METODA B-SPLINE COLOCAȚIEI PENTRU ECUAȚII INTEGRALE FREDHOLM CU MEMBRUL DREPT DISCONTINUU

B-SPLINE COLLOCATION METHOD FOR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE

CZU: 517.968.2:519.642.4 **https://doi.org/10.59295/spd2025e.101**

Maria CAPCELEA
ORCID: 0009-0009-3321-3946
E-mail: maria.capcelea@usm.md
Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, Republica Moldova

Titu CAPCELEA
ORCID: 0009-0002-7178-9291
E-mail: titu.capcelea@usm.md
Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, Republica Moldova

Summary. *In this paper, we propose a numerical method for approximating solutions to linear Fredholm integral equations of the second kind, defined on a closed contour in the complex plane. The right-hand side is a piecewise continuous function given numerically at a finite set of points on the contour. The approximation is constructed using a linear combination of B-spline functions and Heaviside step functions defined on the same domain. We analyze both the theoretical and practical aspects of the method's pointwise convergence, with particular attention to its behavior near discontinuity points.*

Keywords: *Fredholm integral equation, discontinuous right-hand side, B-spline functions, computational scheme.*

INTRODUCERE ȘI FORMULAREA PROBLEMEI

Fie conturul închis și neted pe porțiuni Γ mărginește domeniul simplu conex $\Omega^+ \subset C$, iar punctul $z = 0 \in \Omega^+$. Fie $z = \psi(w)$ funcția Riemann ce realizează transformarea conformă a exteriorului D^- al cercului unitate $\Gamma_0 := \{w \in C : |w| = 1\}$ pe exteriorul Ω^- al lui Γ astfel încât $\psi(\infty) = \infty, \psi'(\infty) > 0$. Funcția $\psi(w)$ aplică cercul Γ_0 pe conturul Γ. În continuare, vom considera că punctele conturului Γ sunt definite prin intermediul funcției date $\psi(w)$.

Fie $f : \Gamma \to C$ o funcție continuă sau continuă pe porțiuni pe Γ, iar în acest sens

vom folosi notația $f \in PC(\Gamma)$. În cazul în care funcția $f \in PC(\Gamma)$ este discontinuă pe Γ, vom considera că aceasta este continuă la stânga în punctele de discontinuitate.

Să considerăm ecuația integrală Fredholm de speța doi definită pe conturul Γ.

$$\varphi(t) - \lambda \int_{\Gamma} K(t,s)\varphi(s)ds = f(t), t \in \Gamma, \quad (1)$$

Funcția nucleu este continuă în ambele variabile, $K \in C(\Gamma \times \Gamma)$, membrul drept $f \in PC(\Gamma)$, iar constanta $\lambda \in C$ satisface condiția suficientă pentru ca ecuația (1) să admită o singură soluție $\varphi \in PC(\Gamma)$.

În condițiile în care membrul drept f este definit numeric pe mulțimea de puncte $\{t_j\}$ ale conturului Γ, se pune problema de a elabora un algoritm numeric de calcul al unui șir de aproximații φ_n ale soluției φ, care să conveargă aproape uniform către φ pe Γ, atunci când $n \to \infty$. Aceasta înseamnă că șirul de aproximații va converge uniform în toate punctele conturului Γ, cu excepția punctelor de discontinuitate, în care convergența este punctuală.

Anumite rezultate numerice indică faptul că efectul oscilatoriu al aproximațiilor polinomiale în vecinătatea punctelor de discontinuitate este diminuat progresiv, conducând la convergență punctuală chiar și în apropierea acestor puncte, în cazul în care aproximația funcției φ este realizată ca o combinație liniară de funcții B-spline [1]. Totuși, se impune construirea unei aproximații continue pe porțiuni pentru soluția ecuației (1).

Fie $\{t_j\}_{j=1}^{n_B}$ mulțimea de puncte distincte ale conturului Γ în care sunt cunoscute valorile funcției $f \in PC(\Gamma)$. Vom considera că punctele t_j sunt generate în baza relației

$$t_j = \psi(w_j), w_j = e^{i\theta_j}, \theta_j = \frac{2\pi(j-1)}{n_B}, j = 1, \dots, n_B.$$

Vom nota prin $\Gamma_j := arc[t_j, t_{j+1}]$ mulțimea de puncte ale conturului Γ, situate între punctele t_j și t_{i+1}. La fel, pentru funcția $f(t)$ vom considera date punctele de discontinuitate $t_r^d, r = 1, \dots, n_{pd}$ și valorile funcției $f(t_r^d)$ în aceste puncte. În lucrarea [2] au fost elaborați algoritmi de localizare a punctelor de discontinuitate a funcției $f(t)$, în baza valorilor acesteia în puncte de pe conturul Γ.

