow 20 \leq 18.$$

Din contradicția obținută rezultă că graful $K_{3,3}$ nu este planar. □

Un rezultat important ce ține de grafurile planare este criteriul de planaritate al lui Kuratowski, care reprezintă o caracterizare simplă și remarcabilă a grafurilor planare.

Teorema 8.2.2. (Kuratowski, criteriul de planaritate) *Graful este planar dacă și numai dacă nu are subgrafuri homeomorfe cu K_5 și $K_{3,3}$.*

Demonstrația Teoremei lui Kuratowski se omite.

Să arătăm cum se aplică criteriul de planaritate al lui Kuratowski pentru determinarea dacă un graf este planar. De exemplu, graful Petersen (Figura 8.2.1 (a)) nu este planar, deoarece el conține un subgaf homeomorf

cu $K_{3,3}$ (Figura 8.2.1 (b)). Ușor poate fi văzut că graful Petersen conține și un subgraf homeomorf cu K_5.

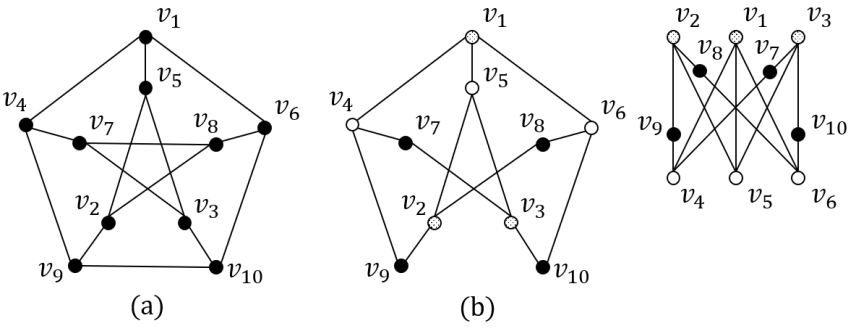


Figura 8.2.1. *Graful Petersen G* (a); *subgraful lui G homeomorf cu* $K_{3,3}$ (b)

8.3. Triangulație

Definiția 8.3.1. *O **triangulație** este un graf planar în care toate fețele, inclusiv cea exterioară, sunt mărginite de un ciclu de lungime trei (triunghi).*

Definiția 8.3.2. *Graful **maximal planar** este graful planar în care adăugarea unei muchii arbitrare generează un graf neplanar.*

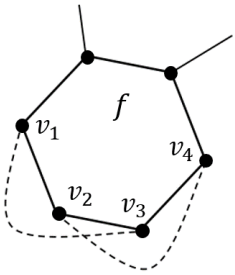


Figura 8.3.1.

Teorema 8.3.1. *Fie G un graf de ordinul $n \geq 3$. Graful G este maximal planar dacă și numai dacă G este o triangulație.*

Demonstrație. Vom demonstra mai întâi necesitatea. Fie $G = (V, E)$ un graf maximal planar care nu este o triangulație. Considerăm că G este amplasat în plan. Se observă că graful G este 2-conex, ceea ce rezultă nemijlocit din definiția grafului maximal planar. Prin urmare, în G există o

faţă, fie f, mărginită de un ciclu de lungime nu mai mică decât 4. Fie $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_1)$ este un astfel de ciclu. Deoarece G este plan, el nu conține concomitent muchiile (v_1, v_3) și (v_2, v_4), care ar trebui să fie plasate în afară feței f (Figura 8.3.1). Fie $(v_1, v_3) \notin E$. La adăugarea muchiei (v_1, v_3) astfel încât fața f să fie divizată în două fețe, graful G rămâne planar. Se obține contradicție, deoarece G este maximal planar. Rezultă că G este o triangulație.

Demonstrăm suficiența. Fie G o triangulație, deci G este conex. Atunci orice muchie, după adăugarea căreia G rămâne planar, trebuie să divizeze faţa respectivă în două fețe. Însă într-un graf care este o triangulație orice faţă este mărginită de un ciclu de lungimea 3, care nu poate fi divizat în două prin adăugarea unei muchii. Deci, G este maximal planar. □

Consecința 8.3.1. *Pentru orice graf maximal planar G cu $n \geq 3$ vârfuri, este adevărată egalitatea $m = 3n - 6$.*

Propoziția 8.3.1. *Fie G o triangulație de ordin $n \geq 4$. Gradul fiecărui vârf al grafului G este cel puțin 3.*

Demonstrație. Fie v un vârf arbitrar al grafului G și u un vârf adiacent cu v. Muchia (v, u) aparține frontierei a două fețe diferite (v, u, w_1) și (v, u, w_2), care formează cicluri de lungimea 3. Cum $n \geq 4$, $w_1 \neq w_2$. Astfel, vârful v este adiacent cu cel puțin trei vârfuri: u, w_1, w_2. □

Propoziția 8.3.2. *Orice graf planar $G = (V, E)$ de ordinul $n \geq 4$ conține cel puțin patru vârfuri gradele cărora nu întrec* 5.

Demonstrație. Fără a pierde generalitatea, vom considera că G este graf plan. Adăugând iterativ muchii în G, vom construi un graf maximal planar G'. Conform Propoziției 8.3.1, gradul fiecărui vârf al lui G' este cel puțin 3. Atunci, combinând Consecința 8.3.1 cu Teorema 1.1.1, obținem:

$$2m = 2(3n - 6) = 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \dots \geq$$
$$\geq 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i \geq 6} n_i ,$$

unde n – numărul de vârfuri, m – numărul de muchii și n_i – numărul vârfurilor de gradul i în G'. Ținând cont de relația $n = \sum_{i \geq 3} n_i$, avem:

$$6\sum_{i \geq 3} n_i - 12 \geq 3(n_3 + n_4 + n_5) + 6\sum_{i \geq 6} n_i \implies$$

$$\Longrightarrow 6(n_3 + n_4 + n_5) - 12 \geq 3(n_3 + n_4 + n_5) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow n_3 + n_4 + n_5 \geq 4.$$

Astfel, în grafurile G' și G există cel puțin patru vârfuri gradele cărora nu întrec 5. □

Teorema 8.3.2. *Orice graf planar poate fi amplasat în plan, astfel încât toate muchiile sale să fie segmente de dreaptă.*

Demonstrație. Fie $G = (V, E)$ un graf maximal planar și $n = |V|$. Fără a pierde din generalitate, considerăm că G este un graf plan cu $n \geq 3$ vârfuri și fiecare față a sa e mărginită de un triunghi. Fie x, y și z trei vârfuri care aparțin frontierei feței exterioare ale grafului G. Folosind inducția matematică după numărul de vârfuri, vom arăta că G poate fi desenat, astfel încât muchiile sale să fie segmente de dreaptă și vârfurile x, y și z să aparțină feței exterioare ale lui G. Pentru $n = 3$, afirmația teoremei este trivială. Presupunem că $n \geq 4$ și afirmația teoremei este satisfăcută pentru orice graf cu numărul de vârfuri mai mic decât n. Conform Propoziției 8.3.2, graful G conține cel puțin patru vârfuri gradele cărora nu întrec 5. Fie u un vârf interior al grafului G gradul căruia nu este mai mare decât 5 (Figura 8.3.2 (a)).

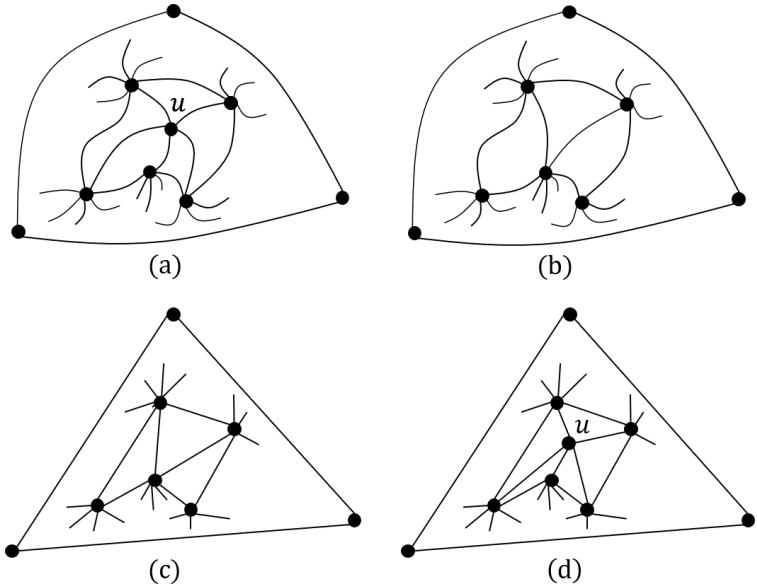


Figura 8.3.2

Construim un graf plan nou G' care se obține în urma eliminării vârfului v și triangulării feței f obținută după ștergerea lui u. Triangularea prevede adăugarea muchiilor (diagonalelor) suplimentare, astfel încât fața f să fie împărțită în triunghiuri (Figura 8.3.2 (b)). Prin urmare, graful G' este maximal planar cu $n-1$ vârfuri. În baza presupunerii inductive, G' poate fi desenat în plan, astfel încât toate muchiile sale să fie segmente de dreaptă și x, y și z să aparțină feței exterioare ale lui G' (Figura 8.3.2 (c)). Acum putem elimina muchiile adăugate în urma triangulării feței f și putem plasa vârful u în interiorul feței f, în așa fel încât fiecare vârf care aparține frontierei feței f să poată fi unit cu u printr-un segment inclus în interiorul feței f (Figura 8.3.2 (d)). Se verifică ușor că există o astfel de amplasare a vârfului u. Adăugăm muchiile (segmente de dreaptă) între vârful u și toate vârfurile ce aparțin frontierei feței f. □

8.4. Grafuri duale

Pentru orice graf plan $G = (V, E)$, poate fi construit un graf *dual* $G^* = (V^*, E^*)$ al grafului G. Regulile de construire ale grafului dual sunt următoarele:

1. Se amplasează câte un vârf în fiecare față a grafului G. Aceste vârfuri formează mulțimea vârfurilor V^* a grafului dual G^*.
2. Pentru fiecare muchie e ce aparține frontierei a două fețe f_i și f_j ale lui G, se adaugă o muchie e^* în G^* ce unește vârfurile din V^* asociate fețelor f_i și f_j. Pentru fiecare muchie e ce aparține doar unei fețe f_i, se adaugă o bucla e^* în G^* cu extremitățile în vârful din V^* asociat feței f_i.

Este clar că dualul grafului plan la fel este un graf plan. Un exemplu de graf plan G și dual sau G^* este prezentat in Figura 8.4.1.

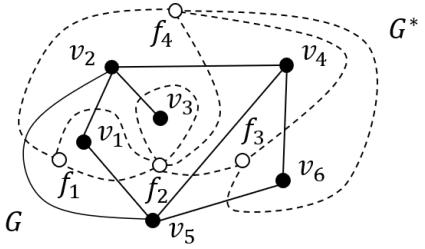


Figura 8.4.1. *Graf plan G și graf dual G^**

Propoziția 8.4.1. *Dacă graful plan G are n vârfuri, m muchii și f fețe, iar dualul său G^* are n^* vârfuri, m^* muchii și f^* fețe, atunci din definiția grafului dual rezultă:*

$$n^* = f, m^* = m, f^* = n.$$

Teorema 8.4.1. *Dacă G^* este dualul grafului plan G, atunci G^* este conex.*

Demonstrație. Fie f_1 și f_2 două fețe ale grafului G, și p_1 un punct arbitrar amplasat în interiorul feței f_1, iar p_2 un punct arbitrar amplasat în interiorul feței f_2. Este absolut firesc că există o curbă simplă care unește punctele p_1 și p_2 și nu trece prin niciun vârf al grafului G. Acestei curbe în G^* îi corespunde un lanț ce unește vârfurile asociate cu fețele f_1 și f_2 în G^*. De unde rezultă că G^* este conex. □

Propoziția 8.4.2. *Fie G^* este dualul grafului plan G, iar G^{**} este dualul lui G^*. Atunci G^{**} este izomorf cu G.*

Demonstrație. Din Propoziția 8.4.1 obținem egalitatea $n^{**} = f^* = n$, unde $n^{**} = |V(G^{**})|$. Prin urmare, fiecare față a grafului G^* conține câte un vârf al lui G (G^{**}). În consecință, graful G (G^{**}) poate fi obținut din G^* cu ajutorul procedurii de construire a grafului dual. □

Definiția 8.4.1. *Un graf plan se numește **autodual**, dacă el este izomorf cu dualul său.*

Un exemplu de graf autodual este arătat în Figura 8.4.2.

