ASUPRA $\pi-$QUASIGRUPURILOR DE TIPUL T_2

Dina CEBAN

Mulțimea Q cu operația binară $(\cdot)$ se numeşte quasigrup dacă, pentru $\forall a,b\in Q$, ecuațiile $a\cdot x=b,\ y\cdot a=b$ au soluție unică în Q. Un quasigrup cu unitate, adică un element e din Q care verifică relațiile $e\cdot x=x\cdot e=x,\ \forall x\in Q$, se numeşte buclă. Un quasigrup $(Q,\circ$ este izotopul quasigrupului $(Q,\cdot)$ dacă există un triplet (α,β,γ) de substituții ale mulțimii Q, astfel încât $x\circ$ $\chi(x)\cdot\beta(y))$. Un quasigrup $(Q,\cdot)$ se numeşte $T-$quasigrup ([5]), dacă există un grup abelian $(Q,+)$, automorfismele lui $\varphi,\psi\in Aut(Q,+)$ şi un element $g\in Q$, astfel încât, pentru orice $x,y\in Q$, are loc următoarea egalitate:

$$x\cdot y=\varphi(x)+\psi(y)+g.$$

Upla $((Q,+),\varphi,\psi,g)$ se numeşte $T-$formă, iar grupul $(Q,+)$ se numeşte $T-$grupul quasigrupului $(Q,\cdot)$.

Un $\pi-$quasigrup este quasigrupul care verifică una din identitățile minimale din clasificarea Belousov - Bennett [1]. Câteva rezultate generale despre $\pi-$quasigrupurile izotope grupurilor sunt publicate în [1-4]. Un quasigrup (Q,A) se numeşte $\pi-$quasigrup de tipul $[\alpha,\beta,\gamma]$, unde $\alpha,\beta,\gamma\in S_3$, dacă verifică identitatea:

$$^{\alpha}A(x,{}^{\beta}A(x,{}^{\gamma}A(x,y)))=y.$$

În lucrarea dată, considerăm $\pi-$quasigrupurile de tipul $T_2=[\varepsilon,\varepsilon,(13)]$, adică quasigrupurile ce verifică identitatea

$$x\cdot(y\cdot(y\cdot x))=y\ . \qquad (1)$$

Observăm că $\pi-$buclele de tipul T_2 sunt triviale. Într-adevăr, dacă $(Q,\cdot)$ este o $\pi-$buclă de tipul T_2 cu unitatea e atunci, substituind $x=e$ în (1) , avem: $y^2=y,\forall y\in Q.$ Pe de altă parte, substituind $y=e$ în (1), obținem $x^2=e,\forall x\in Q.$ Astfel avem: $x=x^2=e,\forall x\in Q.$ Deci, $(Q,\cdot)$ este o buclă trivială.

Propoziția 1. *Un* $T-$*quasigrup* $(Q,\cdot)$ *cu* $T-$*forma* $((Q,+),\varphi,\psi,g)$, *unde* $\varphi,\psi\in Aut(Q,+)$ *şi* $g\in Q$, *este un* $\pi-$*quasigrup de tipul* T_2 *dacă şi numai dacă au loc egalităţile* $\varphi=-\psi^3$, $\psi^5+\psi^4=-\varepsilon$, $\psi^2(g)+\psi(g)+g=0$, *unde* $\varepsilon:Q\to Q,\ \varepsilon(x)=x,\ \forall x\in Q$.

Demonstraţie. Fie $(Q,\cdot)$ un $T-$quasigrup cu $T-$forma $((Q,+),\varphi,\psi,g)$. Atunci

$$x\cdot y=\varphi(x)+\psi(y)+g, \tag{2}$$

$\forall x,y\in Q$. Dacă $(Q,\cdot)$ este un $\pi-$quasigrup de tipul T_2, atunci el verifică identitatea (1). Utilizând (2), identitatea (1) ia forma:

$$\varphi(x)+\psi\varphi(y)+\psi^2\varphi(y)+\psi^3(x)+\psi^2(g)+\psi(g)+g=y, \tag{3}$$

$\forall x,y\in Q$. Luăm $x=y=0$ în (3), unde 0 este elementul neutru al grupului $Q(+)$, obţinem:

$$\psi^2(g)+\psi(g)+g=0. \tag{4}$$

Pentru $y=0$, egalitatea (3) ia forma $\varphi(x)+\psi^3(x)=0,\ \forall x\in Q$, adică

$$\varphi=-\psi^3. \tag{5}$$

Luând $x=0$ în (3) obţinem $\psi\varphi(y)+\psi^2\varphi(y)=y$ sau $\psi\varphi+\psi^2\varphi=\varepsilon$. Substituind (5) în ultima egalitate, avem:

$$\psi^5+\psi^4=-\varepsilon. \tag{6}$$

Reciproc, dacă au loc egalităţile (4)-(6), atunci $y=\psi\varphi(y)+\psi^2\varphi(y)+\varphi(x)+\psi^3(x)+\psi^2(g)+\psi(g)+g=$
$=x\cdot(y\cdot(y\cdot x)),\ \forall x,y\in Q,$ deci $(Q,\cdot)$ este un $\pi-$quasigrup de tipul T_2.

