INTERIORUL UNEI ELIPSE DETERMINAT LA COMPUTER

Pavel ZABOLOTNÎI, Lilia SOLOVEI

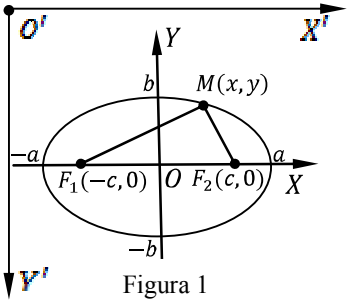


Figura 1

În lucrarea de față, se deduc şi se aplică în practică condițiile analitice de apartenență a punctului arbitrar $M(x,y)$ la interiorul elipsei, cu semiaxele a şi b şi cu centrul într-un punct $O(x_0,y_0)$ de pe ecranul computerului. Pe Fig.1 este ilustrat sistemul de coordonate $X'O'Y'$ al computerului şi un sistem de coordonate al utilizatorului XOY – sistem central de coordonate, cu axele paralele respectiv la axele sistemului $x'o'y'$ şi cu centrul în punctul O, care este centrul ecranului şi pentru cazul concret luat, $O(320,240)$, adică $x_0 = 320$, $y_0 = 240$. Ambele sisteme XOY şi $X'O'Y'$ sunt carteziene rectangulare. Pe orizontala ecranului pot fi depuşi 640 de pixeli, iar pe verticala lui – respectiv 480 de pixeli, de unde şi s-au găsit coordonatele centrului ecranului $O(x_0,y_0)$. Dacă un oarecare punct $M(x,y) \sim XOY$ şi tot $M(x',y') \sim X'O'Y'$, atunci transformarea coordonatelor centrale de pe ecran în cele ale computerului se face [1, 3] după relațiile:

$$\begin{cases} x' = x + x_0; \\ y' = -y + y_0. \end{cases} \qquad (1)$$

Pentru calcule vom folosi coordonatele reale (x,y), iar când ne vom adresa la procedurile grafice de vizualizare ale punctului M pe ecran, vom trece în prealabil la coordonatele întregi (x',y'), calculate după (1). Aşadar la început, pentru simplitate, vom presupune că este vorba despre domeniul de pe ecran, mărginit de către elipsa cu semiaxele cunoscute a, b, cu centrul în punctul cunoscut O şi cu focarele $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, situate pe axa OX în cazul $a > b$. Atunci $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. În cazul $b > a$ focarele $F_1(0,-c)$ şi $F_2(0,c)$ vor fi situate pe axa OY, iar $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. O astfel de elipsă va fi „întinsă după axa OY". În ambele cazuri, condiția de apartenență a punctului variabil $M(x,y)$ către elipsă se va exprima geometric prin una din relațiile:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a, \quad \text{sau} \quad |MF_1| + |MF_2| = 2b. \qquad (2)$$

Aşadar, condițiile geometrice de apartenență a lui M către interiorul primei sau a celei de-a doua elipse sunt:

$$|MF_1| + |MF_2| \le 2a \quad \text{sau} \quad |MF_1| + |MF_2| \le 2b. \qquad (3)$$

Observație: Punctele interioare ale regiunii mărginite de o elipsă ar putea fi determinate pornind de la afirmația că orice curbă continuă închisă, fără puncte de autointersecție, împarte toate punctele de pe plan în două domenii – unul mărginit şi altul – nemărginit. Punctele din domeniul mărginit sunt

interioare şi orice semidreaptă cu originea într-un aşa punct va intersecta frontiera într-un număr impar de puncte. Iar orice semidreaptă cu originea într-un punct exterior, neapărat va intersecta frontiera într-un număr par de puncte. Dar în cazul elipsei, verificarea condiţiilor (3) se îndeplineşte la computer mult mai simplu decât rezolvarea unui sistem din două ecuaţii, una dintre care e de gradul doi. De aceea, în cazul de faţă e mai simplu să rămânem la cercetarea condiţiilor (3).