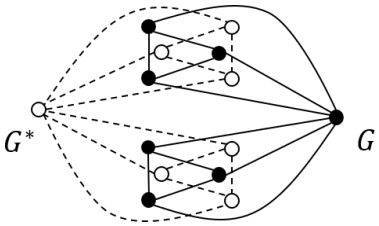


Figura 8.4.2. *Graf autodual G*

Definiția 8.4.2. *Graf planar se numește **exterior planar**, dacă el poate fi amplasat în plan, astfel încât toate vârfurile sale să aparțină frontierei feței exterioare. O astfel de amplasare se numește **exterioară**.*

Muchia amplasării exterioare a grafului exterior planar o vom numi *exterioară* (*interioară*), dacă ea este amplasată pe frontiera feței exterioare (nu este amplasată pe frontiera feței exterioare).

În Figura 8.4.3 (a) este prezentat un graf exterior planar G, iar în Figura 8.4.3 (b) este prezentată o amplasare exterioară a grafului G.

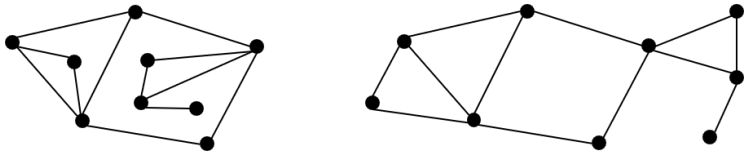


Figura 8.4.3. *Graf exterior planar G* (a); *amplasarea exterioară a lui G* (b)

Definiția 8.4.3. *Graful **slab dual** al grafului plan G este un subgraf al grafului dual al lui G, indus de mulțimea de vârfuri care corespund fețelor interioare ale grafului G.*

În Figura 8.4.4 este ilustrat graful slab dual al amplasării exterioare a grafului 2-conex exterior planar. Vârfurile grafului 2-conex exterior planar sunt colorate cu negru, iar vârfurile grafului slab dual cu alb.

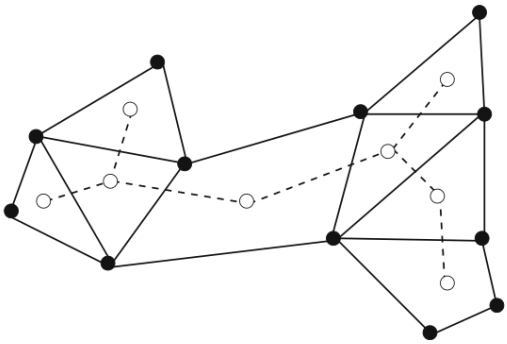


Figura 8.4.4. *Graf 2-conex exterior planar și graf slab dual al său*

Teorema 8.4.2. *Graful slab dual al amplasării exterioare a grafului 2-conex exterior planar este un arbore.*

Demonstrație. Fie G un graf 2-conex exterior planar și G' o amplasare exterioară a lui G. Deoarece G' este 2-conex, frontiera feței exterioare a lui G' este un ciclu elementar C și toate fețele interioare se află în interiorul ciclului C. De aici, se obține că oricare două fețe interioare vecine (fețe care au muchii comune) au o singură muchie comună. Rezultă că graful slab dual T al grafului G' este conex. Rămâne de arătat că T nu conține cicluri. Presupunem că T conține un ciclu, dar în acest caz în G' trebuie să

existe un vârf interior v, ceea ce vine în contradicție cu amplasarea exterioară a grafului exterior planar. □

Consecința 8.4.1. *Orice graf* 2*-conex exterior planar conține cel puțin două vârfuri de gradul* 2*.*

Demonstrație. Fie G un graf 2-conex exterior planar și G' o amplasare exterioară a lui G. Fie T este graful slab dual al lui G'. Din Teorema 8.4.2 rezultă că T este un arbore. Se observă că fiecărui vârf suspendat al lui T îi corespunde un vârf de gradul 2 în G', iar orice arbore ordinul căruia este mai mare decât unu are cel puțin două vârfuri suspendate. Dacă T constă dintr-un singur vârf, atunci G' este un ciclu de lungime nu mai mică de 3. Aceasta înseamnă că G' conține cel puțin trei vârfuri de gradul 2. Deci, consecința este demonstrată. □

8.5. Probleme și sarcini

1. Amplasați în plan graful G din Figura 8.5.1. Determinați câte fețe are graful plan corespunzător grafului G

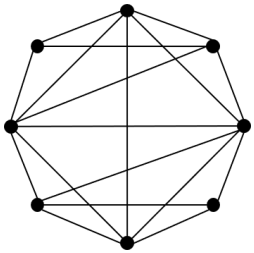
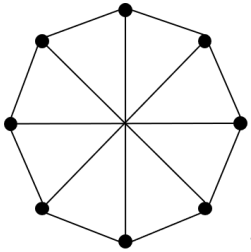


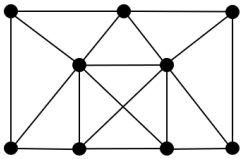
Figura 8.5.1

2. Demonstrați corectitudinea Consecinței 8.3.1.
3. Verificați afirmația: există două grafuri maximal planare cu n vârfuri care nu sunt izomorfe.
4. Redesenați graful din Figura 8.5.1, astfel încât graful să rămână plan și toate muchiile acestuia să fie segmente de dreaptă.
5. Desenați graful dual al grafului din Figura 8.4.3 (b).
6. Arătați că gradul mediu al vârfurilor grafului planar este mai mic decât 6.
7. Demonstrați că orice graf plan cu $f \geq 2$ fețe are cel puțin $\frac{f}{2} + 2$ vârfuri.

8. Determinați pentru ce valori ale lui n, graful K_n este autodual.
9. Arătați că pentru orice graf plan și neconex formula lui Euler poate fi extinsă astfel:
$$n - m + f = k + 1,$$
unde k este numărul de componente conexe ale grafului.
10. Fie G un graf 4-regulat (gradul fiecărui vârf este 4) cu 16 vârfuri. Presupunem că o amplasare în plan a grafului G conține doar fețele mărginite de cicluri de lungimea 3 (triunghiuri) și de lungimea 4. Determinați numărul fețelor care formează triunghiuri.
11. Un graf exterior planar care conține numărul maxim de muchii pentru un număr dat de vârfuri se numește *maximal exterior planar*. Fie G un graf maximal exterior planar cu $n \geq 3$ vârfuri și G' o amplasare exterioară a lui G. Arătați că G' conține $n - 2$ fețe interioare și $n - 3$ muchii interioare.
12. Arătați cu ajutorul criteriului de planaritate al lui Kuratowski că grafurile din Figura 8.5.2 nu sunt planare.



G_1



G_2

Figura 8.5.2

13. Arătați că orice graf care conține cel mult 3 cicluri este planar.

9. Colorarea grafurilor

9.1. Colorarea vârfurilor

Definiția 9.1.1. *O* ***k-colorare a vârfurilor*** *grafului* $G = (V, E)$ *poate fi definită ca o funcție* $f: V \to \{1,2, \dots, k\}$. *Numărul* $f(v)$ *asociat vârfului* v *se numeşte* ***culoarea*** *acestui vârf.*

Definiția 9.1.2. *O* k*-colorare a vârfurilor, determinată de funcția* $f: V \to \{1,2, \dots, k\}$ *se numeşte* ***corectă****, dacă pentru orice două vârfuri adiacente* u *şi* v *ale grafului* $G = (V, E)$ *are loc relația* $f(u) \neq f(v)$. *Un graf care admite o* k*-colorare corectă a vârfurilor se numeşte* ***k-colorabil.***

Definiția 9.1.3. *Numărul minim* k *pentru care graful* G *este* k*-colorabil se numeşte* ***număr cromatic*** *al grafului* G *şi se notează prin* $\chi(G)$.

Dacă $\chi(G) = k$, atunci graful $G = (V, E)$ este numit k*-cromatic*. Din definiția numărului cromatic rezultă că $n \geq \chi(G) \geq \varphi(G)$, unde $n = |V|$.

Definiția 9.1.4. *Dacă* $\chi(H) < \chi(G) = k$ *pentru fiecare subgraf* H *al grafului* G, $H \neq G$, *atunci* G *se numeşte* ***k-critic colorabil*** *sau* ***k-critic****.*

În general, o k-colorarea corectă a vârfurilor grafului $G = (V, E)$ induce o divizare a mulțimii de vârfuri V în k submulțimi V_i, $1 \leq i \leq k$, care satisface o serie de proprietăți:

1) $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_k$;
2) $V_i \neq \emptyset$ pentru orice $i \in \{1,2, \dots, k\}$;
3) $V_i \cap V_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$, $i, j \in \{1,2, \dots, k\}$;
4) fiecare mulțime V_i, care se va numi în continuare *clasă de culori*, este stabilă interior în G.

Graful Petersen G din Figura 9.1.1 este 3-colorabil. Mai mult decât atât, G este 3-cromatic. O 3-colorare corectă a vârfurilor lui G are următoarele clase de culori:

$$V_1 = \{v_1, v_3, v_8, v_9\}, V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}, V_3 = \{v_2, v_7, v_{10}\}.$$

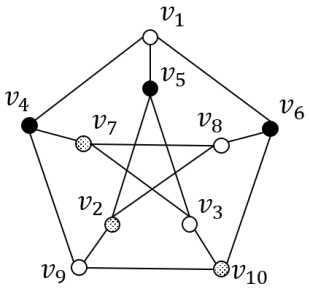


Figura 9.1.1. 3-*colorarea vârfurilor grafului Petersen*

În legătură cu studierea problemei colorării grafului, apare problema estimării numărului cromatic. În caz general, această problemă este dificilă. De aceea, un interes deosebit reprezintă estimările numărului cromatic exprimate prin diverși parametri ai grafului, care pot fi calculate relativ ușor. Vom menționa unele estimări ale numărului cromatic. Pentru aceasta avem nevoie de următoarele două rezultate prezentate în Lemele 9.1.1 și 9.1.2.

Lema 9.1.1. *Fiecare graf k-cromatic $G = (V, U)$ are un subgraf k-critic.*

Demonstrație. Ștergem din graful G muchii, una câte una, atâta timp cât ștergerea unei muchii arbitrare nu produce un număr cromatic mai mic al grafului. Astfel graful rămas este k-critic. □

Lema 9.1.2. *Pentru orice graf k-critic G, are loc relația $\delta(G) \geq k - 1$.*

Demonstrație. Presupunem contrariul, adică există un vârf v pentru care $\deg(v) \leq k - 2$. Întrucât G este k-critic, atunci $\chi(G - v) < \chi(G) = k$. Aceasta implică faptul că graful $G - v$ poate fi colorat corect cu $k - 1$ culori. Colorăm vârfurile grafului $G - v$ cu $k - 1$ culori. Deoarece $\deg(v) \leq k - 2$, vârful v poate fi colorat cu una din cele $k - 1$ culori care nu a fost utilizată la colorarea vârfurilor adiacente cu v în G. Astfel, am obținut o colorare corectă a vârfurilor grafului G cu $(k - 1)$ culori, ceea ce contrazice egalitatea $\chi(G) = k$. Deci, $\delta(G) \geq k - 1$. □

Vom nota prin $F(G)$ familia subgrafurilor generate de toate submulțimile de vârfuri ale grafului G. Menționăm că $F(G)$ include și graful G.

Teorema 9.1.1. *Pentru orice graf G, este adevărată relația:*

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{H \in F(G)} \delta(H).$$

Demonstrație. Ținând cont de Lema 9.1.1, fie $\chi(G) = k$ și H' un subgraf k-critic al lui G. Din Lema 9.1.2 imediat obținem:

$$\chi(G) - 1 = \chi(H') - 1 \leq \delta(H') \leq \max_{H \in F(G)} \delta(H).$$

Teorema este demonstrată. □

Consecința 9.1.1. *Pentru orice graf G, este adevărată relația:*

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G).$$

Teorema 9.1.2. *Pentru orice graf $G = (V, E)$, sunt adevărate inegalitățile:*

$$\frac{n}{\alpha_0} \leq \chi \leq n - \alpha_0 + 1, \tag{9.1}$$

unde $n = |V|$, $\alpha_0 = \alpha_0(G)$, $\chi = \chi(G)$.

Demonstrație. Există o colorare corectă a vârfurilor grafului G care determină divizarea mulțimii V în χ clase de culori $V_1, V_2, \dots, V_\chi$. Deoarece fiecare mulțime V_i, $1 \leq i \leq \chi$, este stabilă interior și $|V_i| \leq \alpha_0$, se obține $n = \sum_{i=1}^{\chi} |V_i| \leq \chi\alpha_0$, de unde rezultă inegalitatea $\frac{n}{\alpha_0} \leq \chi$.