SCHEMA DE CALCUL A SOLUȚIEI APROXIMATIVE A ECUAȚIEI INTEGRALE

Algoritmul de aproximare a soluției φ a ecuației (1), pe care îl propunem, are la bază conceptul de funcții B-spline de ordinul $m \geq 2$, definite în punctele t_j ale conturului Γ, în baza formulei recursive

$$B_{m,j}(t) := \frac{m}{m-1}\left(\frac{t-t_j^B}{t_{j+m}^B-t_j^B}B_{m-1,j}(t) + \frac{t_{j+m}^B-t}{t_{j+m}^B-t_j^B}B_{m-1,j+1}(t)\right), j = 1,\dots,n_B, \quad (2)$$

unde $B_{1,j}(t) = \{\frac{1}{t_{j+1}^B-t_j^B}\, dacă\ t \in arc t_j^B, t_{j+1}^B)\ 0$, iar mulțimea de noduri $\{t_j^B\}_{j=1}^{n_B+m}$ satisface condițiile $t_j^B = t_j, j = 1,\dots,n_B, t_{n_B+1}^B = t_1^B, t_{n_B+2}^B = t_2^B, \dots, t_{n_B+m}^B = t_m^B$

(a se vedea [1]). Pentru $m \geq 2$ fixat funcțiile B-spline (2) admit reprezentare explicită [1].

În raport cu punctele de discontinuitate $t_r^d, r = 1,\dots,n_{pd}$, definim funcția treaptă Heaviside H pe conturul Γ:

$$H(t-t_r^d) := \{0, dacă\ t \in \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_{s-1} \cup arc t_s^B, t_r^d)\ 1, dacă\ t \in arc t_r^d, t_{s+1}^B) \cup \square_{s+1} \cup \dots \cup \Gamma_{n_B},$$

$$\Gamma_s = arc[t_s^B, t_{s+1}^B], t_r^d \in \Gamma_s.$$

Ținând cont că soluția φ a ecuației (1) admite discontinuități de speța întâi pe conturul Γ, iar combinația liniară de funcții B-spline generează o curbă continuă, vom căuta aproximația soluției φ a ecuației (1) sub forma

$$\varphi_{n_B}^H(t) := \sum_{k=1}^{n_B} \alpha_k B_{m,k}(t) + \sum_{r=1}^{n_{pd}} \beta_r H(t-t_r^d), \quad (3)$$

în care coeficienții $\alpha_k \in \square, k = 1,\dots,n_B$ și $\beta_r \in C, r = 1,\dots,n_{pd}$ se determină, impunând condițiile de interpolare

$$\varphi_{n_B}^H(t_j^C) - \lambda \int_\Gamma K(t_j^C, s)\varphi_{n_B}^H(s)ds = f(t_j^C), j = 1,\dots,n, \quad (4)$$

unde $n := n_B + n_{pd}$, iar în calitate de puncte de interpolare $t_j^C, j = 1,\dots,n$ se aleg următoarele elemente ale mulțimii de noduri ale B-spline-ului:

- primele n_B puncte $t_j^C, j = 1,\dots,n_B$ sunt punctele $t_j^B = t_j, j = 1,\dots,n_B$;
- restul n_{pd} puncte $t_j^C, j = n_B+1,\dots,n$ sunt punctele de discontinuitate $t_r^d, r = 1,\dots,n_{pd}$ ale funcției f.

Dacă printre punctele $t_j^C, j = 1,\dots,n_B$ sunt puncte de discontinuitate $t_i^d = \psi\left(e^{i\theta_j^d}\right)$ a lui f pe Γ, atunci în loc de acestea se consideră punctele $\tilde{t}_j^d = \psi\left(e^{i\left(\theta_j^d-\varepsilon_2\right)}\right)$, unde ε_2 este o valoare mică, de exemplu, $\varepsilon_2 = 0.01$. Funcția fiind continuă la stânga, pentru ε_2 suficient de mic, se poate considera că valoarea funcției f în punctul $\tilde{t}_j^d$ coincide cu valoarea acesteia în punctul t_j^d.

