

## PUNCTE FIXE ȘI PERIODICE ALE FUNCȚIILOR PERTURBATE

*Vladimir MELNIC, Facultatea de Matematică și Informatică*

*In this paper we give some sufficient conditions, under which a perturbed function inherits the property to have fixed or periodic points as well as the initial function on  $R$ . We show as well that for any continuous and increasing one-to-one function  $g : R \rightarrow R$  and any natural  $p \geq 2$  there exists a solution of the equation  $f^p = g$  in the same set of continuous and increasing one-to-one functions.*

În studierea dinamicii iterațiilor unei funcții un loc important îl ocupă studierea punctelor fixe și punctelor periodice ale funcției, precum și caracterul lor.

În esența sistemelor dinamice discrete haotice o importanță mare o au punctele periodice ale funcției, existența lor.

Densitatea punctelor periodice ale funcției este una din condițiile apariției haosului. Sistemele dinamice discrete haotice au fost studiate de mulți autori (de exemplu, [1-5]).

Dinamica funcțiilor definite pe  $R$  prezintă un domeniu interesant de studiu, deoarece, în pofida unei simplități aparente a problemelor formulate, dinamica unidimensională oferă o gamă largă de proprietăți, de la o comportare simplă a orbitelor punctelor până la una haotică (a se vedea, de exemplu, [1, 2, 5]).

Pe de altă parte, având ca obiect de cercetare o funcție stabilită în mod experimental sau prin calcul aproximativ, putem vorbi de o perturbare a funcției de studiu inițiale. Acest fapt trebuie să fie luat în considerație la analiza rezultatelor obținute.

În prezenta lucrare se studiază condiții suficiente, în care o funcție perturbată moștenește unele proprietăți cu privire la punctele fixe și periodice ale funcției neperturbate pe  $R$ .

Fie  $f : R \rightarrow R$  o funcție continuă. Vom spune că funcția  $\tilde{f} : R \rightarrow R$  este o  $\varepsilon$ -perturbare a funcției  $f$ , dacă  $|\alpha(x)| = |\tilde{f}(x) - f(x)| < \varepsilon$  pentru orice  $x \in R$ .

Punctul  $x_0 \in R$  se numește *punct fix* al funcției  $f$ , dacă  $f(x_0) = x_0$ . Mulțimea punctelor fixe ale funcției  $f$  se notează cu  $Fix f$ .

**Teorema 1.** Fie funcția  $f : R \rightarrow R$ ,  $f \in C^1(R)$ , și  $x_0 \in \text{Fix } f$ . Dacă  $f'(x_0) \neq 1$  (punct hiperbolic), atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$ , astfel încât pentru orice funcție  $\alpha : R \rightarrow R$ ,  $|\alpha(x)| < \delta$ ,  $(\forall)x \in R$ , funcția perturbată  $f_\delta : R \rightarrow R$ ,  $\tilde{f}_\delta(x) = f(x) + \alpha(x)$ , are cel puțin un punct fix în  $\varepsilon$ -vecinătatea lui  $x_0$ .

**Teorema 2.** Fie funcția  $f : R \rightarrow R$ ,  $f \in C^{n+1}(R)$ ,  $x_0 \in \text{Fix } f$  și  $f'(x_0) = 1$  (punct nehiperbolic). Presupunem că  $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$  și  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ .

1) Dacă  $n$  este un număr par, atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o funcție  $\alpha : R \rightarrow R$  cu condiția  $|\alpha(x)| < \varepsilon$ ,  $(\forall)x \in R$ , astfel încât funcția perturbată  $\tilde{f}_\varepsilon : R \rightarrow R$ ,  $\tilde{f}_\varepsilon(x) = f(x) + \alpha(x)$ , nu are niciun punct fix într-o vecinătate a punctului  $x_0$ .

2) Dacă  $n$  este un număr impar, atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  și orice  $\alpha : R \rightarrow R$ ,  $|\alpha(x)| < \varepsilon$ ,  $(\forall)x \in R$ , funcția perturbată  $\tilde{f}_\varepsilon : R \rightarrow R$ ,  $\tilde{f}_\varepsilon(x) = f(x) + \alpha(x)$ , are cel puțin un punct fix într-o vecinătate a punctului  $x_0$ .