Fie S o mulțime stabilă interior a grafului G care conține exact α_0 vârfuri. Întrucât $|V \backslash S| = n - \alpha_0$, are loc inegalitatea $\chi(G - S) \leq n - \alpha_0$ și deci $\chi \leq n - \alpha_0 + 1$. □

Teorema 9.1.3. *Pentru orice trei numere naturale n, α_0 și χ care satisfac relația* (9.1)*, există un graf $G = (V, E)$ astfel încât $n = |V|$, $\alpha_0 = \alpha_0(G)$, $\chi = \chi(G)$.*

Demonstrație. Urmează să analizăm trei cazuri: 1) $\alpha_0 = 1$; 2) $\alpha_0 > 1$ și $n = \alpha_0 p$, unde p este un număr întreg; 3) $\alpha_0 > 1$ și n nu este divizibil cu α_0.

1) Din (9.1) se obține $\chi = n$. În calitate de graf potrivit poate servi un graf complet K_n pentru care $\alpha_0(K_n) = 1 = \alpha_0$ și $\chi(K_n) = n = \chi$.

2) Fie $G = (V, E)$ un graf p-partit complet, fiecare parte a căruia conține exact α_0 vârfuri. Atunci, $\chi(G) = p = \frac{n}{\alpha_0}$. Alegem o parte arbitrară V^* a grafului G și fiecare vârf al lui G care nu aparține mulțimii V^* îl înlocuim cu un alt vârf adiacent cu toate celelalte vârfuri ale lui G. La fiecare pas al acestei proceduri, numărul cromatic al grafului va crește cu o unitate. În final, vom avea un graf $(n - \alpha_0 + 1)$-partit G', toate părțile căruia, în afară de V^*, sunt formate dintr-un singur vârf. În consecință, $\chi(G') = n - \alpha_0 + 1$.

3) Dacă n nu este divizibil cu α_0, atunci inițial se ia un graf $\left(\left\lfloor\frac{n}{\alpha_0}\right\rfloor + 1\right)$-partit complet cu n vârfuri, $\left\lfloor\frac{n}{\alpha_0}\right\rfloor$ părțile căruia conțin câte α_0 vârfuri. Dintre aceste părți selectăm o parte arbitrară V^* și procedăm în același mod ca și în cazul 2). □

Este bine cunoscută problema celor patru culori care sună în felul următor: Sunt oare suficiente patru culori pentru a colora o hartă politică, astfel încât două țări de frontieră comună să fie colorate diferit. Această problemă a fost formulată ca ipoteză în anul 1878 de matematicianul englez A. Cayley.

Harta politică poate fi reprezentată cu ajutorul unui graf plan. Vârfurile unui astfel de graf plan reprezintă țările ilustrate pe hartă, iar muchiile – hotarele dintre țările respective. De exemplu, în Figura 9.1.2 (a) este reprezentată harta schematică a statelor de vest ale Statelor Unite ale Americii colorată corect cu patru culori, iar în Figura 9.1.2 (b) – graful plan ce corespunde acestei hărți.

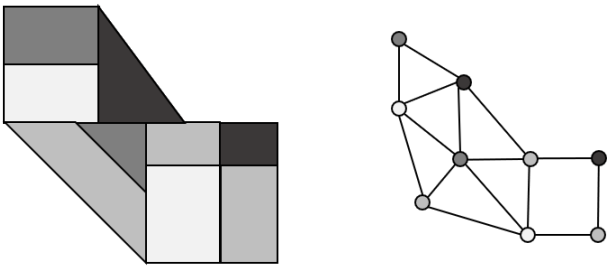
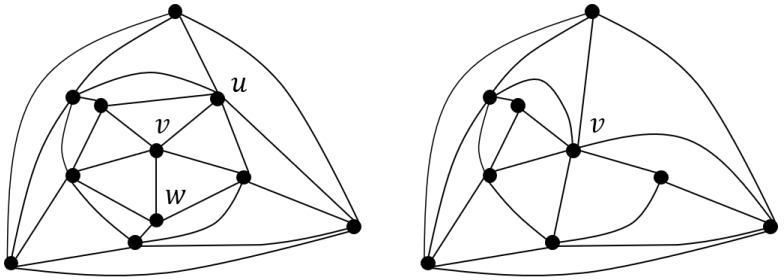


Figura 9.1.2. *Harta statelor de vest ale SUA colorată cu patru culori* (a) *și graful plan care corespunde acestei hărți* (b)

Teorema 9.1.4. *Orice graf planar este* 5*-colorabil.*

Demonstrație. Vom demonstra teorema prin inducție după numărul de vârfuri. Evident, pentru grafuri planare cu $n \leq 5$ vârfuri, afirmația teoremei este adevărată. Considerăm că G este un graf planar cu $n > 5$ vârfuri și orice graf planar cu un număr mai mic de vârfuri este 5-colorabil. Din Propoziția 8.3.2, G conține cel puțin un vârf, fie v, de gradul cel mult 5. Vom analiza două cazuri:

1) $\deg(v) \leq 4$. Graful $G' = G - v$ este 5-colorabil. Colorăm vârfurile lui G' cu 5 culori. În această colorare vârfurile adiacente cu v sunt colorate cu cel mult 4 culori distincte. Deci, vârful v poate fi colorat cu una din cele 5 culori care nu a fost utilizată la colorarea vârfurilor adiacente cu v.



(a) (b)

Figura 9.1.3

2) $\deg(v) = 5$. Ținând cont de criteriul de planaritate al lui Kuratowski, graful G nu conține subgrafuri homeomorfe cu K_5. De aici, în $N(v)$ există două vârfuri neadiacente, pe care le notăm cu u și w (Figura 9.1.3 (a)). Aplicăm operația de contracție pentru muchiile (v, u) și (v, w). Ca rezultat se obține graful planar G' cu $n - 2$ vârfuri și care e 5-colorabil (Figura 9.1.3. (b)). Fixăm o 5-colorare corectă a lui G'. Restabilim acum cele două muchii, atribuind vârfurilor u și w culoarea vârfului v din G'. O 5-colorare corectă a lui G se obține prin colorarea vârfului v cu o culoare diferită de cele 4 culori utilizate la colorarea vârfurilor adiacente cu v. Astfel, graful planar G e 5-colorabil. □

În general, problema celor patru culori a rămas nerezolvată timp de un secol fiind surprinzător de grea și a suscitat preocuparea multor matematicieni de prestigiu. Prima demonstrație a ipotezei a fost propusă

de matematicianul A. Kempe în 1879, însă în 1890 demonstrația lui Kempe a fost combătută. Problema a fost rezolvată abia în anul 1976 de către K. Appel și W. Haken, demonstrația fiind efectuată cu ajutorul calculatorului și formalizată pe sute de pagini cu demonstrații matematice, mii de afirmații și diagrame. În acest fel, nu numai că nu e dată o demonstrație matematică veritabilă, dar există suspiciuni că aceasta ar putea fi una eronată.

9.2. Colorarea muchiilor

Definiția 9.2.1. *Funcția f, care pune în corespondență fiecărei muchii e din G un număr din mulțimea $\{1,2,\dots,k\}$ se numește* ***k-colorare a muchiilor*** *grafului G. Numărul $f(e)$ asociat muchiei e se numeşte* ***culoarea*** *muchiei e.*

Colorarea muchiilor grafului G este *corectă*, dacă muchiile adiacente ale lui G au culori distincte. În Figura 9.2.1 este ilustrată 4-colorare corectă a muchiilor grafului Petersen.

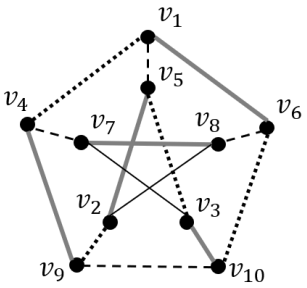


Figura 9.2.1. *Colorarea muchiilor grafului Petersen cu patru culori*

Definiția 9.2.2. *Numărul minim k pentru care muchiile grafului G pot fi colorate corect cu k culori se numeşte* ***indice cromat*** *al grafului G şi se notează prin $\chi'(G)$.*

Din definiția indicelui cromatic rezultă că $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, unde $\Delta(G)$ este gradul maxim al vârfurilor grafului G.

Deoarece muchiile unui graf G sunt adiacente dacă și numai dacă vârfurile corespunzătoare lor în graf al muchiilor $L(G)$ sunt adiacente, indicele cromatic al lui G poate fi privit ca număr cromatic al grafului $L(G)$,

adică $\chi'(G) = \chi\big(L(G)\big)$. Evident, într-o colorare corectă a muchiilor grafului muchiile colorate cu aceeași culoare formează un cuplaj, deci $\chi'(G)$ poate fi tratat ca numărul minim de cuplaje în care poate fi divizată mulțimea muchiilor grafului G.

Teorema 9.2.1. (Vizing) *Pentru orice graf G, sunt adevărate următoarele inegalități:*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Demonstrația Teoremei 9.2.1 se omite.

Teorema 9.2.2. *Sunt adevărate următoarele relații:*

1) $\chi'(K_{2n+1}) = \Delta(K_{2n+1}) + 1 = 2n + 1$;

2) $\chi'(K_{2n}) = \Delta(K_{2n}) = 2n - 1$.

Demonstrație. Vom demonstra mai întâi prima egalitate. Fie $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k = E(K_{2n+1})$ este o divizare a mulțimii de muchii a grafului K_{2n+1} în k clase de culori care determină o k-colorare corectă a muchiilor grafului K_{2n+1}. Deoarece muchiile unei clase de culori formează un cuplaj, pentru orice i, $1 \leq i \leq k$, are loc relația

$$|E_i| \leq \left\lfloor \frac{|V(K_{2n+1})|}{2} \right\rfloor = n$$

care implică următoarele:

$$k \geq \frac{|E(K_{2n+1})|}{\max\limits_{1 \leq i \leq k} |E_i|} \geq \frac{|E(K_{2n+1})|}{n} = \frac{(2n+1)2n}{2n} = 2n + 1.$$

Având în vedere afirmația Teoremei 9.2.1, obținem egalitatea $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$.

În continuare, vom demonstra cea de-a doua egalitate. Fie v un vârf arbitrar al grafului K_{2n}. Să analizăm graful $G = K_{2n} - v = K_{2n-1}$. Ținând cont de cele obținute mai sus, muchiile grafului G pot fi colorate corect cu $2n - 1$ culori. Fie u un vârf arbitrar al grafului G. Gradul fiecărui vârf al grafului G este egal cu $2n - 2$. Prin urmare, o oarecare culoare din $(2n - 1)$-colorare corectă a muchiilor lui G nu atinge vârful u. Pe de altă parte, mulțimea tuturor muchiilor colorate cu o culoare, fie c_i, formează un cuplaj al grafului G. Datorită faptului că G conține un număr impar de vârfuri, există un vârf, fie u_i, care nu este atins de culoarea c_i. De aici

rezultă că culorile care nu ating vârfurile grafului sunt diferite două câte două. Pentru a obține o colorare corectă a muchiilor grafului K_{2n}, rămâne de colorat fiecare muchie (v, u_i) cu culoarea de care nu se atinge vârful u_i. □

Teorema 9.2.3. *Dacă G este un graf bipartit, atunci $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Demonstrație. Vom demonstra teorema folosind inducția matematică după numărul de muchii în G. Presupunem că toate muchiile grafului G cu excepția muchiei (v, w) sunt colorate corect cu $\Delta(G)$ culori. Atunci vârful v nu este atins de o oarecare culoare a din $\Delta(G)$ culori folosite la colorarea muchiilor, iar vârful w nu este atins de o culoare b. Dacă $a = b$, atunci muchia (v, w) poate fi colorată cu culoare a. Dacă $a \neq b$, atunci definim subgraful $H_{a,b}$ al grafului G format din vârful v și toate vârfurile și muchiile din G la care se poate de ajuns din v folosind lanțul, muchiile căruia sunt colorate cu a și b (Figura 9.2.2).

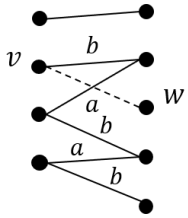


Figura 9.2.2

Întrucât G este bipartit, vârful w nu aparține lui $H_{a,b}$. Așadar, putem interschimba culorile a și b în subgraful $H_{a,b}$ fără a afecta colorarea corectă a muchiilor deja colorate. Acum muchia (v, w) poate fi colorată cu culoarea b, astfel încât toate muchile lui G să fie colorate corect cu $\Delta(G)$ culori. □

9.3. Polinomul cromatic

În general, un graf poate avea mai multe k-colorări corecte ale vârfurilor.

Definiția 9.3.1. *Numărul de k-colorări corecte distincte ale vârfurilor grafului G se numește* ***funcție cromatică*** *sau* ***polinom cromatic*** *al lui G și se notează $P(G, k)$.*

Evident că valoarea minimă a lui k pentru care $P(G,k) \neq 0$ este $\chi(G)$. Pentru unele tipuri de grafuri, funcția $P(G,k)$ se determină relativ simplu. Astfel, în colorarea corectă a grafului complet K_n primul vârf poate fi colorat cu oricare din cele k culori, iar pentru colorarea oricărui vârf următor se permite să se utilizeze cu o culoare mai puțin decât pentru cel precedent. Deci,

$$P(K_n,k) = \begin{cases} k(k-1)\dots(k-n+1), & k \geq n; \\ 0, & k < n. \end{cases}$$

Vom cerceta câteva propoziții care simplifică determinarea polinomului cromatic.

