CONTRIBUȚII LA STUDIUL STABILITĂȚII STĂRILOR DE ECHILIBRU ALE SISTEMELOR DINAMICE COMPLEXE

Alexandr BARSUC, Florentin PALADI
CZU: 517.938:53 fpaladi@yahoo.com

Studiul de stabilitate a stărilor de echilibru pentru sistemele dinamice în conformitate cu teoria stabilității în sens Liapunov se reduce la cercetarea sistemelor dinamice liniare corespunzătoare și, în anumite condiții folosind analiza sistemelor liniare, este posibil să formulăm concluzii valide privind stabilitatea stărilor de echilibru ale sistemelor neliniare respective [1, 2]. Conceptul de stabilitate în sine aparține teoriei calitative a sistemelor dinamice și, prin urmare, este posibil să formulăm criterii de stabilitate care nu țin de identificarea unei soluții exacte. În articolul publicat recent [3] formulăm criteriile de stabilitate pentru sistemele dinamice liniare descrise de un sistem autonom de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți reali constanți în cazuri critice ale teoriei stabilității în sens Liapunov atât pentru valorile proprii simple, cât și pentru cele multiple ale matricei coeficienților. Formularea propusă nu are legătură cu construcția formei canonice Jordan a matricei coeficienților și folosește numai informații despre ordinul matricei, rangul acesteia și multiplicitatea algebrică a valorilor proprii corespunzătoare cazurilor critice.

Rezultatele clasice privind stabilitatea soluțiilor sunt prezentate pentru următoarele sisteme omogene liniare autonome de ecuații diferențiale:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}\,,\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0\,, \qquad (1)$$

unde $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ și A este matricea $n \times n$ cu valori constante (independente de parametrul *t*). Prin urmare, transformarea de variabile $\vec{y} = T\vec{x}$ ($\det(T) \neq 0$) este introdusă în conformitate cu teoria generală [1], în raport cu care sistemul (1) este transformat în forma canonică:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = TAT^{-1}\vec{y} = J\vec{y}\,,$$

unde J este o matrice quasidiagonală care reprezintă forma canonică Jordan a matricei A cu următoarea reprezentare:

$$J = [J_{m_1}(\lambda_1), \ldots, J_{m_k}(\lambda_i)]. \qquad (2)$$

Valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ ale matricei A din (2) sunt determinate ca soluții ale ecuației $\Delta(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) = 0$, unde I este matricea unitate (sau matricea identitate), iar $J_{m_s}(\lambda_s)$ ($s = 1,2,\ldots,i$) sunt matrice pătrate de ordinul m_s localizate de-a lungul diagonalei, pentru care $m_1 + m_2 + \ldots + m_i = n$. Introducem în continuare matricea $A(\lambda) \equiv A - \lambda I$, unde I este matricea unitate.

Vom considera valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ale matricei A de dimensiunea $n \times n$, care sunt determinate de soluția ecuației $\det(A(\lambda)) = 0$. În absența valorilor proprii multiple $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, concluzia referitor la stabilitatea soluțiilor sistemului de ecuații diferențiale (1) poate fi efectuată doar în baza analizei semnului valorilor λ_s. Mai mult ca atât, dacă există o singură valoare de zero între toate valorile λ_s, presupunând că celelalte valori proprii sunt negative sau posedă partea reală negativă, atunci soluția particulară corespunzătoare acestei valori este stabilă. Dacă însă există o valoare complexă cu partea reală egală cu zero între toate valorile λ_s și, în același timp, o valoare complexă conjugată λ_s^*, presupunând că restul valorilor proprii sunt negative sau posedă partea reală negativă, atunci soluția particulară corespunzătoare acestei valori este periodică și stabilă. Să analizăm în continuare și cazul când există valori proprii multiple egale cu zero sau mai multe valori proprii complexe cu partea reală egală cu zero între valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ și să luăm în considerare faptul că λ_s este o valoare proprie a matricei $A(\lambda)$ de multiplicitatea k.

