QUASIGRUPURI PARASTROFIC-ORTOGONALE

Anastasia PATLACIUC

CZU: 512.548.7 nastia.patlaciuc@mail.ru

Orthogonal and parastrophic-ortogonal n-ary quasigroups and methods of their construction are considered in the present work. A construction method of self-orthogonal 2^n-ary operations, $\forall n \geq 2$, is given which implies that there exist self-orthogonal 2^n-ary quasigroups of order q, for any q excepting 1,2,3,6, and for any $n \geq 2$.

Teoria operațiilor ortogonale a apărut în procesul soluționării cunoscutei ipoteze a lui Euler despre inexistența pătratelor latine ortogonale de ordinul n, unde $n \equiv 2(mod\ 4)$, proces finalizat în anii 60 ai secolului 20, fiind construite pătrate latine ortogonale de orice ordin diferit de 1, 2 și 6. Ideile care au stat la baza acestor construcții au condus la numeroase generalizări ale noțiunii de ortogonalitate și au deschis noi direcții de cercetare în acest domeniu [2,3]. De asemenea, numeroasele posibilități de aplicare a operațiilor ortogonale și a sistemelor ortogonale de operații în combinatorică, teoria algebrică a codurilor, teoria planificării experimentelor, ș.a. au pus noi probleme ce vizează metodele de construcție a sistemelor ortogonale de operații n-are [3-5]. În această direcție sunt mai multe probleme deschise, printre care menționăm problema caracterizării numărului maximal de pătrate latine de ordin dat într-un sistem ortogonal și cea a determinării spectrului quasigrupurilor n −are autoortogonale finite pentru $n \geq 3$. [1,3,5] În caz binar se știe că există quasigrupuri autoortogonale de orice ordin q, diferit de 1,2,3,6. [3].

În această lucrare este dată o metodă nouă de construcție a operațiilor autoortogonale $2^n - \text{are},\ \forall n \geq 2$.

Un grupoid n-ar (Q, A) se numește quasigrup n-ar dacă în egalitatea $A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}$ fiecare n dintre elementele $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ îl determină univoc pe al $(n+1)$-lea. Un sistem din n quasigrupuri n −are $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$, definite pe o mulțime Q, se numește ortogonal dacă sistemul de ecuații $\{A_i(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) = a_i\}_{i=1,\dots,n}$ are soluție unică, pentru orice $a_1, \dots, a_n \in Q$. Fie (Q, A) un quasigrup $n - ar\ (n \geq 2)$ și fie $\sigma \in S_{n+1}$. Numim σ- parastrof al operației A operația ${}^{\sigma}A$, definită de echivalența:

$$ {}^{\sigma}A\left(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)},\ \dots, x_{\sigma(n)}\right) = x_{\sigma(n+1)} \ \Leftrightarrow\ A(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}. $$

Dacă $\sigma(n+1) = n+1$, atunci ${}^{\sigma}A$ se numește parastrof principal al operației A. O operație n −ară A se numește parastrofic ortogonală (autoortogonală), dacă

există n parastrofi (respectiv parastrofi principali) ortogonali ai ei. Unicii parastrofi principali ai unui quasigrup binar (Q, A) sunt dați de substituțiile ε și (12), deci sunt operațiile A *și* $^{(12)}A$. Parastroful $^{(12)}A$ îl vom nota în continuare cu A^* și îl vom numi conjugata operației A. Astfel $A^*(x, y) = A(y, x), \ \forall x, y \in Q$.

În continuare va fi prezentată o metodă generală de construcție a quasigrupurilor $2^n - are$ autoortogonale finite $(n \geq 2)$. Fie (Q, A) un quasigrup binar finit autoortogonal. Notăm*:*

$$D_1^2(x,y) = A(x,y), \ \ D_2^2(x,y) = A^*(x,y).$$

Definim recursiv operațiile 2^n-are $\mathrm{D}_k^{2^n}$, $\mathrm{unde\ n} \geq 2, \ \mathrm{k} = \overline{1, 2^n}$ în felul următor*:*

$$D_1^4(x_1^4) = A(D_1^2(x_1,x_2), D_1^2(x_3, x_4)), \ \ D_2^4(x_1^4) = A^*(D_1^2(x_1,x_2), D_1^2(x_3, x_4)),$$

$$D_3^4(x_1^4) = A(D_2^2(x_1,x_2), D_2^2(x_3, x_4)), \ D_4^4(x_1^4) = A^*(D_2^2(x_1,x_2), D_2^2(x_3, x_4)),$$

ș.a.m.d. În caz general avem:

$$D_{2i-1}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right),$$

$$D_{2i}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A^*\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \quad i = \overline{1, 2^{n-1}}.$$

Lema. $D_k^{2^n}$*, unde* $n \geq 2, \ k = \overline{2, 2^n}$*, sunt parastrofi principali ai quasigrupului* $D_1^{2^n}$.