Ținând cont de reprezentarea

$$\int_{\Gamma} K(t,s)\varphi_{n_B}^{H}(s)ds = \int_{\Gamma} K(t,s)\left(\sum_{k=1}^{n_B} \alpha_k B_{m,k}(s) + \sum_{r=1}^{n_{pd}} \beta_r H(s-t_r^d)\right)ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_B} \alpha_k I_k^{1,m}(t) + \sum_{r=1}^{n_{pd}} \beta_r I_r^2(t),$$

unde $I_k^{1,m}(t) := \int_{\Gamma} K(t,s)B_{m,k}(s)ds, I_r^2(t) := \int_{\Gamma} K(t,s)H(s-t_r^d)ds$, putem scrie condițiile de interpolare (4) sub forma

$$\sum_{k=1}^{n_B} \left(B_{m,k}(t_j^C) - \lambda I_k^{1,m}(t_j^C)\right)\alpha_k + \sum_{r=1}^{n_{pd}} \left(H(t_j^C - t_r^d) - \lambda I_r^2(t_j^C)\right)\beta_r = f(t_j^C), j = 1,\dots,n, \quad (5)$$

sau în formă matriceală $B\bar{x} = \bar{f}$, unde

$$B = \{m_{j,k}\}_{j,k=1}^{n}, m_{j,k} := B_{m,k}(t_j^C) - \lambda I_k^{1,m}(t_j^C), j = 1,\dots,n, k = 1,\dots,n_B,$$

$$m_{j,k} := H(t_j^C - t_r^d) - \lambda I_r^2(t_j^C), j = 1,\dots,n, k = n_B+1,\dots,n,$$

$$\bar{x} = \left(\alpha_1,\dots,\alpha_{n_B},\beta_1,\dots,\beta_{n_{pd}}\right)^T, \bar{f} = \left(f(t_1^C),\dots,f(t_n^C)\right)^T.$$

Dacă pentru $m = 2$ se consideră $t_i^C = t_{j+1}^B, j = 1,\dots,n_B$, iar pentru $m = 3$ și $m = 4$ se consideră $t_j^C = t_{j+2}^B, j = 1,\dots,n_B$, atunci elementele matricei B pot fi calculate astfel:

$$B = B_1 - \lambda B_2, \quad (6)$$

unde proprietățile matricei au fost examinate în lucrarea [1], iar elementele matricei

$B_1 =$

$\left(B_{m,1}(t_1^C) \cdots B_{m,n_B}(t_1^C)\, H(t_1^C - t_1^d) \cdots H\left(t_1^C - t_{n_{pd}}^d\right) \vdots \ddots \vdots \vdots \ddots \vdots\, B_{m,1}(t_n^C) \cdots B_{m,n_B}(t_n^C)\, H(t_n^C - t_1^d) \cdots H\left(t_n^C - t_{n_{pd}}^d\right)\right)$

au fost examinate în lucrarea [1], iar elementele matricei

$$B_2 = \left(I_1^{1,m}(t_1^C) \cdots I_{n_B}^{1,m}(t_1^C)\, I_1^2(t_1^C) \cdots I_{n_{pd}}^2(t_1^C) \vdots \ddots \vdots \vdots \ddots \right.$$
$$\left. \vdots\, I_1^{1,m}(t_n^C) \cdots I_{n_B}^{1,m}(t_n^C)\, I_1^2(t_n^C) \cdots I_{n_{pd}}^2(t_n^C)\right)$$

pot fi determinate în modul următor:

Pentru elementele $I_k^{1,m}(t_j^C), j = 1,\dots,n, k = 1,\dots,n_B$, au loc relațiile:

$$I_k^{1,m}(t_j^C) = \int_{\Gamma} K(t_j^C,s)B_{m,k}(s)ds = \int_{arc[t_k^B,t_{k+m}^B]} K(t_j^C,s)B_{m,k}(s)ds =$$

$$\sum_{r=1}^{m} \int_{arc[t_{k+r-1}^B, t_{k+r}^B]} K(t_j^C, s) p_k^{(r)}(s) ds = \sum_{r=1}^{m} \int_{\theta_{k+r-1}^B}^{\theta_{k+r}^B} g_{j,k}^r(\theta) d\theta$$