Propoziția 9.3.1. *Dacă $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_l$ este reuniunea disjunctă a grafurilor, atunci*

$$P(G,k) = \prod_{i=1}^{l} P(G_i,k).$$

Demonstrație. Afirmația rezultă din faptul că colorarea vârfurilor fiecărui subgraf G_i al lui G se alege independent de celelalte. □

Propoziția 9.3.2. *Dacă $G = G_1 \cup G_2$ și grafurile G_1 și G_2 au un singur vârf comun, atunci*

$$P(G,k) = \frac{1}{k} P(G_1,k)P(G_2,k).$$

Demonstrație. Alegem o colorare corectă f_1 a vârfurilor grafului G_1. Pentru a extinde f_1 cu scopul de a obține colorare corectă a vârfurilor grafului G, trebuie să se aleagă o astfel de colorare corectă f_2 a vârfurilor grafului G_2, în care culoarea $f_1(v)$ a lui v, comun pentru G_1 și G_2, coincide cu culoarea $f_2(v)$. Deoarece numărul k-colorărilor corecte ale vârfurilor grafului G_2, în care culoarea vârfului v este fixată, nu depinde de această culoare, pentru alegerea colorării f_2 există $\frac{P(G_2,k)}{k}$ posibilități. De aici rezultă relația cerută. □

Propoziția 9.3.3. *Fie u și v două vârfuri neadiacente ale grafului G. Dacă $G_1 = G + (u,v)$, iar G_2 se obține din G_1 în urma contracției muchiei (u,v), atunci*

$$P(G,k) = P(G_1,k) + P(G_2,k).$$

Demonstrație. Numărul k-colorărilor corecte ale vârfurilor grafului G în care culorile vârfurilor u și v sunt distincte nu se va schimba, dacă în G se va adăuga muchia (u, v). Deci, acest număr este egal cu $P(G_1, k)$. Analog, numărul k-colorărilor corecte ale vârfurilor grafului G, în care culorile vârfurilor u și v coincid, este egal cu $P(G_2, k)$. Însumând aceste valori, obținem numărul tuturor k-colorărilor corecte ale vârfurilor grafului G, adică $P(G, k) = P(G_1, k) + P(G_2, k)$. □

Propoziția 9.3.3 reduce calculul polinomului cromatic $P(G, k)$ al grafului arbitrar G la calculul polinoamelor cromatice ale grafurilor cu un număr mai mare de muchii sau cu un număr mai mic de vârfuri, și astfel în cele din urmă a polinoamelor cromatice ale grafurilor complete. Deci, are loc următoarea consecință.

Consecința 9.3.1. *Polinomul cromatic al grafului arbitrar G cu n vârfuri este egal cu suma polinoamelor cromatice a unui număr finit de grafuri complete de ordin cel mult n și are forma:*

$$P(G, k) = P(K_n, k) + a_1 P(K_{n-1}, k) + a_2 P(K_{n-2}, k) + \cdots$$

În baza grafului G din Figura 9.3.1, vom analiza metoda recursivă de calcul al polinomului cromatic.

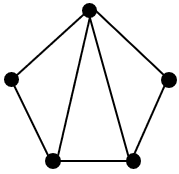


Figura 9.3.1

Pentru reprezentarea grafică a operației $P(G, k) = P(G_1, k) + P(G_2, k)$, vom scrie $G = G_1 \oplus G_2$ și vom desena grafurile corespunzătoare. Procesul construirii polinomului cromatic al grafului G este ilustrat în Figura 9.3.2.

Deci, avem

$$P(G, k) = P(K_5, k) + 3P(K_4, k) + P(K_3, k) =$$
$$= k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) +$$
$$+3k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2) =$$
$$= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k.$$

Prin substituția în locul lui k a unei valori concrete, se va obține numărul de colorări corecte și distincte ale vârfurilor grafului G. De exemplu, pentru $k = 4$, vom avea $P(G, 4) = 96$ de 4-colorări corecte și distincte ale vârfurilor grafului G.

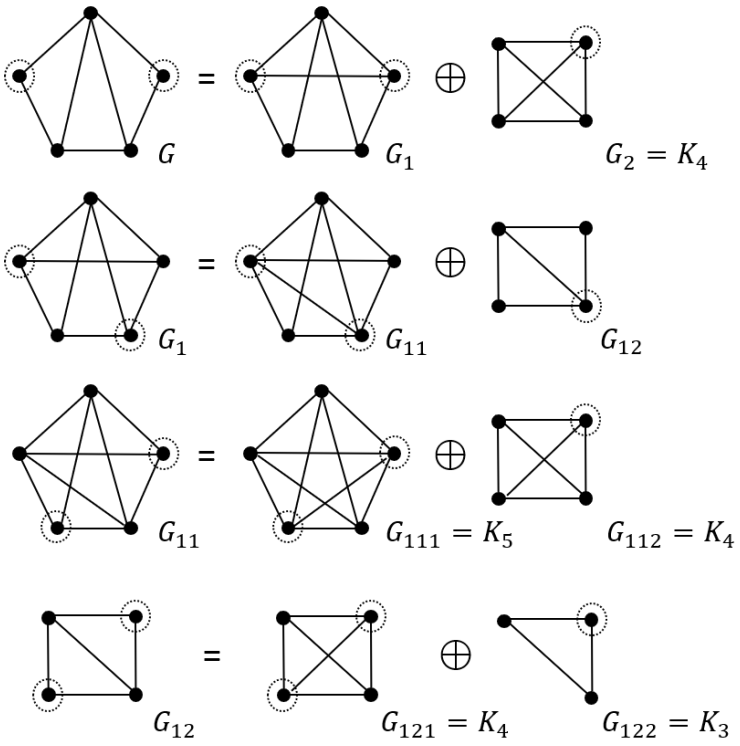
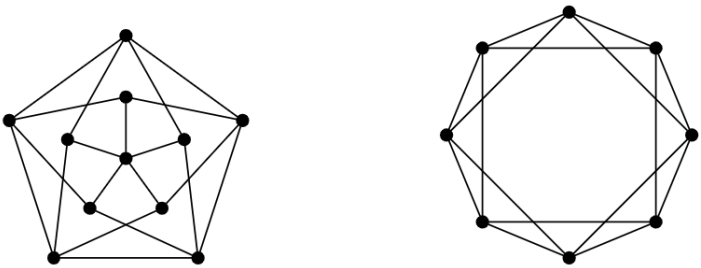


Figura 9.3.2

9.4. Probleme și sarcini

1. Determinați numărul cromatic $\chi(G)$ și indicele cromatic $\chi'(G)$ al grafurilor din Figura 9.4.1. Colorați corect vârfurile grafurilor în $\chi(G)$ culori și muchiile în $\chi'(G)$ culori.
2. Verificați afirmația: orice graf G poate fi colorat corect cu $\chi(G)$ culori, astfel încât $\alpha_0(G)$ vârfuri ale lui G să fie colorate cu aceeași culoare.

3. Verificat afirmația: dacă $\chi(G) \leq 4$, atunci G este un graf planar.
4. Demonstrați relația $\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$.
5. Demonstrați că dacă G este k-regulat, atunci $\chi(G) \geq \frac{n}{n-k}$.
6. Arătați că dacă G este un graf conex cu n vârfuri, m muchii și $m \leq n$, atunci $\chi(G) \leq 3$.
7. Arătați că orice graf G de ordinul 6 pentru care $\chi(G) = 3$ conține cel mult 12 muchii.
8. Fie G un graf plan, în care toate vârfurile aparţin frontierei unei feţe. Demonstrați că acest graf poate fi colorat corect cu ajutorul cel mult a trei culori.
9. Demonstrați că pentru orice graf G cu m muchii are loc relația $\chi(G)(\chi(G) - 1) \leq 2m$.
10. Verificați afirmația: dacă fiecare vârf al unui graf G are gradul egal cel mult cu k, atunci numărul cromatic al lui G verifică relația $\chi(G) \leq k + 1$.
11. Demonstrați că pentru un graf G de ordinul n are loc relația $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.
12. Demonstrați că polinomul cromatic pentru un arbore T_n este egal cu $P(T_n, k) = k(k-1)^{n-1}$.
13. Demonstrați că polinomul cromatic pentru un graf ciclu C_n este egal cu $P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.



G_1 G_2

Figura 9.4.1

10. Teoria lui Ramsey

10.1. Numere Ramsey

Teoria lui Ramsey se referă la studiul obiectelor combinatoriale și a condițiilor care se ocupă cu distribuția submulțimilor de elemente ale unei mulțimi. Obiectul principal de studiu în acest paragraf îl constituie grafurile complete ale căror muchii sunt colorate cu mai multe culori.

În cele ce urmează, un graf ale cărui muchii sunt colorate cu culoare roșie (albastră) îl vom numi *roșu* (*albastru*).

Definiția 10.1.1. *Pentru două numere naturale* p *și* q, ***numărul Ramsey*** $R(p,q)$ *asociat lor este cel mai mic număr* n, *astfel încât orice* 2*-colorare a muchiilor grafului* K_n *cu roșu și albastru să conțină un subgraf roșu* K_p *sau un subgraf albastru* K_q.

În anul 1930, matematicianul englez Frank P. Ramsey a demonstrat că numărul $R(p,q)$ există, adică este finit. În profida capacității de calcul a calculatoarelor performante, puținele valori exacte ale numerelor Ramsey sunt cunoscute. Sunt triviale următoarele relații:

$$R(p,1) = R(1,q),\ R(p,q) = R(q,p).$$

Teorema 10.1.1. $R(3,3) = 6$.

Demonstrație. Fie că muchiile grafului K_6 sunt colorate arbitrar cu roșu și albastru și $V(K_6) = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$. Alegem un vârf oarecare v_1 al lui K_6. Cum v_1 este incident cu cinci muchii, rezultă că cel puțin trei dintre aceste cinci muchii sunt colorate cu aceeași culoare (presupunem că aceasta este

culoarea roșie). Fie că muchiile (v_1, v_2), (v_1, v_3) și (v_1, v_4) sunt roșii (Figura 10.1.1 (a)). Dacă una din muchiile (v_2, v_3), (v_2, v_4) și (v_3, v_4) este roșie, atunci K_6 conține un subgraf K_3 roșu. În caz contrar, aceste trei muchii sunt albastre și ele generează un subgraf K_3 albastru (Figura 10.1.1 (b)).

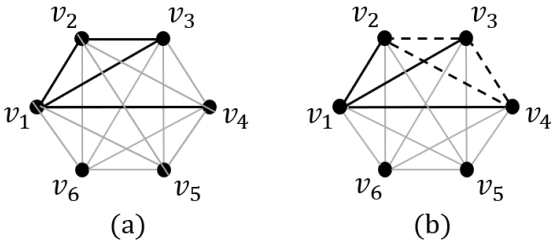


Figura 10.1.1. *Muchiile marcate cu linia neagră sunt colorate cu roșu, iar muchiile marcate cu linia întreruptă sunt colorate cu albastru*

Acum vom demonstra că $R(3,3) \geq 6$. Pentru aceasta, vom arăta că există o colorare a muchiilor grafului K_5 cu roșu și albastru, astfel încât K_5 să nu conțină niciun subgraf K_3 roșu sau albastru. Presupunem că $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Colorăm muchiile ciclului $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ cu roșu, iar celelalte muchii cu albastru (Figura 10.1.2). Se observă că într-o astfel de colorare a grafului K_5 nu există niciun subgraf K_3 roșu sau albastru. □

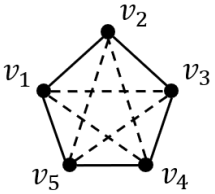


Figura 10.1.2. *Muchiile marcate cu linia neagră sunt colorate cu roșu, iar muchiile marcate cu linia întreruptă sunt colorate cu albastru*

Propoziția 10.1.1. *Pentru orice două numere naturale p și q, are loc relația:*

$$R(p, q) \geq max\{p, q\}.$$

Demonstrație. Fără a pierde din generalitate, fie că $p = max\{p, q\}$. Colorăm toate muchiile grafului K_{p-1} cu culoare roșie. Este limpede că

K_{p-1} nu conține niciun subraf K_p roșu și niciun subgraf K_q albastru. De aici, obținem relația $R(p,q) \geq max\{p,q\}$. □

Propoziția 10.1.2. *Pentru orice număr natural* $p \geq 2$, *are loc relația:*

$$R(2,p) = R(p,2) = p.$$

Demonstrație. Deoarece $p \geq 2$, din Propoziția 10.1.1 avem $R(2,p) \geq p$. Colorăm arbitrar muchiile grafului K_p cu roșu și albastru. Dacă în K_p există o muchie roșie, atunci se generează un subgraf K_2 roșu. Altfel, toate muchiile grafului K_p sunt albastre și se generează un subgraf K_p albastru, de unde se obține $R(2,p) \leq p$ și ca rezultat $R(2,p) = p$. În mod analog, se demonstrează că $R(p,2) = p$. □

Cu toate că numerele Ramsey $R(p,q)$ au fost studiate de zeci de ani, sunt cunoscute relativ puține valori exacte ale numerelor Ramsey. În general, determinarea valorilor exacte ale numerelor Ramsey este o problemă extrem de dificilă.