Propoziție. *Fie* (Q, A) *un quasigrup binar finit autoortogonal, atunci parastrofii principali*

$$\begin{cases} D_{2i-1}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \\ D_{2i}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A^*\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \end{cases}$$

$n \geq 2, \ i = \overline{1, 2^{n-1}}$ *și* $D_1^2 = A, \ D_2^2 = A^*, \ \forall\, x_1, \ \ldots, \ x_{2^n} \in Q$*, formeaza un sistem ortogonal, deci* $\left(Q, \ D_1^{2^n}\right)$ *este autoortogonal.*

Demonstrație. Considerăm sistemul de quasigrupuri 2^n*-are* $D_k^{2^n}$, unde

$$\begin{cases} D_{2i-1}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \\ D_{2i}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = A^*\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \end{cases}$$

$n \geq 2$, $i = \overline{1, 2^{n-1}}$ și $D_1^2 = A$, $D_2^2 = A^*$, $\forall\, x_1, \ldots, x_{2^n} \in Q$. Arătăm că sistemul $D_k^{2^n}$ este ortogonal. Deoarece Q este mulțime finită, este suficient să arătăm unicitatea soluției sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} D_{2i-1}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = a_{2i-1} \\ D_{2i}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = a_{2i} \end{cases} \tag{1}$$

Fie că acest sistem are 2 soluții:

$$\begin{cases} D_{2i-1}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = D_{2i-1}^{2^n}\left(y_1^{2^n}\right), \\ D_{2i}^{2^n}\left(x_1^{2^n}\right) = D_{2i}^{2^n}\left(y_1^{2^n}\right), \end{cases}$$

$\forall i = \overline{1, 2^{n-1}}$. Atunci au loc egalitățile

$$\begin{cases} A\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right) = A\left(D_i^{2^{n-1}}\left(y_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(y_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \\ A^*\left(D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right) = A^*\left(D_i^{2^{n-1}}\left(y_1^{2^{n-1}}\right), D_i^{2^{n-1}}\left(y_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right)\right), \end{cases}$$

$$\forall i = \overline{1, 2^{n-1}}.$$

Deoarece sistemul $\{A, A^*\}$ este ortogonal, din ultimul sistem rezultă că:

$$\begin{cases} D_i^{2^{n-1}}\left(x_1^{2^{n-1}}\right) = D_i^{2^{n-1}}\left(y_1^{2^{n-1}}\right), \\ D_i^{2^{n-1}}\left(x_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right) = D_i^{2^{n-1}}\left(y_{2^{n-1}+1}^{2^n}\right), \end{cases} \forall i = \overline{1, 2^{n-1}}.$$

Deoarece sistemul $\left\{D_1^{2^{n-1}}, \ldots, D_{2^{n-1}}^{2^{n-1}}\right\}$ este ortogonal, obținem:

$$\begin{cases} x_k = y_{k'} \\ x_s = y_{s'} \end{cases} \forall k = \overline{1, 2^{n-1}},\ \forall s = \overline{2^{n-1}+1, 2^n}.$$

Astfel am obținut că soluția sistemului (1) este unică. Deci sistemul de quasigrupuri 2^n-are $D_k^{2^n}$, este ortogonal. □

Corolar. Exista quasigrupuri 2^n-are autoortogonale de ordinul q, pentru orice q diferit de 1,2,3, 6 si orice $n \geq 2$.

Referințe:

1. BELOUSOV, V. *Fundamentele teoriei quasigrupurilor și a buclelor*. Moscova, Nauka, 1967, 224 p.
2. BOSE, R. C., SHRIKHANDE, S. S., PARKER, E. T. Further results of the constructions of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture. *Canad. J. Math*. 1960, 12, pp. 189-203.

3. DENES, J., KEEDWELL, A.D. *Latin squares and their applications*: Second edition. Elsevier, 2015, 440 p.
4. EVANS, T. The construction of orthogonal *k*-skeins and latin *k*-cubes. *Aequat. Math*., 1976, 14, N3, pp. 485-491.
5. SIRBU, P. *Teoria quasigrupurilor. Introducere*. CEP USM, 2014, 172 p.

Recomandat
Parascovia SÎRBU, *dr., conf. univ.*