unde $g_{j,k}^r := K\left(t_j^C, \psi\left(e^{i\theta}\right)\right) p_k^{(r)}\left(\psi\left(e^{i\theta}\right)\right) \psi'\left(e^{i\theta}\right) i e^{i\theta}$, iar $p_k^{(r)}(s)$ sunt ramurile funcției B-spline $B_{m,k}(s)$ de ordinul corespunzător mm. De exemplu, pentru $m = 4$ avem:

$$p_k^{(1)}(s) = \frac{4\left(s - t_k^B\right)^3}{(t_{k+4}^B - t_k^B)(t_{k+3}^B - t_k^B)(t_{k+2}^B - t_k^B)(t_{k+1}^B - t_k^B)}, \; p_k^{(2)}(s) = 4(I_1 + I_2),$$

unde

$$I_1 := \frac{s - t_k^B}{t_{k+4}^B - t_k^B}\left(\frac{(s - t_k^B)(t_{k+2}^B - s)}{(t_{k+3}^B - t_k^B)(t_{k+2}^B - t_k^B)(t_{k+2}^B - t_{k+1}^B)} + \frac{(s - t_{k+1}^B)(t_{k+3}^B - s)}{(t_{k+3}^B - t_k^B)(t_{k+3}^B - t_{k+1}^B)(t_{k+2}^B - t_{k+1}^B)}\right),$$

$$I_2 := \frac{(t_{k+4}^B - s)(s - t_{k+1}^B)^2}{(t_{k+4}^B - t_k^B)(t_{k+4}^B - t_{k+1}^B)(t_{k+3}^B - t_{k+1}^B)(t_{k+2}^B - t_{k+1}^B)}, \; p_k^{(3)}(s) = 4(I_3 + I_4),$$

unde

$$I_3 := \frac{(t_{k+3}^B - s)^2 (s - t_k^B)}{(t_{k+4}^B - t_k^B)(t_{k+3}^B - t_k^B)(t_{k+3}^B - t_{k+1}^B)(t_{k+3}^B - t_{k+2}^B)},$$

$$I_4 := \frac{t_{k+4}^B - s}{t_{k+4}^B - t_k^B}\left(\frac{(s - t_{k+1}^B)(t_{k+3}^B - s)}{(t_{k+4}^B - t_{k+1}^B)(t_{k+3}^B - t_{k+1}^B)(t_{k+3}^B - t_{k+2}^B)} + \frac{(s - t_{k+2}^B)(t_{k+4}^B - s)}{(t_{k+4}^B - t_{k+1}^B)(t_{k+4}^B - t_{k+2}^B)(t_{k+3}^B - t_{k+2}^B)}\right),$$

$$p_k^{(4)}(s) = \frac{4\left(t_{k+4}^B - s\right)^3}{(t_{k+4}^B - t_k^B)(t_{k+4}^B - t_{k+1}^B)(t_{k+4}^B - t_{k+2}^B)(t_{k+4}^B - t_{k+3}^B)}.$$

Integralele $\int_{\theta_{k+r-1}^B}^{\theta_{k+r}^B} g_{j,k}^r(\theta) d\theta$ se vor aproxima conform formulei generalizate a trapezelor, care este valabilă și pentru funcții cu valori complexe:

$$I := \int_{\theta_{in}}^{\theta_f} g(\theta) d\theta \approx I_N := h\left(0.5\left(g(\theta_{in}) + g\left(\theta_f\right)\right) + \sum_{j=1}^{N-1} g(\theta_{in} + jh)\right),$$

$$h := \frac{(\theta_f - \theta_{in})}{N}. \tag{7}$$

Pentru valori $N \to \infty$ în lucrarea [3] este arătat că $I_N \to I$ cu viteza unei progresii geometrice.

Pentru elementele $I_r^2\left(t_j^C\right), j = 1, \ldots, n, r = 1, \ldots, n_{pd}$, au loc relațiile:

$$I_r^2\left(t_j^C\right) = \int_\Gamma K\left(t_j^C, s\right) H(s - t_r^d) ds = \int_{arc[t_r^d, \psi(1)]} K\left(t_j^C, s\right) ds = \int_{\theta_r^d}^{2\pi} q_j(\theta) d\theta,$$

unde $q_j(\theta) := K\left(t_j^C, \psi\left(e^{i\theta}\right)\right) \psi'\left(e^{i\theta}\right) i e^{i\theta}$. Analog, integralele $\int_{\theta_r^d}^{2\pi} q_j(\theta) d\theta$ se

vor aproxima conform formulei generalizate a trapezelor (7).