10.2. Estimări ale numerelor Ramsey

În această secțiune, vom determina estimările superioare și inferioare ale numerelor Ramsey.

Pentru mai multe numere Ramsey, sunt cunoscute estimările inferioare și superioare ale acestora. De exemplu:

$$43 \leq R(5,5) \leq 48,\ 36 \leq R(4,6) = R(6,4) \leq 41.$$

Teorema 10.2.1. (Erdős) *Pentru orice două numere naturale* $p \geq 2$ *și* $q \geq 2$, *are loc relația:*

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1).$$

Demonstrație. Fie că $a = R(p-1,q)$, $b = R(p,q-1)$ și $n = a + b$. Colorăm în mod arbitrar muchiile grafului K_n cu roșu și albastru. Alegem un vârf oarecare v al lui K_n. Printre $a + b - 1$ muchii incidente lui v există cel puțin a muchii roșii sau b muchii albastre. În primul caz (când există a muchii roșii incidente lui v), vârfurile cu care v este conectat prin intermediul muchiilor roșii formează subgraful K_a. Având în vedere relația $a = R(p-1,q)$, K_a conține un subgraf albastru K_q sau un subgraf roșu K_{p-1}, care împreună cu v formează un subgraf roșu K_p. În cel de al doilea

caz (când există b muchii albastre incidente lui v), analog se demonstrează existența unui subgraf roșu K_p sau a unui subgraf albastru K_q. □

Consecința 10.2.1. *Pentru orice două numere naturale* $p \geq 2$ *și* $q \geq 2$, *are loc relația:*

$$R(p,q) \leq C_{p+q-2}^{p-1}.$$

Demonstrație. Pentru $p = 2$ sau $q = 2$ relația este evidentă. Prin Teorema 10.2.1 și inducția după p și q obținem relația

$$R(p,q) \leq R(p-1,q) + R(p,q-1) \leq C_{p+q-3}^{p-2} + C_{p+q-3}^{p-1} = C_{p+q-2}^{p-1}.$$

Consecința este demonstrată. □

Teorema 10.2.2. (Erdős) *Pentru orice număr natural* $p \geq 2$, *are loc relația:*

$$2^{p/2} \leq R(p,p) < 2^{2p}.$$

Demonstrație. A doua inegalitate rezultă din Consecința 10.2.1:

$$R(p,p) \leq C_{2p-2}^{p-1} \leq 2^{2p-2} < 2^{2p}.$$

Vom demonstra prima inegalitate. Deoarece este clar că $R(2,2) = 2$, este suficient de analizat cazul $p \geq 3$. Fie $n = R(p,p) \leq 2^{p/2}$. Vom arăta că există cel puțin un graf de ordin n care nu conține subgrafuri K_p (care corespunde subgrafului roșu) și $\overline{K_p}$ (care corespunde subgrafului albastru). Aceasta va însemna că $2^{p/2} < R(p,p)$ pentru $p \geq 3$. Notăm prin $g(n,p)$ numărul de grafuri cu n vârfuri care conțin un subgraf complet K_p (este cunoscut că numărul total de grafuri care pot fi construite pe n vârfuri este $2^{C_n^2}$).

Vom număra grafurile care conțin un subgraf complet K_p în felul următor: există C_n^p modalități de alegere a vârfurilor care vor forma un subgraf complet K_p, adică se trasează muchiile dintre toate aceste vârfuri, iar celelalte muchii se trasează în mod arbitrar. Astfel, fiecare graf cu un subgraf K_p va fi numărat cel puțin o dată. Numărul grafurilor, ce conțin un subgraf K_p, nu întrece $C_n^p \cdot 2^{C_n^2 - C_p^2}$. Drept urmare, obținem

$$g(n,p) \leq \frac{n!}{p!\,(n-p)!} 2^{C_n^2 - C_p^2} < \frac{n^p \cdot 2^{C_n^2}}{p! \cdot 2^{C_p^2}}. \qquad (10.1)$$

Pentru $n \leq 2^{p/2}$ și $p \geq 3$ se verifică ușor relația:

$$n^p < \frac{1}{2} p!\, 2^{C_p^2}. \qquad (10.2).$$

Combinând relațiile (10.1) și (10.2), obținem

$$g(n,p) < \frac{1}{2} 2^{C_n^2}.$$

Numărul grafurilor cu n vârfuri care conțin subgrafuri K_p sau $\overline{K_p}$ nu întrece valoarea $2g(n,p) < 2^{C_n^2}$. În același timp, numărul total de grafuri cu n vârfuri este $2^{C_n^2}$. De aici putem deduce că există un graf G care nu conține subgrafuri K_p și $\overline{K_p}$. □

10.3. Numere Ramsey pentru grafuri arbitrare

În secțiunile precedente, a fost studiată varianta clasică a numerelor Ramsey $R(p,q)$. Vom introduce noțiunea generalizată a numerelor Ramsey.

Definiția 10.3.1. *Numărul Ramsey $R(G,H)$ asociat la două grafuri G și H este cel mai mic număr n, astfel încât orice 2-colorare a muchiilor grafului K_n cu roșu și albastru conține un subgraf roșu izomorf cu G sau un subgraf albastru izomorf cu H.*

De menționat că numărul Ramsey clasic $R(p,q)$ coincide cu $R(K_p, K_q)$.

Este evidentă următoarea propoziție:

Propoziția 10.3.1. Dacă G este un graf de ordin p și H este un graf de ordin q, atunci $R(G,H) \leq R(p,q)$.

Teorema 10.3.1. $R(K_{1,3}, C_4) = 6$.

Demonstrație. După cum se vede din Figura 10.1.2, în 2-colorare a muchiilor grafului K_5 cu roșu și albastru nu există niciun subgraf roșu $K_{1,3}$ și nici un subgraf albastru C_4. Așadar, $R(K_{1,3}, C_4) \geq 6$.

Rămâne de arătat că $R(K_{1,3}, C_4) \leq 6$. Fie că este dată o colorare arbitrară a lui K_6 și $V(K_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. Din Teorema 10.1.1 este cunoscut că $R(K_3, K_3) = 6$, adică în K_6 există un subgraf roșu sau albastru K_3. Să analizăm două cazuri.

1) Fie că în K_6 există un subgraf roșu K_3. Presupunem că v_1, v_2 și v_3 sunt vârfurile subgrafului roșu K_3. Dacă în K_6 nu există niciun subgraf roșu $K_{1,3}$, atunci orice muchie care are o extremitate în $\{v_1, v_2, v_3\}$ și cealaltă în $\{v_4, v_5, v_6\}$ este colorată cu albastru. Prin urmare, ciclul $(v_1, v_4, v_3, v_6, v_1)$ formează un subgraf albastru C_4.

2) Fie că în K_6 există un subgraf albastru K_3. Presupunem că v_1, v_2 și v_3 sunt vârfurile subgrafului albastru K_3. Dacă un vârf din $\{v_4, v_5, v_6\}$ este adiacent cu două vârfuri din $\{v_1, v_2, v_3\}$ prin intermediul muchiilor albastre, atunci există un ciclu albastru C_4. Dacă un oarecare vârf din $\{v_4, v_5, v_6\}$ este adiacent cu toate vârfurile din $\{v_1, v_2, v_3\}$ prin intermediul muchiilor roșii, atunci există un subgraf roșu $K_{1,3}$. Să presupunem că orice vârf din $\{v_4, v_5, v_6\}$ este adiacent cu un oarecare vârf din $\{v_1, v_2, v_3\}$ prin intermediul muchiei albastre și cu celelalte două vârfuri prin intermediul muchiilor roșii. Dacă una din muchiile (v_4, v_5), (v_4, v_6) și (v_5, v_6) este roșie, atunci există un subgraf roșu $K_{1,3}$. Altfel, putem presupune că v_4, v_5 și v_6 sunt vârfurile subgrafului albastru K_3. În acest caz, oricare două muchii albastre care unesc un vârf din $\{v_1, v_2, v_3\}$ și un vârf din $\{v_4, v_5, v_6\}$ aparțin unui ciclu albastru C_4. □

Teorema 10.3.2. *Pentru orice arbore T de ordinul m și un număr natural n, are loc relația:*

$$R(T, K_n) = (m-1)(n-1) + 1.$$

Demonstrație. Întâi de toate, vom arăta că $R(T, K_n) > (m-1)(n-1)$. Pentru aceasta considerăm un graf format din $(n-1)$ componente conexe izomorfe cu K_{m-1}, toate muchiile cărora sunt colorate cu roșu. Adăugăm la acest graf muchiile albastre până obținem $K_{(m-1)(n-1)}$. Dat fiind că fiecare subgraf conex roșu conține nu mai mult de $m-1$ vârfuri, graful construit $K_{(m-1)(n-1)}$ nu conține niciun subgraf T roșu. Graful generat de muchiile albastre este $(n-1)$-partit, ceea ce înseamnă că în graful construit $K_{(m-1)(n-1)}$ nu se conține niciun subgraf K_n albastru.

Egalitatea $R(T, K_n) = (m-1)(n-1) + 1$ o vom demonstra folosind inducția după n. Cazul $n = 1$ este trivial. Presupunem că $n \geq 2$ și teorema este adevărată pentru $R(T, K_t)$, pentru orice $t < n$. Dacă în $K_{(m-1)(n-1)+1}$ există un vârf v care este incident cu cel puțin $(m-1)(n-2) + 1$ muchii albastre, atunci conform ipotezei inductive

subgraful indus de mulțimea vârfurilor unite cu v prin intermediul muchiilor albastre conține un subgraf T roșu sau un subgraf K_{n-1} albastru. În primul caz, $K_{(m-1)(n-1)+1}$ conține un subgraf T roșu. În cel din urmă caz, subgraful albastru K_{n-1} împreună cu v formează un subgraf albastru K_n. Dacă orice vârf v din $K_{(m-1)(n-1)+1}$ este incident cu cel mult $(m-1)(n-2)$ muchii albastre, aceasta înseamnă că orice vârf v din $K_{(m-1)(n-1)+1}$ este incident cu cel puțin $m-1$ muchii roșii. Întrucât ordinul lui T este m, potrivit Teoremei 5.1.3 în $K_{(m-1)(n-1)+1}$ există un subgraf roșu izomorf cu T. □

10.4. Probleme și sarcini

1. Demonstrați că $R(3,4) = 9$.
2. Demonstrați că $R(3,5) \leq 14$.
3. Determinați valoarea numărului Ramsey $R(P_3, P_3)$.
4. Determinați valoarea numărului Ramsey $R(P_3, K_3)$.
5. Determinați valoarea numărului Ramsey $R(P_3, C_4)$.
6. Determinați valoarea numărului Ramsey $R(K_{1,3}, P_3)$.
7. Determinați valoarea numărului Ramsey $R(C_4, C_4)$.
8. Demonstrați că $R(K_{1,3}, K_{1,3}) = 6$.

11. Grafuri orientate

11.1. Introducere în grafuri orientate

Definiția 11.1.1. *Perechea de mulțimi* $\vec{G} = (V, \vec{E})$*, unde* V *este o mulțime nevidă de elemente distincte, iar* $\vec{E}$ *este o mulțime formată din perechi ordonate de elemente din* V*, se numește* ***graf orientat****.*

Dacă din context este clar că e vorba de un graf orientat, atunci săgețile respective pot fi omise. Elementele mulțimii $\vec{E}$ se numesc *arce*. În graful orientat perechile de vârfuri (u, v) și (v, u) reprezintă arce diferite. Pentru arcul $\vec{e} = (u, v)$, vârful u este *extremitate inițială*, iar vârful v *– extremitate finală*. Se spune că arcul $\vec{e} = (u, v)$ este orientat de la u spre v. Vârful u se mai numește *predecesorul vârfului* v, iar v *– succesorul vârfului* u. Graful orientat, în care dacă există arcul (u, v), atunci există și arcul (v, u), se numește *simetric*. Graful orientat cu proprietatea că dacă există arcul (u, v), atunci nu există arcul (v, u), se numește *antisimetric*. În cazul reprezentării geometrice a unui graf orientat, arcele sunt reprezentate cu ajutorul liniilor înzestrate cu săgeți, care corespund orientării arcelor. În Figura 11.1.1 este ilustrat un graf orientat.

