CONSTRUCŢIA UNOR SISTEME ORTOGONALE DE QUASIGRUPURI n-ARE

Anastasia PATLACIUC

CZU: 512.548.7 nastia.patlaciuc@mail.ru

New ways of constructing orthogonal systems of finite n-ary quasigroups are proposed, which are based on the idea of a known T. Evans's method.

Apariţia teoriei operaţiilor ortogonale ţine în mare parte de ipoteza lui Euler formulată în 1782, care presupunea că nu există pătrate latine ortogonale de ordinul $q \equiv 2 \ (mod\, 4)$. Ipoteza lui Euler a fost soluţionată definitiv (negativ) în anii 1959-1960 de către Bose, Parker şi Shrikhande [1], în rezultat obţinându-se că există pătrate latine ortogonale de orice ordin $q \neq 2,6$. Pătratele latine reprezintă tablele Cayley ale quasigrupurilor finite [2]. Astfel, noţiunea de ortogonalitate a două pătrate latine conduce în mod firesc la noţiunea de ortogonalitate a două operaţii de quasigrup: două quasigrupuri $(Q,\cdot)$ şi $(Q,*)$ se numesc ortogonale dacă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x \cdot y = a, \\ x * y = b \end{cases}$$

are o singură soluţie în Q, pentru fiecare $a, b \in Q$. Un sistem de operaţii binare, definite pe o muiltime Q, se numeşte ortogonal, dacă orice două operaţii ale acestui sistem sunt ortogonale. În lucrarea [3] Belousov a studiat proprietăţile şi transformările sistemelor ortogonale de quasigrupuri care păstrează ortogonalitatea lor.

Ortogonalitatea operaţiilor n-are, $n \geq 2$, a fost studiată din punct de vedere algebric la mijlocul anilor 70 ai secolului XX de către V.Belousov, T.Evans ş.a. Au fost generalizate în caz n-ar noţiunile de pereche ortogonală şi sistem ortogonal de operaţii (quasigrupuri). T.Evans a obţinut metode de construcţie a sistemelor ortogonale de quasigrupuri n-are, pentru orice $n \geq 2$, pe o mulţime finită de orice cardinal $q \neq 2,6$ [4].

Actualitatea temei abordate ţine de numeroasele posibilităţi de aplicare a operaţiilor ortogonale în combinatorică, teoria planificarii experimentelor, teoria algebrică a codurilor ş.a. În această direcţie există mai multe probleme deschise cum ar fi, de exemplu: de caracterizat numărul maximal de pătrate latine într-un sistem ortogonal.

Ideea care stă la baza metodei lui Evans, menţionate mai sus, poate fi generalizată în vederea obţinerii unor noi construcţii ce permit, de exemplu, dezvoltarea teoriei operaţiilor n-are autoortogonale [5]. În lucrarea dată sunt obţinute construcţii noi de sisteme ortogonale, în caz n-ar, care au la bază ideea metodei propuse de T.Evans.

Operaţiile n-are de quasigrup $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, definite pe o mulţime Q, se numesc **ortogonale**, dacă sistemul de ecuaţii $\{A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_i\}_{i=1,n}$ are soluţie unică, pentru orice $a_1, \dots, a_n \in Q$. Sistemul $\{A_1, A_2, \dots, A_s\}, s \geq n$ de operaţii n-are definite pe mulţimea Q se numeşte **ortogonal,** dacă orice n operaţii ale sistemului dat sunt ortogonale. Observăm că sistemul de operaţii n-are $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, definite pe mulţimea Q, este ortogonal, dacă şi numai dacă este bijectivă aplicaţia

$$\varphi: Q^n \to Q^n, \varphi(x_1, \dots, x_n) = \big(A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_n(x_1, \dots, x_n)\big).$$

Astfel, în caz finit $|Q| < \infty$, sistemul $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ este ortogonal, dacă şi numai dacă are loc implicaţia:

$$\{A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_i(x_1^1, \dots, x_n^1)\}_{i=1}^{n} \Rightarrow \{x_i = x_i^1\}_{i=1}^{n}$$

Propoziţia 1. *Dacă A şi B sunt operaţiii binare de quasigrup pe o mulţime Q, atunci operaţia ternară C, unde* $C(x,y,z) = A\big(x, B(y,z)\big), \forall x, y, z \in Q$, *este o operaţie de quasigrup.*

Demonstraţie. În acest caz $C(x,a,b) = d \Leftrightarrow A\big(x, B(a,b)\big) = d \Leftrightarrow x = {}^{-1}A(d, B(a,b))$, deci ecuaţia data are soluţie unică în Q. Analog obţinem că ecuaţia $C(a,x,b) = d \Leftrightarrow A^{-1}(a,d) = B(x,b)$ are soluţia unică $x = {}^{-1}B(A^{-1}(a,d), b) \in Q$, iar ecuaţia $C(a,b,x) = d \Leftrightarrow A^{-1}(a,d) = B(b,x)$ are soluţia unică $x = B^{-1}\big(b, A^{-1}(a,d)\big) \in Q$. Astfel, $Q(C)$ este un quasigrup ternar. □

Propoziţia 2. [5] *Fie* $\{A_1, A_2\}$ *şi* $\{B_1, B_2\}$ *două sisteme ortogonale de quasigrupuri binare definite pe mulţimea Q,* $|Q| < \infty$. *Atunci este ortogonal sistemul de operaţii ternare* $\{C_1, C_2, C_3\}$, *unde* $C_1(x,y,z) = A_1\big(x, B_1(y,z)\big)$, $C_2(x,y,z) = A_2\big(x, B_1(y,z)\big)$, $C_3(x,y,z) = A_1\big(x, B_2(y,z)\big)$.