De menționat, că funcțiile $g_{j,k}^{r}(\theta)$ și $q_j(\theta)$ nu depind de funcția $f(t)$ și, prin urmare, este posibilă evaluarea acestora în orice punct $\theta \in [0,2\pi]$ și, respectiv, aproximarea integralelor $I_k^{1,m}(t_j^C)$ și $I_r^2(t_j^C)$.

DESPRE CONVERGENȚA ALGORITMULUI ȘI UN EXEMPLU NUMERIC

După ce se determină soluția $\alpha_k, k = 1,\dots,n_B$, $\beta_r, r = 1,\dots,n_{pd}$ a sistemului (5), construim aproximația (3) a funcției $\varphi(t)$ și calculăm valorile acesteia în punctele $t \in \Gamma$. În lucrarea [4] a fost argumentată convergența aproape uniformă a șirului de aproximații $\varphi_{n_B}^H$ de forma (3) către funcția aproximată $\varphi \in PC(\Gamma)$, atunci când $n_B \to \infty$.

Exemplu numeric. Funcția Riemann $z = \psi(w)$ ce realizează transformarea conformă a mulțimii $\{w \in C: |w| > 1\}$ pe domeniul Ω^- din exteriorul conturului Γ este $\psi(w) = w + \frac{1}{(3w^3)}$. Astfel, $\psi(w)$ aplică cercul Γ_0 pe astroida Γ (a se vedea Figura 1).

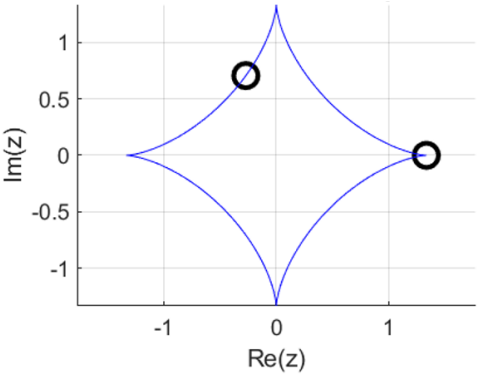


Figura 1. *Conturul și punctele de discontinuitate*

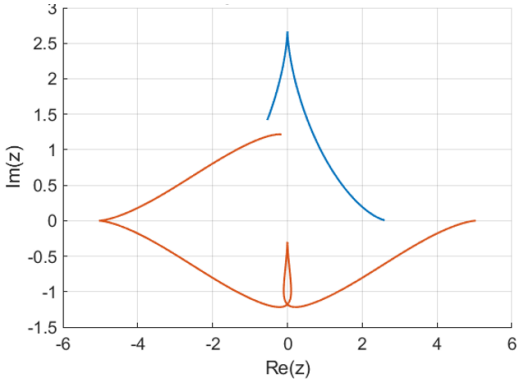


Figura 2. *Graficul soluției*

Pentru testarea algoritmului vom considera în ecuația integrală (1) funcția nucleu $K(t,s) = t^2 + s^2$, constanta $\lambda = 0.5$ și membrul drept $f(t)$ definit analitic pe Γ:

$f(t) = \{2t - \lambda u, dacă\ \theta \in 0, \theta_1^d\ t^3 + 2t - \lambda u, dacă\ \theta \in \theta_1^d, \theta_2^d\ t^3 + 2t - \lambda u, dacă\ \theta = 0$,

unde $\theta_1^d = 0.7\pi, \theta_2^d = 2\pi$, iar $u := (0.78148 - 0.081271i)t^2 + 0.91818 + 0.025237i$. Funcția f are $n_{pd} = 2$ puncte de discontinuitate de speța întâi pe Γ, $t_j^d = \psi\left(e^{i\theta_j^d}\right), j = 1,2$.