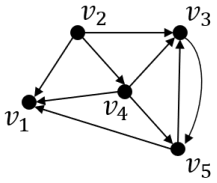


Figura 11.1.1. *Graf orientat*

Dacă v este un vârf al grafului orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$, atunci cardinalul mulțimii $N^+(v) = \{u \in V: (v,u) \in \vec{E}\}$ se numește *semigrad exterior*, iar cardinalul mulțimii $N^-(v) = \{u \in V: (u,v) \in \vec{E}\}$ se numește *semigrad interior* al vârfului v. Semigradul exterior se notează prin $\deg^+(v)$ sau $g^+(v)$, iar semigradul interior – prin $\deg^-(v)$ sau $g^-(v)$. Observăm că $\deg^+(v)$ și $\deg^-(v)$ reprezintă respectiv numărul succesorilor și al predecesorilor vârfului v. Gradul unui vârf v al grafului orientat se formează din semigradul exterior și semigradul interior și se definește astfel: $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$. De exemplu, pentru graful din Figura 11.1.1, $\deg^-(v_3) = 3$ și $\deg^+(v_5) = 2$.

Propoziția 11.1.1. *Pentru un graf orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$, este adevărată relația:*

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v).$$

Propoziția 11.1.1 se demonstrează în mod analog cu Teorema 1.1.1.

Definiția 11.1.1. *Într-un graf orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$ o succesiune de vârfuri $L = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ se numește **lanț orientat**, dacă $(v_i, v_{i+1}) \in \vec{E}$ pentru $i = \overline{1,k}$. Numărul k este **lungimea** lanțului orientat L.*

În mod analog se definește și *ciclul orientat* al unui graf orientat și lungimea acestui ciclu. Lanțul (ciclul) orientat se numește *elementar*, dacă toate vârfurile sale sunt distincte.

Fie u și v două vârfuri ale grafului orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$. Se spune că vârful u *este accesibil* din v, dacă există un lanț orientat de la vârful v la vârful u. Fie S o submulțime de vârfuri a grafului orientat $\vec{G}$. Notăm prin $A(S)$ mulțimea tuturor arcelor $(u,v) \in \vec{E}$ pentru care $u \in S$ și $v \in V \backslash S$, unde $S \subset V$.

Teorema 11.1.1. *Fie u și v două vârfuri ale grafului orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$. Atunci u este accesibil din v în $\vec{G}$ dacă și numai dacă $A(S) \neq \emptyset$ pentru orice submulțime $S \subset V$ care conține v și nu conține u.*

Demonstrație. Mai întâi, să presupunem că u este accesibil din v, adică există un lanț orientat L de la v la u. Să considerăm o submulțime $S \subset V$

care conține v și nu conține u. Fie x este ultimul vârf al lui L care aparține mulțimii S și fie y succesorul vârfului x în L. Atunci $(x, y) \in A(S)$, de unde rezultă că $A(S) \neq \emptyset$.

Acum să presupunem că u nu este accesibil din v și fie S este mulțimea tuturor vârfurilor accesibile din v. Atunci $v \in S$ și $u \notin S$. În plus, deoarece niciun vârf din $V \backslash S$ nu este accesibil din v, obținem $A(S) = \emptyset$. □

11.2. Cicluri euleriene și hamiltoniene în grafuri orientate

Definiția 11.2.1. *Ciclul orientat care parcurge exact o singură dată fiecare arc al grafului orientat se numește* ***eulerian***.

Teorema 11.2.1. *Graful orientat conex* $\vec{G} = (V, \vec{E})$ *conține un ciclu eulerian dacă și numai dacă* $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ *pentru orice* $v \in V$.

Demonstrație. Presupunem că în $\vec{G} = (V, \vec{E})$ există un ciclu eulerian C. În parcurgerea ciclului C, de fiecare dată când se întâlnește un vârf v, trecem de-a lungul unui arc care are extremitatea finală în v și apoi de-a lungul altui arc care are extremitatea inițială în v. Acest lucru se îndeplinește pentru toate vârfurile grafului $\vec{G}$. În consecință, are loc egalitatea $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ pentru orice vârf $v \in V$.

Acum presupunem că $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ pentru orice $v \in V$. Putem construi un ciclu eulerian folosind metoda similară cu cea din demonstrația Teoremei 7.1.1 □

Definiția 11.2.2. *Ciclul orientat care parcurge exact o singură dată fiecare vârf al grafului orientat se numește* ***hamiltonian***.

Fie $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graf orientat. Să notăm prin $\delta^+(\vec{G})$ *semigradul exterior minim* al vârfurilor grafului, iar prin $\delta^-(\vec{G})$ *semigradul interior minim* al vârfurilor grafului $\vec{G}$. Adică,

$$\delta^+(\vec{G}) = \min_{v \in V}\{\deg^+(v)\} \text{ și } \delta^-(\vec{G}) = \min_{v \in V}\{\deg^-(v)\}.$$

Lema 11.2.1. *Orice graf orientat* $\vec{G} = (V, \vec{E})$, *pentru care are loc relația* $max\{\delta^+(\vec{G}), \delta^-(\vec{G})\} = k \geq 2$, *conține un lanț orientat elementar de lungime cel puțin* k *și un ciclu orientat elementar de lungime cel puțin* $k + 1$.

Lema 11.2.1 se demonstrează asemănător Teoremei 1.1.2.

Următoarea teoremă oferă condiția suficientă de existență a ciclului hamiltonian într-un graf orientat.

Teorema 11.2.2. *Fie $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graf orientat de ordinul n pentru care $min\{\delta^+(\vec{G}), \delta^-(\vec{G})\} \geq \frac{n}{2}$. Atunci $\vec{G}$ conține un ciclu hamiltonian.*

Demonstrație. Fie $C = (v_1, v_2, \dots, v_m, v_1)$ un ciclu elementar orientat de lungime maximă în $\vec{G}$. Atunci conform Lemei 11.2.1, avem $m \geq \frac{n}{2} + 1$.

Presupunem că ciclul C nu este hamiltonian și să considerăm graful orientat $\vec{H} = \vec{G} - V(C)$. Fie $L = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ un lanț elementar orientat de lungime maximă în $\vec{H}$ (Figura 11.2.1). Atunci

$$m + k \leq n \quad \text{și} \quad k \leq \frac{n}{2} - 1. \tag{11.1}$$

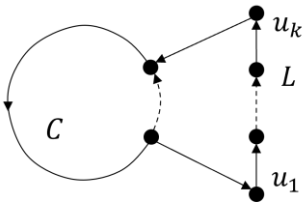


Figura 11.2.1

Să notăm prin S mulțimea vârfurilor predecesoare ale lui u_1 în C și prin T mulțimea vârfurilor succesoare ale lui u_k în C. Din maximalitatea lanțului L rezultă că toate vârfurile succesoare ale vârfului u_k și toate vârfurile predecesoare ale lui u_1 aparțin mulțimii $V(C) \cup V(L)$, de unde se obțin relațiile:

$$\frac{n}{2} \leq \deg^+_{\vec{G}}(u_k) \leq k - 1 + |T|, \; \frac{n}{2} \leq \deg^-_{\vec{G}}(u_1) \leq k - 1 + |S| \tag{11.2}$$

Combinând relațiile (11.1) și (11.2), avem $|S| \geq 2$ și $|T| \geq 2$.

Maximalitatea ciclului C garantează că distanța de-a lungul lui C de la $s \in S$ la $t \in T$ trebuie să fie mai mare ca k. În caz contrar, deplasarea de-a lungul lanțului L în locul ciclului C de la s la t generează un ciclu de lungime mai mare decât C. Astfel, putem presupune că fiecare vârf al mulțimii S este urmat pe C de cel puțin k vârfuri care nu aparțin lui T. Dacă distanța dintre vârfurile succesive ale mulțimii S de-a lungul lui C nu este mai mare decât k, atunci în C nu pot exista vârfuri care ar aparține lui T.

Deoarece $S \neq \emptyset$ și $T \neq \emptyset$, putem presupune astfel că există un vârf al lui S urmat pe C de cel puțin k vârfuri care nu aparțin lui S. Dintre acestea, primele k vârfuri nu pot aparține mulțimii T. Prin urmare, cel puțin $|S| - 1 + k$ vârfuri ale ciclului C nu fac parte din T. Având în vedere relația (11.2), obținem $|V(C) \backslash T| \geq \frac{n}{2}$. Combinând aceasta cu $|T| \geq \frac{n}{2} - k + 1$, care rezultă din (11.2), avem $|V(C)| = m \geq n - k + 1$. Aceasta vine în contradicție cu (11.1). Contradicția obținută implică faptul că ciclul orientat C este hamiltonian □

11.3. Grafuri turneu

Definiția 11.3.1. *Graful obținut ca rezultat al orientării muchiilor grafului complet se numește* ***turneu****.*

Fie $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graf orientat. Să notăm prin $\Delta^+(\vec{G})$ *semigradul exterior maxim* al vârfurilor grafului $\vec{G}$. Adică, $\Delta^+(\vec{G}) = \max\limits_{v \in V}\{\deg^+(v)\}$.

Teorema 11.3.1. *Dacă v este un vârf al grafului turneu $\vec{G} = (V, \vec{E})$ pentru care $\deg^+(v) = \Delta^+(\vec{G})$, atunci pentru orice vârf $u \in V$, există un lanț orientat de la v la u de lungime cel mult doi.*

Demonstrație. Fie $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este mulțimea vârfurilor succesoare ale vârfului v și $\deg^+(v) = k$. Dacă $V = S \cup \{v\}$ atunci afirmaţia teoremei este evidentă. Presupunem că $\deg^-(v) = l > 0$. Fie $P = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ este mulțimea vârfurilor predecesoare ale lui v. Vom arăta că există un lanț orientat de lungime doi de la v la w_i pentru orice i, $1 \leq i \leq l$. Dacă există un arc (v_j, w_i) pentru un oarecare j, $1 \leq j \leq k$, atunci cu siguranță există un lanț orientat potrivit. Altfel, w_i este predecesorul tuturor vârfurilor din $S \cup \{v\}$ și $\deg^+(w_i) \geq \deg^+(v) + 1$, ceea ce vine în contradicție cu faptul că $\deg^+(v) = \Delta^+(\vec{G})$. □

Teorema 11.3.2. *Orice graf turneu conține un lanț hamiltonian.*

Demonstrație. Vom demonstra teorema prin inducție după numărul de vârfuri n. Afirmația teoremei este trivială pentru orice graf turneu cu $n = 2$ sau 3 vârfuri. Presupunem că $n \geq 4$ și orice graf turneu cu numărul de vârfuri mai mic decât n conține un lanț hamiltonian. Fie v un vârf al

grafului turneu $\vec{G} = (V, \vec{E})$. Atunci $\vec{G} - v$ la fel este un graf turneu cu $n - 1$ vârfuri. Conform presupunerii inductive, $\vec{G} - v$ conține un lanț hamiltonian. Fie $L = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ un lanț hamiltonian al lui $\vec{G} - v$. Dacă există un arc (v, v_1) sau (v_{n-1}, v) în $\vec{G}$, atunci lanțul hamiltonian al grafului $\vec{G}$ se obține prin adăugarea arcului (v, v_1) la începutul lanțului L sau prin adăugarea arcului (v_{n-1}, v) la sfârșitul lui L. Presupunem că în $\vec{G}$ nu există arce (v, v_1) și (v_{n-1}, v). Din construcția grafului turneu, rezultă că există un vârf $u \neq v_{n-1}$ pentru care $(u, v) \in \vec{E}$. Fie că u este ultimul astfel de vârf al lanțului L începând cu v_1 și fie w este vârful care urmează după u în L. Atunci în $\vec{G}$ există două arce (u, v) și (v, w). Prin urmare, lanțul hamiltonian al lui $\vec{G}$ se obține prin înlocuirea arcului (u, w) cu lanțul (u, v, w) așa cum este ilustrat în Figura 11.3.1. □

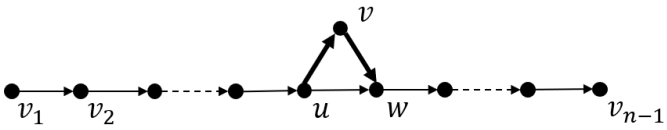


Figura 11.3.1

Definiția 11.3.2. *Graful orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$ se numește **tare conex**, dacă pentru fiecare pereche de vârfuri u și v din V, u este accesibil din v și v este accesibil din u.*

Definiția 11.3.3. *Graful orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$ se numește **slab conex** sau simplu **conex**, dacă înlocuindu-i toate arcele cu muchii, transformându-l astfel într-un graf neorientat, graful neorientat astfel obținut este conex.*

Teorema 11.3.3. *Orice vârf al grafului turneu tare conex $\vec{G} = (V, \vec{E})$ de ordinul $n \geq 3$ aparține unui triunghi orientat (ciclu orientat de lungime trei).*

Demonstrație. Fie v un vârf al grafului $\vec{G}$. Fie P este mulțimea vârfurilor predecesoare ale vârfului v și S mulțimea vârfurilor succesoare ale lui v. Dat fiind că $\vec{G}$ este tare conex, mulțimile P și S nu sunt vide și există un lanț orientat de la v la u pentru orice $u \in P$. Un astfel de lanț conține un arc (w, u) pentru oarecare vârfuri $w \in S$ și $u \in P$, fiindcă graful $\vec{G}$ este

turneu și $P \cup S \cup \{v\} = V$. Așadar, v aparține ciclului orientat de lungime trei (v, w, u, v). □

Teorema 11.3.4. *Graful turneu $\vec{G} = (V, \vec{E})$ este tare conex dacă și numai dacă conține un ciclu hamiltonian.*

Demonstrație. Dacă $\vec{G}$ conține un ciclu hamiltonian, atunci este clar că $\vec{G}$ este tare conex, deoarece pentru orice două vârfuri u și v din $\vec{G}$ există un lanț care le leagă și reprezintă o porțiune a ciclului hamiltonian a lui $\vec{G}$.