În continuare vom propune o construcţie generală nouă de sisteme ortogonale de quasigrupuri n-are, bazată pe ideea construcţiilor lui Evans.

Propoziţia 3. *Fie Q o mulţime finită,* $\{A_1, ..., A_m\}$ *un sistem ortogonal de quasigrupuri m–are, definite pe mulţimea Q,* $\{B_{j1}, B_{j2}\}, j = \overline{1,m}$ *– m perechi ortogonale de quasigrupuri binare definite pe Q. Atunci* $\{D_{ij} \mid i = 1,2; j = \overline{1,m}\}$, *unde*

$$D_{11}(x_1, \dots, x_{2m}) = A_1\big(B_{11}(x_1, x_2), B_{21}(x_3, x_4), \dots, B_{m1}(x_{2m-1}, x_{2m})\big),$$
$$\dots$$
$$D_{1m}(x_1, \dots, x_{2m}) = A_m\big(B_{11}(x_1, x_2), B_{21}(x_3, x_4), \dots, B_{m1}(x_{2m-1}, x_{2m})\big),$$
$$D_{21}(x_1, \dots, x_{2m}) = A_1\big(B_{12}(x_1, x_2), B_{22}(x_3, x_4), \dots, B_{m2}(x_{2m-1}, x_{2m})\big),$$
$$\dots$$
$$D_{2m}(x_1, \dots, x_{2m}) = A_m\big(B_{12}(x_1, x_2), B_{22}(x_3, x_4), \dots, B_{m2}(x_{2m-1}, x_{2m})\big)$$

este un sistem ortogonal de quasigrupuri 2m- are.

Demonstraţie. Admitem că

$$\begin{cases} D_{11}(x_1,\dots,x_{2m}) = D_{11}(x'_1,\dots,x'_{2m}), \\ \dots \\ D_{1m}(x_1,\dots,x_{2m}) = D_{1m}(x'_1,\dots,x'_{2m}), \\ D_{21}(x_1,\dots,x_{2m}) = D_{21}(x'_1,\dots,x'_{2m}), \\ \dots \\ D_{2m}(x_1,\dots,x_{2m}) = D_{2m}(x'_1,\dots,x'_{2m}), \end{cases}$$

atunci:

$$\begin{cases} A_1\big(B_{11}(x_1,x_2),\dots,B_{m1}(x_{2m-1},x_{2m})\big) = A_1\big(B_{11}(x'_1,x'_2),\dots,B_{m1}(x'_{2m-1},x'_{2m})\big), \\ \dots \\ A_m\big(B_{11}(x_1,x_2),\dots,B_{m1}(x_{2m-1},x_{2m})\big) = A_m\big(B_{11}(x'_1,x'_2),\dots,B_{m1}(x'_{2m-1},x'_{2m})\big), \\ A_1\big(B_{12}(x_1,x_2),\dots,B_{m2}(x_{2m-1},x_{2m})\big) = A_1\big(B_{12}(x'_1,x'_2),\dots,B_{m2}(x'_{2m-1},x'_{2m})\big), \\ \dots \\ A_m\big(B_{12}(x_1,x_2),\dots,B_{m2}(x_{2m-1},x_{2m})\big) = A_m\big(B_{12}(x'_1,x'_2),\dots,B_{m2}(x'_{2m-1},x'_{2m})\big) \end{cases}$$

Deoarece sistemul $\{A_1, \dots, A_m\}$ este ortogonal, rezultă că:

$$\begin{cases} B_{11}(x_1,x_2) = B_{11}(x'_1,x'_2), \\ \dots \\ B_{m1}(x_{2m-1},x_{2m}) = B_{m1}(x'_{2m-1},x'_{2m}), \\ B_{12}(x_1,x_2) = B_{12}(x'_1,x'_2), \\ \dots \\ B_{m2}(x_{2m-1},x_{2m}) = B_{m2}(x'_{2m-1},x'_{2m}) \end{cases}$$

Dar şi sistemele $\{B_{j1}, B_{j2}\}, j = \overline{1,m}$, sunt ortogonale, prin urmare: $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, …, $x_{2m} = x'_{2m}$. Deci am obţinut că soluţia este unică, adică sistemul $\{D_{ij} \mid i = 1,2; j = \overline{1,m}\}$ este ortogonal. □

Referinţe:

1. БЕЛОУСОВ, В.Д. Системы ортогональных операций. В: *Математический сборник*, 1968, №77(119): I, с.38–58.
2. BOSE, R.C., SHRIKHANDE, S.S., PARKER, E.T. Further results of the constructions of mutually orthogonal latin squares and the falsity of Euler's conjecture. In: *Canad. J. Math*., 1960, no12, p.189-203.
3. DENES, J., KEEDWELL, A.D. *Latin squares and their applications*. Second edition. Elsevier, 2015. 440 p.
4. EVANS, T. The construction of orthogonal *k*-skeins and latin *k*-cubes. In: *Aequat. Math*., 1976, vol.14, no3, p.485-491.
5. SÂRBU, P. *Teoria quasigrupurilor. Introducere*. Chişinău: CEP USM, 2014. 172 p.

Recomandat

***Parascovia SÎRBU**, dr., conf. univ.*