**Remarca 1.** Funcția  $f : R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x + e^{-x^2}$ , reprezintă un exemplu de funcție, care nu are puncte fixe, dar pentru orice  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , funcția perturbată  $\tilde{f}_\varepsilon : R \rightarrow R$ ,  $\tilde{f}_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon$ , are punct fix.

Definim inductiv iterația  $f^n : R \rightarrow R$ :  $f^0(x) = x$ ,  $f^{p+1}(x) = f(f^p(x))$  pentru  $p \geq 0$ .

Punctul  $x_0 \in R$  se numește *punct periodic de perioadă  $p$*  al funcției  $f$ , dacă  $f^p(x_0) = x_0$ . Dacă  $p$  este cel mai mic număr natural nenul, pentru care  $f^p(x_0) = x_0$ , atunci  $p$  se numește *perioadă primă* a punctului  $x_0$ . Mulțimea punctelor periodice de perioadă  $p$  ale funcției

$f$  se notează cu  $Per_p f$  (a se vedea [5]). Dacă  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , atunci *multiplicator* al punctului periodic  $x_0 \in Per_p f$  de perioadă  $p$  (a se vedea [5]) se numește produsul

$$\mu(x_0) = f'(x_0) \cdot f'(f(x_0)) \cdot f'(f^2(x_0)) \cdot \dots \cdot f'(f^{p-1}(x_0)).$$

Deoarece punctele periodice de perioadă  $p$  ale funcției  $f$  sunt puncte fixe ale funcției  $f^p$ , teoremele 1 și 2 pot fi reformulate pentru punctele periodice ale funcției  $f$ . Vom prezenta, ca exemplu, analogul teoremei 1 prin teorema 4.

**Teorema 3.** *Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Pentru orice  $\varepsilon > 0$ , orice segment  $[a, b]$  și orice număr natural  $p \geq 2$  există  $\delta > 0$ , astfel încât pentru orice funcție perturbată  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha(x)$ , unde  $|\alpha(x)| < \delta$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ , avem  $|\tilde{f}^n(x) - f^n(x)| < \varepsilon$  pentru orice  $1 \leq n \leq p$  și  $x \in [a, b]$ .*

**Teorema 4.** *Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , și  $x_0$  un punct periodic de perioadă primă  $p$ . Dacă *multiplicatorul*  $\mu(x_0) \neq 1$ , atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$ , astfel încât orice funcție perturbată  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x) + \alpha(x)$ , unde  $|\alpha(x)| < \delta$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$ , are cel puțin un punct periodic de perioadă  $p$  în  $\varepsilon$ -vecinătatea lui  $x_0$ .*

Având o funcție continuă, apare problema: În ce condiții această funcție poate fi inclusă în iterațiile unei alte funcții? Mai exact, având o funcție continuă  $g$  și un număr natural  $p \geq 2$ , în ce condiții ecuația funcțională  $f^p = g$  admite cel puțin o soluție  $f$ ?

Următoarea teoremă prezintă condiții suficiente pentru rezolvarea unor astfel de ecuații funcționale.

**Teorema 5.** *Pentru orice funcție  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă, bijectivă și crescătoare și pentru orice număr natural  $p \geq 2$  există o funcție  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuă, bijectivă și crescătoare, astfel încât  $f^p(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Remarca 2.** Demonstrația teoremei 5 este constructivă și poate servi în calitate de algoritm pentru găsirea a cel puțin unei soluții a ecuației funcționale  $f^P(x) = g(x)$  în condițiile teoremei.

***Bibliografie:***

1. BARNESLEY, M., *Fractals everywhere*. San Diego: Academic Pres. Inc., 1988.
2. DEVANEY, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. New York: Addison-Wesley Publish. Co., 1989.
3. OTT, E., *Chaos in dynamical systems*. Cambridge: Cambridge University Press., 1993.
4. КАТОК, А., ХАССЕЛБЛАТ, Б., *Введение в современную теорию динамических систем*. Москва: Факториал, 1999.
5. ШАРКОВСКИЙ, А., МАЙСТРЕНКО, Ю., РОМАНЕНКО, Е., *Разностные уравнения и их приложения*. Киев: Наукова Думка, 1986.

*Recomandat*

*Valeriu GUȚU, dr., conf. univ.*