Totodată, o matrice arbitrară $A(\lambda)$ poate fi redusă prin transformări elementare în forma diagonală canonică Smith $C(\lambda)$, după cum urmează:

$$C(\lambda) = \left[d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)\right]. \qquad (3)$$

Elementele diagonale ale matricei $C(\lambda)$ sunt date de expresia (3), iar funcțiile $d_i(\lambda)$ care apar în definiția matricei canonice $C(\lambda)$ se numesc factori invarianți, adică

$$d_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_{si})^{n_{si}}. \qquad (4)$$

Vom nota că $\det(A(\lambda)) = \det(C(\lambda)) = d_1(\lambda) \times d_2(\lambda) \times \ldots \times d_n(\lambda)$. În particular, în cazul valorilor proprii simple, matricea $C(\lambda)$ poate fi scrisă în forma:

$$C(\lambda) = \left[1,1,\ldots,1, d_1(\lambda) \times d_2(\lambda) \times \ldots \times d_n(\lambda)\right],\ d_i(\lambda) = \lambda - \lambda_i\ . \quad (5)$$

Referitor la expresia (5) se poate de menționat faptul că toate elementele diagonale ale matricei $C(\lambda)$ sunt egale cu unitatea, cu excepția ultimei valori, care este o expresie pentru determinantul acestei matrice, în timp ce factorii $\lambda - \lambda_i$ intră liniar în această expresie. În particular, pe baza analizei structurii $C(\lambda)$ mai putem menționa că rangul matricei $C(\lambda_i)$ și, ulterior, al matricei $A(\lambda_i)$ pentru fiecare valoare $\lambda = \lambda_i$ este dat de următoarea expresie: $r = rank(A(\lambda_i)) = rank(C(\lambda_i)) = n - 1$. Factorii $\lambda - \lambda_i$ în cazul unei valori proprii multiple $\lambda = \lambda_i$, în conformitate cu expresia (4), intră, în general, neliniar în factorii invariabili $d_i(\lambda)$. Cu toate acestea, trebuie de remarcat în special cazul când factorul $\lambda - \lambda_i$ (i=s) intră liniar în expresia pentru $d_s(\lambda)$. Dacă $\lambda = \lambda_i$ este o valoare cu multiplicitatea k, atunci numărul acestor factori este exact egal cu k, deoarece determinantul matricelor $A(\lambda)$ și $C(\lambda)$ posedă următoarea reprezentare $\det(A(\lambda)) = \det(C(\lambda)) = (\lambda - \lambda_i)^k \times d_1(\lambda) \times d_2(\lambda) \times \ldots \times d_s(\lambda)$, în care factorii invariați $d_l(\lambda)$ nu conțin termenii $\lambda - \lambda_i$. Astfel, k elemente diagonale ale matricei $C(\lambda_i)$ dispar pentru $\lambda = \lambda_i$, iar rangul acesteia, adică și rangul matricei $A(\lambda_i)$, este determinat de expresia pentru rangul r în forma

$$r = rank(A(\lambda_i)) = rank(C(\lambda_i)) = n - k . \qquad (6)$$

De asemenea, dacă factorul $\lambda - \lambda_i$ intră neliniar în ecuația pentru $d_l(\lambda)$, atunci concluzionăm că numărul elementelor diagonale ale matricei $C(\lambda_i)$ care tind către zero pentru $\lambda = \lambda_i$ este mai mic decât numărul *k,* iar rangul său și, prin urmare, rangul matricei $A(\lambda_i)$ în acest caz satisfac inegalitatea

$$r = rank(A(\lambda_i)) = rank(C(\lambda_i)) > n - k . \qquad (7)$$

Prin urmare, ajungem la un criteriu general foarte convenabil pentru determinarea naturii stabilității pentru soluțiile sistemului de ecuații diferențiale (1) în cazurile critice ale teoriei stabilității în sens Liapunov în condițiile multiplicității valorilor proprii, fără reducerea matricei $A(\lambda_i)$ la forma canonică Jordan. Pentru valorile date ale matricei de ordinul *n,* rangul *r* și multiplicitatea valorii proprii *k* egală cu zero, cu condiția că toate celelalte valori proprii sunt fie negative, fie posedă partea reală negativă, soluția sistemului de ecuații diferențiale (1) este stabilă, dacă condiția (6) este satisfăcută, în timp ce devine instabilă la îndeplinirea condiției (7). În același timp, trebuie de menționat și faptul că matricea $A(\lambda_i = 0)$ coincide cu matricea inițială în cazul valorilor proprii nule.

Referințe:

1. BELLMAN, R. *Introduction to Matrix Analysis, Classics in Applied Mathematics*. Book 19, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. ISBN 978-0898713992.
2. BELLMAN, R. *Stability Theory of Differential Equations*. Dover Books on Mathematics, Dover Publications. New York, 2008. ISBN 978-0486462738.
3. BARSUK, A.A., PALADI, F. Modeling phase transitions: on the stability of equilibrium states of the dynamical systems in critical cases. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* 2020, in press.

Autorii sunt recunoscători pentru sprijinul oferit de Agenția Națională pentru Cercetare și Dezvoltare și de Universitatea de Stat din Moldova în Proiectul de cercetare ***20.80009.7007.05.***