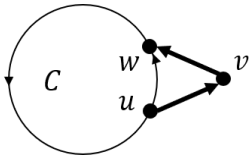


Figura 13.3.2

Fie că $\vec{G}$ este tare conex și C este un ciclu orientat elementar de lungime maximă din $\vec{G}$, iar v este un vârf din $\vec{G}$ care nu aparține lui C. Așadar, ciclul C nu este hamiltonian. Dacă C conține două vârfuri consecutive u și w, astfel încât $(u, v), (v, w) \in \vec{E}$, atunci în $\vec{G}$ există un ciclu de lungime mai mare decât C pe mulțimea de vârfuri $V(C) \cup \{v\}$ (Figura 13.3.2). Ca urmare, toate arcele dintre v și vârfurile lui C sunt orientate în aceeași direcție (de la v la C sau invers). Și aceasta este valabil pentru toate vârfurile $v \notin V(C)$. Fie S' este mulțimea vârfurilor $v \notin V(C)$ pentru care arcele sunt orientate de la v la C și fie S'' este mulţimea vârfurilor $v \notin V(C)$ pentru care arcele sunt orientate de la C la v (Figura 13.3.3). Dacă una din mulțimile S' și S'' este vidă, atunci graful $\vec{G}$ nu este tare conex. De exemplu, dacă $S'' = \emptyset$, atunci niciun vârf din mulțimea S' nu este accesibil din vârfurile ciclului C.

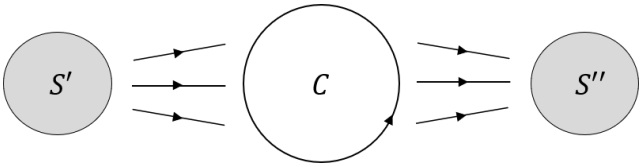


Figura 13.3.3

Așadar, ambele mulțimi S' și S'' nu sunt vide. În $\vec{G}$ nu există arce orientate de la un vârf $u \in S''$ la un vârf $v \in S'$, deoarece dacă ar exista un astfel de

arc, atunci am putea extinde C prin înlocuirea oricărui arc (x, y) din C cu lanțul (x, u, v, y). Aceasta, la rândul său, înseamnă că nu există nici un lanț orientat de la vârfurile mulțimii S'' la vârfurile mulțimii S', așa că din nou $\vec{G}$ nu este tare conex. Rezultă că C este un ciclu hamiltonian. □

11.4. Grafuri aciclice

Definiția 11.4.1. *Graful orientat care nu conține cicluri orientate se numește* ***aciclic****.*

Un vârf v al grafului orientat $\vec{G}$ se numește *sursă*, dacă $\deg^-(v) = 0$. Analog, dacă $\deg^+(v) = 0$, atunci vârful v se numește *drenă*.

Teorema 11.4.1. *Orice graf orientat aciclic conține cel puțin o sursă și o drenă.*

Demonstrație. Fie $\vec{G}$ un graf orientat aciclic. Dacă $\vec{G}$ conține un vârf izolat, atunci afirmația teoremei este evidentă. Presupunem că graful $\vec{G}$ nu conține vârfuri drenă. Selectăm un vârf arbitrar v_0 al lui $\vec{G}$. Din faptul că v_0 nu este vârful drenă rezultă că $N^+(v_0) \neq \emptyset$ și, prin urmare, putem selecta un vârf $v_1 \in N^+(v_0)$. În mod similar, selectăm vârful $v_2 \in N^+(v_1)$ și tot așa mai departe. Deoarece $\vec{G}$ are un număr finit de vârfuri, consecutivitatea de vârfuri $(v_0, v_1, v_2, \dots)$ conține repetiții. Fie v_j este prima repetiție, adică $v_i = v_j$ pentru un oarecare $i < j$ și nici un vârf v_k, $k < j$, nu are aceasta proprietate. Atunci $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_i)$ formează un ciclu în $\vec{G}$. Am obținut contradicție. În mod analog, considerând cazul, când $\vec{G}$ nu conține vârfuri sursă, la fel se obține contradicție. □

Fie $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graf orientat aciclic cu n vârfuri. Operația de sortare topologică a grafului $\vec{G}$ constă în etichetarea vârfurilor din V cu o funcție injectivă $f: V \to \{1,2, \dots, n\}$, astfel încât $f(u) < f(v)$ pentru orice arc $(u, v) \in \vec{E}$.

Teorema 11.4.2. *Graful orientat $\vec{G}$ poate fi sortat topologic dacă și numai dacă $\vec{G}$ este aciclic.*

Demonstrație. Dacă $\vec{G}$ conține cicluri orientate, atunci este limpede că $\vec{G}$ nu poate fi sortat topologic.

Dacă $\vec{G}$ este aciclic, atunci etichetarea vârfurilor se realizează în felul următor:

1. Selectăm un vârf drenă v. Conform Teoremei 11.4.1, în $\vec{G}$ există un astfel de vârf. Setăm $f(v) \leftarrow n$, $\vec{G} \leftarrow \vec{G} - v$ și $n \leftarrow n - 1$.
2. Dacă în $\vec{G}$ a rămas doar un singur vârf v, atunci $f(v) \leftarrow 1$. În caz contrar, revenim la pasul 1.

Teorema este demonstrată □

11.5. Probleme și sarcini

1. Determinați numărul grafurilor orientate antisimetrice și fără bucle.
2. Demonstrați că într-un graf orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$ suma $\sum_{v \in V} |\deg^+(v) - \deg^-(v)|$ este un număr par.
3. Fie $\vec{G} = (V, \vec{E})$ un graf orientat cu proprietatea că $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ pentru orice $v \in V$. Arătați că pentru orice submulțime $A \subset V$ are loc relația $|\omega^+(A)| = |\omega^-(A)|$, unde $\omega^+(A)$ este mulţimea arcelor cu extremitatea iniţială în A, iar $\omega^-(A)$ este mulţimea arcelor cu extremitatea finală în A.
4. Arătați că un graf orientat $\vec{G} = (V, \vec{E})$, în care $\deg^+(v) \geq 1$ pentru orice $v \in V$, conține un ciclu orientat.
5. Fie $\vec{G}$ un graf orientat care nu conține cicluri orientate. Arătați că în $\vec{G}$ există un vârf al cărui semigrad interior este 0.
6. Verificați afirmația: dacă orice vârf al grafului turneu $\vec{G}$ aparține unui ciclu, atunci $\vec{G}$ este tare conex.
7. Fie u și v două vârfuri distincte ale unui graf turneu pentru care sunt definite distanțele pe lanțurile orientate $\vec{d}(u, v)$ și $\vec{d}(v, u)$. Arătați că $\vec{d}(u, v) \neq \vec{d}(v, u)$.

12. Hipergrafuri

12.1. Hipergrafuri. Reprezentarea hipergrafurilor

Fie $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o mulțime finită și $E = \{e_1, e_2, \dots e_m\}$ o familie de submulțimi nevide, nu neapărat distincte, ale lui V.

Definiția 12.1.1. *Perechea $H = (V, E)$ se numește* ***hipergraf*** *cu mulțimea de vârfuri V și mulțimea de muchii E.*

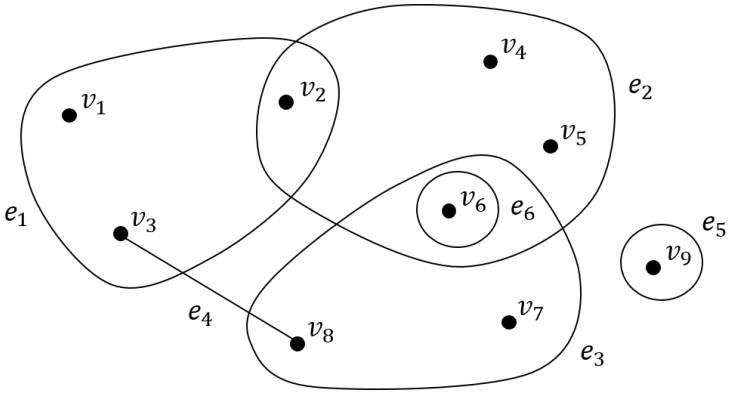


Figura 12.1.1. *Hipergraful H*

Muchiile $e_i = e_j$ se numesc muchii multiple. Ca și în cazul grafurilor, numărul $n = |V|$ de vârfuri în H se numește *ordin* al hipergrafului. Dacă vârful $v \in V$ aparține unei muchii $e \in E$, atunci se spune că vârful v este *incident* muchiei e și viceversa. Vârful hipergrafului care nu este incident cu nici o muchie se numește *izolat*. Fie $E(v)$ este mulțimea muchiilor hipergrafului H incidente cu vărful $v \in V$. Numărul $|E(v)|$ se numește

grad al vârfului v. Numărul $|e|$ de vârfuri ale hipergrafului incidente cu muchia e se numește *grad al muchiei* e. Evident, gradul fiecărei muchii e a hipergrafului satisface inegalitatea $|e| \geq 1$. Două vârfuri u și v ale hipergrafului H se numesc *adiacente*, dacă există o muchie e a lui H, astfel încât $u \in e$ și $v \in e$. Analog, muchiile e_i și e_j se numesc adiacente dacă $e_i \cap e_j \neq \emptyset$.

În Figura 12.1.1 este reprezentat hipergraful H cu mulțimea de vârfuri $V = \{v_1, v_2, \dots, v_9\}$ și mulțimea de muchii $E = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}$.

Dacă hipergraful H nu conține muchii multiple și gradul oricărei muchii e este k, atunci se spune că hipergraful H este k-*uniform*. Astfel, orice graf este un hipergraf 2-uniform. Deci graful este un caz particular al hipergrafului, iar hipergraful generalizează graful.

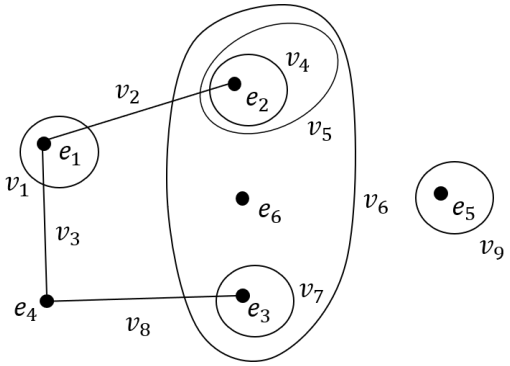


Figura 12.1.2. H^*

Rangul hipergrafului $H = (V, E)$ este numărul $r(H) = \max\limits_{e \in E} |e|$, iar numărul $s(H) = \min\limits_{e \in E} |e|$ se numește *antirang* al hipergrafului. Oricărui hipergraf $H = (V, E)$, cu $|V| = n$ și $|E| = m$, fără vârfuri izolate, i se poate pune în corespondență un hipergraf $H^* = (V^*, E^*)$ cu m vârfuri și n muchii, unde $V^* = E$, iar E^* este familia tuturor mulțimilor $E(v)$, $v \in V$. Hipergraful H^* se numește *dualul* lui H. În Figura 12.1.2 este reprezentat hipergraful dual al hipergrafului H din Figura 12.1.1.

Fie $H = (V, E)$ un hipergraf arbitrar.

Definiția 12.1.2. *Graful bipartit* $K(H)$ *cu mulțimea de vârfuri* $V \cup E$ *și mulțimea de muchii* $\{(v, e) : (v, e) \in V \times E, v \in e\}$ *se numește* ***reprezentarea König*** *a hipergrafului* H.

În Figura 12.1.3 este dată reprezentarea König $K(H)$ a hipergrafului H din Figura 12.1.1. Ușor se observă că graful $K(H^*)$ se obține din graful $K(H)$ doar prin schimbarea cu locurile a mulțimilor V și E, iar toate muchiile se păstrează. Astfel $K(H^*) \cong K(H)$.