La fel, se știe soluția exactă $\varphi \in PC(\Gamma)$ a problemei test considerate:

$$\varphi(t) = \{2t, dacă\ \theta \in 0, \theta_1^d\ t^3 + 2t, dacă\ \theta \in \theta_1^d, \theta_2^d\ t^3 + 2t, dacă\ \theta = 0\ ,$$

care are două puncte de discontinuitate, aceleași ca și membrul drept f (a se vedea Figura 1 și Figura 2). Algoritmul de aproximare a soluției ecuației (1) preia ca date inițiale valorile f_j ale funcției f în punctele $t_j = \psi\left(e^{i\theta_j}\right) \in \Gamma, \theta_j = \frac{2\pi(j-1)}{n_B}, n_B \in N, k = 1, \ldots, n_B$. Se determină coeficienții aproximării soluției ecuației (1) sub forma unei combinații liniare de forma (3), în care se consideră funcții B-spline de ordinul $m = 4$, iar numărul de puncte în care este dată valoarea funcției f pe Γ este $n_B = 320$. Astfel, se determină soluția sistemului de ecuații $B\bar{x} = \bar{f}$, unde $\bar{x} = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_B}, \beta_1, \ldots, \beta_{npd}\right)^T, \bar{f} = \left(f(t_1^c), \ldots, f(t_n^c)\right)^T$, $n = n_B + n_{pd}$, iar matricea B este de forma (6). Integralele $I_k^{1,m}\left(t_j^C\right)$ și $I_r^2\left(t_j^C\right)$ ce definesc matricea B, sunt aproximate conform formulei generalizate a trapezelor (7), în care parametrul $N = 200N = 200$.

În Figura 3 și Figura 4 este prezentată eroarea aproximării soluției φ prin $\varphi_{n_B}^H$, pentru valori $n_B = 160$ și $n_B = 320$. Se vede că maximul erorii descrește semnificativ pentru $n_B = 320$.

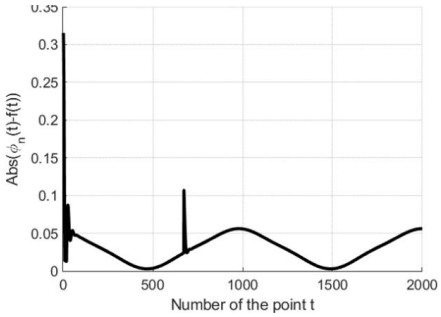


Figura 3. *Eroarea aproximării pentru* $n_B = 160$

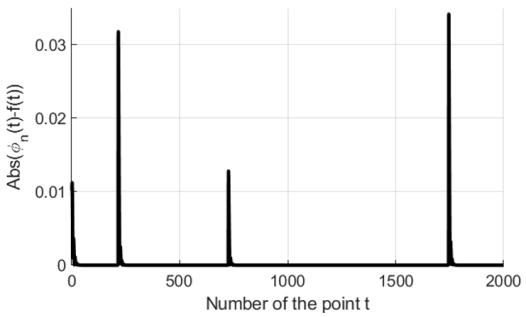


Figura 4. *Eroarea aproximării pentru* $n_B = 320$

CONCLUZIE

În această lucrare este prezentată o metodă numerică eficientă pentru rezolvarea ecuațiilor integrale Fredholm cu termenul din partea dreaptă o funcție continuă pe porțiuni, definită pe un contur închis, neted pe porțiuni din planul complex. Metoda construiește un șir de aproximații care converge aproape uniform către soluția exactă a ecuației integrale.

REFERINȚE:

1. M. CAPCELEA, T. CAPCELEA, B-spline approximation of discontinuous functions defined on a closed contour in the complex plane. În: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica,* vol. 2, no. 99, pp. 59-67, 2022.
2. M. CAPCELEA, T. CAPCELEA, Localization of singular points of meromorphic functions based on interpolation by rational functions. În: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica,* vols. 1-2, no. (95-96), pp. 110-120, 2021.
3. L. N. TREFETHEN, J. WEIDEMAN, The exponentially convergent trapezoidal rule. În: *SIAM Review,* vol. 56, no. 3, pp. 385-458, 2014.
4. M. CAPCELEA, T. CAPCELEA, B-spline collocation method for solving Fredholm integral equations with discontinuous right-hand side. În: *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Moldovei. Matematica,* vol. 2, no. 102, pp. 92-101, 2023.

N.B. *Această lucrare reprezintă rezultatul activității de cercetare desfășurate în cadrul proiectului „011302 Metode analitice și numerice pentru rezolvarea problemelor decizionale dinamice stochastice”.*