Următorul exemplu arată că clasa de $\pi-T-$quasigrupuri de tipul T_2 este nevidă.

Exemplu. Quasigrupul $(Z_7,\cdot)$, unde

$$x\cdot y=\overline{6}x+\overline{2}y+\overline{4},$$

$\forall x,y\in Q$, este un $\pi-T-$quasigrup de tipul T_2, cu $T-$forma $((Z_7,+),\varphi,\psi,\overline{4})$, unde $\varphi(x)=\overline{6}x,\ \psi(x)=\overline{2}x,\forall x\in Z_7$.

Propoziția 2. Orice $\pi-T-$quasigrup de tipul T_2 este medial.

Într-adevăr, dacă $(Q,\cdot)$ este un $\pi-T-$quasigrup de tipul T_2, atunci $\varphi=-\psi^3$, deci $\varphi\cdot\psi=-\psi^3\cdot\psi=$

$=\psi\cdot(-\psi^3)=\psi\cdot\varphi.$

Propoziția 3. *Fie* $(Q,\cdot)$ *un* $\pi-$*quasigrup de tipul* T_2 *şi* $(Q,\circ$ *izotopul său cu izotopia* (α,β,γ). *Atunci* $(Q,\circ$ *este un* $\pi-$*quasigrup de tipul* T_2 *dacă şi numai dacă, pentru* $\forall x,y\in Q,$ *are loc următoarea egalitate:*

$$x\cdot\beta\gamma^{-1}(y\cdot\beta\gamma^{-1}(y\cdot\beta\alpha^{-1}(x)))=\gamma\alpha^{-1}(y). \qquad (7)$$

Demonstrație. Izotopul $(Q,\circ$ este un $\pi-$quasigrup de tipul T_2 dacă şi numai dacă verifică identitatea

$$x\circ \quad \circ \quad \circ \qquad (8)$$

Utilizând izotopia $x\circ$ $\chi(x)\cdot\beta(y)),$ identitatea (8) ia forma

$$\gamma^{-1}(\alpha(x)\cdot\beta\gamma^{-1}(\alpha(y)\cdot\beta\gamma^{-1}(\alpha(y)\cdot\beta(x))))=y.$$

Efectuăm substituția $x\to\alpha^{-1}(x),y\to\alpha^{-1}(y)$ în ultima egalitate, obținem:

$$\gamma^{-1}(x\cdot\beta\gamma^{-1}(y\cdot\beta\gamma^{-1}(y\cdot\beta\alpha^{-1}(x))))=\alpha^{-1}(y),$$

sau

$$x\cdot\beta\gamma^{-1}(y\cdot\beta\gamma^{-1}(y\cdot\beta\alpha^{-1}(x)))=\gamma\alpha^{-1}(y).$$

Reciproc, dacă un $\pi-$quasigrupul $(Q,\cdot)$ de tipul T_2 verifică (7) atunci, luând $x\to\alpha(x),y\to\alpha(y)$ avem:

$$\alpha(x)\cdot\beta\gamma^{-1}(\alpha(y)\cdot\beta\gamma^{-1}(\alpha(y)\cdot\beta(x)))=\gamma(y).$$

Utilizând izotopia $x\circ$ $\chi(x)\cdot\beta(y))$, obținem $\gamma(x\circ \quad \circ \quad \circ$ $y).$ Deoarece γ este o bijecție, din ultima egalitate rezultă $x\circ \quad \circ \quad \circ$, deci $(Q,\circ$ este un $\pi-$quasigrup de tipul T_2. □

Corolar. Fie $(Q,\cdot)$ un $\pi-$quasigrup de tipul T_2 cu unitate la stânga *f*. Dacă izotopul său $(Q,\circ$, unde $(\circ$ $^{\gamma)}$, este un $\pi-$quasigrup de tipul T_2, atunci $x\cdot(\beta\gamma^{-1})^3\gamma\alpha^{-1}(x)=\gamma\alpha^{-1}(f),\forall x\in Q.$

Demonstrație. Dacă $(Q,\circ$ este un $\pi-$quasigrup de tipul T_2, atunci el verifică (7). Luând $y=f$ în (7), obținem $x\cdot(\beta\gamma^{-1})^3\gamma\alpha^{-1}(x)=\gamma\alpha^{-1}(f),\forall x\in Q.$

Referințe:

1. BELOUSOV, V. *Parastrofic-orthogonal quasigroups.* Quasigroups and related systems, 14 (2005), 3-51.
2. BELOUSOV, V., GWARAMIJA, A. *On Stein quasigroups*. Soobsh. Gruz. SSR., 44 (1966), 537-544.
3. SYRBU, P. On $\pi-$quasigroups isotopic to abelian groups. In: Bul. *Acad. Științe Repub. Mold. Mat.*, 3(61) (2009), 109-117.
4. BENNETT, F. E. Quasigroups. In: *Handbook of Combinatorial Designs*. Eds. C. J. COLBOURN, J. H. DINITZ. CRC Press, 1996.
5. KEPKA, T., NEMEC, P. T-quasigroups. In: *Acta univ. Carolinae. Math. Phys.*, 1971, 1(12), 31-39.