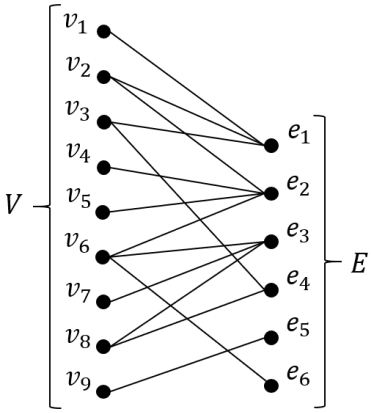


Figura 12.1.3. $K(H)$

Majoritatea noțiunilor din teoria grafurilor ușor se generalizează pe hipergrafuri. Mai jos vom da câteva noțiuni de care vom avea nevoie în continuare.

Definiția 12.1.3. *Se numește* ***lanț elementar*** *de lungime* $k > 1$ *al hipergrafului* $H = (V, E)$ *consecutivitatea* $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k, e_k, v_{k+1})$, *care satisface condițiile:*

1) $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$ *sunt vârfuri distincte ale lui* H*;*
2) $e_1, e_2, \dots, e_k$ *sunt muchii distincte ale lui* H*;*
3) $v_i, v_{i+1} \in e_i$, *pentru orice* $i = \overline{1,k}$.

Vârfurile v_1 *și* v_{k+1} *se numesc* ***extremități*** *ale lanțului. Dacă* $v_1 = v_{k+1}$, *atunci lanțul se numește* ***ciclu elementar***.

De exemplu, $(v_1, e_1, v_3, e_4, v_8, e_3, v_7)$ este un lanț elementar de lungime 3 al hipergraful H din Figura 12.1.1, iar $(v_2, e_1, v_3, e_4, v_8, e_3, v_6, e_2, v_2)$ este un ciclu elementar.

Definiția 12.1.4. *Mulțimea de vârfuri* $S \subseteq V$ *a hipergrafului* $H = (V, E)$ *se numește* ***stabilă interior***, *dacă ea nu conține nicio muchie a hipergrafului* H.

Mulțimea stabilă interior a hipergrafului H de cardinal maxim se numește *stabilă interior maximă*, iar numărul de vârfuri din această mulțime se numește *număr de stabilitate internă* al lui H și se notează prin $\alpha_0(H)$.

În hipergraful H ilustrat în Figura 12.1.1 mulțimea de vârfuri $S = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\}$ este stabilă interior maximă, deci $\alpha_0(H) = 6$.

12.2. Colorarea hipergrafurilor

Colorarea vârfurilor hipergrafului se definește la fel ca și în cazul grafurilor.

Definiția 12.2.1. *Colorarea vârfurilor hipergrafului H se numește **corectă**, dacă orice muchie de gradul cel puțin doi a lui H conține două vârfuri de culori distincte.*

Conform definiției, colorarea corectă o posedă doar hipergrafurile fără vârfuri izolate, în care fiecare muchie are gradul cel puțin 2. În continuare, vor fi considerate doar astfel de hipergrafuri. *Număr cromatic* $\chi(H)$ al hipergrafului H se numește cel mai mic număr de culori pentru care H admite o colorare corectă.

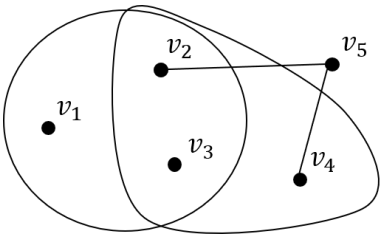


Figura 12.2.1

Vârfurile v_1, v_2, v_4 ale hipergrafului H din Figura 12.2.1 pot fi colorate cu o culoare, iar vârfurile v_3, v_5 cu o altă culoare. Astfel se obține o colorare corectă a vârfurilor hipergrafului H cu două culori și, prin urmare, $\chi(H) = 2$.

Teorema 12.2.1. *Pentru orice hipergraf H de ordinul n sunt adevărate inegalitățile:*

1) $\chi(H)\alpha_0(H) \geq n$;

2) $2\sqrt{n} \leq \chi(H)+\alpha_0(H) \leq n + 1$.

Demonstrație. Analizăm divizarea mulțimii de vârfuri a lui H în $k = \chi(H)$ mulțimi stabile interior $S_1, S_2, \dots, S_k$. Atunci

$$n = \sum_{i=1}^{k} |S_i| \leq k\alpha_0(H) = \chi(H)\alpha_0(H)$$

De aici, ținând cont de inegalitatea mediilor, obținem

$$\frac{\chi(H)+\alpha_0(H)}{2} \geq \sqrt{\chi(H)\alpha_0(H)} \Longrightarrow \chi(H)+\alpha_0(H) \geq 2\sqrt{n}.$$

Fie S este mulțimea stabilă interior maximă din H. Colorăm toate vârfurile din S cu aceeași culoare, iar pentru colorarea vârfurilor mulțimii $V\backslash S$ putem utiliza $n - |S| = n - \alpha_0(H)$ culori. Prin urmare, avem

$$\chi(H) \leq n - \alpha_0(H) + 1 \Longrightarrow \chi(H)+\alpha_0(H) \leq n + 1.$$

Teorema este demonstrată. □

Teorema 12.2.2. *Pentru orice două numere naturale $k \geq 1$ și $h \geq 2$, există un hipergraf $H = (V, E)$ astfel încât $\chi(H) \geq k$ și pentru orice muchie $e \in E$ are loc relația $|e| \geq h$.*

Demonstrație. În calitate de hipergraf care satisface condițiile teoremei poate fi luat hipergraful h-uniform H construit în conformitate cu următoarea regulă: $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, unde $n \geq k(h-1)$ și E este familia tuturor submulțimilor posibile ale lui V de cardinalul h. Dat fiind faptul că $\alpha_0(H) \leq h - 1$, în baza relației 1) din Teorema 12.2.1 avem

$$\chi(H) \geq \frac{n}{h-1} \Longrightarrow \chi(H) \geq k.$$

Teorema este demonstrată. □

Hipergraful $H = (V, E)$ se numește *conex*, dacă pentru oricare două vârfuri u și v din V există un lanț elementar în H cu extremitățile în u și v.

Teorema 12.2.3. *Dacă hipergraful conex H nu conține cicluri de lungime impară, atunci H poate fi colorat corect cu două culori.*

Demonstrație. Vom colora un vârf arbitrar v al hipergrafului H cu culoarea roșie. Celelalte vârfuri u ale lui H se colorează cu culoare roșie, dacă lungimea celui mai scurt lanț care unește vârfurile v și u este pară, sau se colorează cu culoarea albastră în caz contrar. Evident, dacă hipergraful H nu poate fi colorat cu două culori, atunci se vor găsi două vârfuri adiacente

x și y colorate cu aceeași culoare, iar în acest caz H conține un ciclu de lungime impară. □

12.3. Probleme și sarcini

1. Identificați un lanț elementar de lungime 4 al hipergrafului H din Figura 12.3.1 și determinați rangul $r(H)$ și antirangul $s(H)$ lui H.
2. Desenați hipergraful dual $H*$ și reprezentarea König $K(H)$ a hipergrafului H din Figura 12.3.1.
3. Identificați mulțimea stabilă interior maximă a hipergrafului H din Figura 12.3.1.
4. Colorați corect vârfurile hipergrafului din Figura 12.3.1 cu $\chi(H)$ culori.

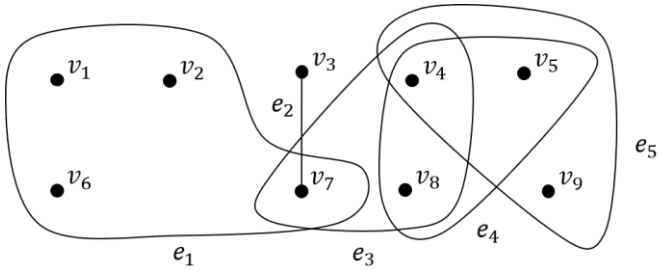


Figura 12.3.1

Bibliografie

1. NICULIȚĂ, A. *Algoritmica grafurilor. Suport de curs*. Chișinău: USM, 2018.
2. FANACHE, D. *Teoria algoritmică a grafurilor*. Volumul I: *Noțiuni fundamentale*. București: Editura Paralela 45, 2016.
3. FANACHE, D. *Teoria algoritmică a grafurilor*. Volumul II: *Rețele, cuplaje, colorări, planaritate*. București: Editura Paralela 45, 2016.
4. CATARANCIUC, S., NICULIȚĂ, A., NOVAC, L. *Aspecte algoritmice ale teoriei grafurilor*. Partea II. Chișinău: USM, 2012.
5. CATARANCIUC, S., NICULIȚĂ, A. *Aspecte algoritmice ale teoriei grafurilor*. Partea I. Chișinău: USM, 2006.
6. CATARANCIUC, S. *Teoria grafurilor în probleme şi aplicaţii.* Chișinău: USM, 2004.
7. TOMESCU, I. *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor.* București: Edit. Didactică şi Pedagogică, 1981.
8. SAOUB, K. R. *Graph theory: an introduction to proofs, algorithms, and applications.* CRC Press, 2021.
9. GROSS, J. L., YELLEN, J., ANDERSON, M. *Graph theory and its applications*. 3rd edition, CRC Press, 2019.
10. DIESTEL, R. *Graph theory*. 5th edition, Springer, 2017.
11. JOYNER, W. D., MELLES, C. G. *Adventures in graph theory*. Springer, 2017.
12. RAHMAN, M. S. *Basic graph theory*. Springer, 2017.
13. SAOUB, K. R. *A tour through graph theory*. CRC Press, 2017.
14. CHARTRAND, G., LESNIAK, L., ZHANG, P. *Graphs and digraphs*. CRC Press, 2016.
15. RIGO, M. *Advanced graph theory and combinatorics*. ISTE-John Wiley & Sons, 2016.
16. RAY, S. S. *Graph theory with algorithms and its applications: in applied science and technology*. Springer, 2013.

17. BALAKRISHNAN, R., RANGANATHAN, K. *A textbook of graph theory*. 2nd edition, Springer, 2012.
18. CHARTRAND, G., ZHANG, P. *A first course in graph theory*. Dover Publications, 2012.
19. WILSON, R. J. *Introduction to graph theory*. 5th edition, Pearson, 2010.
20. CIOABĂ, S. M., MURTY, M. R. *A first course in graph theory and combinatorics*. Hindustan Book Agency, 2009.
21. FOURNIER, J. C. *Graph theory with applications*. ISTE-John Wiley & Sons, 2009.
22. VOLOSHIN, V. I. *Introduction to graph and hypergraph theory*. Nova Science Publishers, 2009.
23. BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph theory*. Springer, 2008.
24. HARRIS, J. M., HIRST, J. L., MOSSINGHOFF M. J. *Combinatorics and graph theory*. 2nd edition, Springer, 2008.
25. VASUDEV, C. *Combinatorics and graph theory*. New Age International, 2007.
26. WALLIS, W. D. *A beginner's guide to graph theory*. 2nd edition, Birkhäuser, 2007.
27. BOLLOBAS, B. *Modern graph theory*. Springer, 1998.
28. CLARK, J., HOLTON, D. A. *A first look graph theory*. World Scientific Publishing. 1991.
29. GOULD, R. *Graph theory*. Benjamin/Cummings Publishing Company, 1988.
30. GIBBONS, A. *Algorithmic graph theory*. Cambridge University Press, 1985.
31. CHRISTOFIDES, N. *Graph theory. An algorithmic approach*. Academic Press, 1975.
32. HARARY, F. *Graph theory*. Addison-Wesley, 1969.
33. ОМЕЛЬЧЕНКО, А. В. *Теория графов*. Москва: МЦНМО, 2018.
34. ЕМЕЛИЧЕВ, В. А., МЕЛЬНИКОВ, О. И., САРВАНОВ, В. И., ТЫШКЕВИЧ, Р. И. *Лекции по теории графов*. Москва: Наука, 1990.
35. ЗЫКОВ, А. А. *Основы теории графов*. Москва: Наука, 1987.
36. ЕВСТИГНЕЕВ, В. А., МЕЛЬНИКОВ, Л. С. *Задачи и упражнения по теории графов и комбинаторике*. Новосибирск: Изд. НГУ, 1981.

Radu BUZATU

Teoria grafurilor

Note de curs

Redactare: *Antonina Dembițchi*
Machetare computerizată: *Radu Buzatu*

Bun de tipar 26.07.2022. Formatul 60 × 84 1/16.
Coli de tipar 8,3. Coli editoriale 5,0.
Comanda 10. Tirajul 50 ex.

Centrul Editorial-Poligrafic al USM,
str. Al. Mateevici, 60, Chișinău, MD-2009