În primul caz $(a > b)$, vom avea: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ şi $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \leq 2a$, în cel de-al doilea caz, $(a < b)$: $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ şi $\sqrt{x^2+(y+c)^2} + \sqrt{x^2+(y-c)^2} \leq 2b$. Ultimele două inegalităţi pot fi verificate pentru punctul concret $M(x, y)$ direct la computer, ceea ce va constitui baza analitică a algoritmului de determinare a regiunii interioare a elipsei, respectiv, în primul şi în cel de-al doilea caz. După o scanare a ecranului cu marcarea ulterioară (prin culoare sau prin forma pixelului) a punctelor interioare şi celor exterioare, vom obţine pe ecranul computerului o

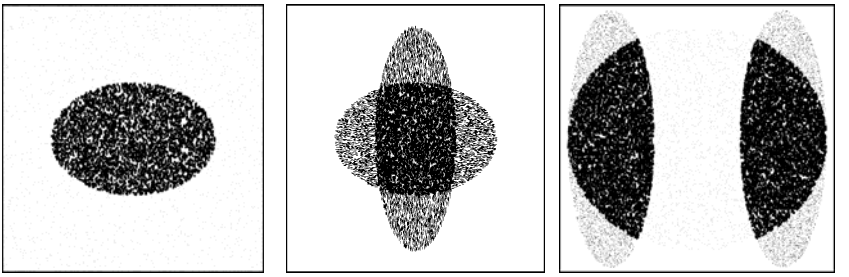


Fig.2

imagine reală, ce descrie destul de exact cazul concret cercetat (Fig.2).

Să ne oprim la câteva observaţii referitoare la imaginile din Fig.2. Pentru simplitate, aceste imagini sunt prezentate în „negru-alb-sur", şi fiecare din ele reprezintă conţinutul final al ecranului grafic, la sfârşitul lucrului unui program anumit. Pentru fixarea şi memorizarea ecranului grafic, se îndeplineşte o scanare continuă a întregului ecran, ce conţine peste 300 mii de pixeli, cu înregistrarea ulterioară pe baza unei palete speciale a culorii fiecărui pixel în parte. În cazul desenului bicolor, de obicei pixelii de culoare neagră sau sură se înregistrează pe fondul ecranului alb, iar pentru a deosebi şi pixelii de aceeaşi culoare, a fost realizat un program suplimentar, ce plasează pe adresa indicată diferite configuraţii elementare de pixeli. Figura elementară ocupă un câmp de 5x5 pixeli şi reprezintă: 1) – un pixel obişnuit; 2) – o linie orizontală de 5 pixeli; 3) – o linie verticală de aceeaşi lungime; 4) – un semn „+"; 5) – un pătrat cu latura de 5 pixeli; 6) – o steluţă. Fondul alb al ecranului se observă bine pe Fig.2 a) şi Fig.2 b). Tot acest fond

alb al ecranului se observă şi la frontiera imaginii din Fig.2 c). Interiorul elipsei orizontale din Fig.2 b) e haşurat cu segmente orizontale, iar interiorul celei verticale – cu segmente verticale. Menționăm că intersecția elipselor din Fig.2 b) nu s-a obținut automat, ca o haşurare dublă a unei regiuni după diferite direcții, ci a fost în prealabil calculată, iar apoi haşurată cu simbolul steluță. Tot cu acest simbol au fost haşurate toată elipsa din Fig.2 a) şi intersecțiile din Fig.2 c). În centrul Fig.2 c) se vede efectul aplicării la elipsa orizontală a haşurării cu pixeli de culoare sură, tot aici interiorul celor două elipse verticale e haşurat cu pixeli de culoare neagră.

Pentru a nu obține regiuni intens întunecate, în toate cele trei cazuri descrise mai sus, a fost organizată o scanare discretă şi omogenă a întregului ecran cu puncte aleatoare, în număr de 30 de mii (s-au folosit aproximativ vreo 10% din toți pixelii de pe ecran). Mai apoi, pentru fiecare punct aleator în parte, a fost stabilit după relațiile (3) poziția lui față de toate elipsele prezente pe desen şi, respectiv – forma simbolului elementar din pixeli pentru marcarea acestui punct.

În încheiere, menționăm că nici în unul din exemplele cercetate n-au apărut rezultate evident greşite, ceea ce vorbeşte în favoarea corectitudinii algoritmului ales.

Referințe:

1. ILIIN, V., POZNEAC, E. *Geometria analitică.* Chişinău: Cartea moldovenească, 1990. ISBN 5-362-00588-X517.
2. ZABOLOTNÎI, P. *Geometrie analitică şi Algebră superioară*. Chişinău: CE USM, 2007. ISBN 978-9975-70-356-7.
3. МОДЕНОВ, П. *Аналитическая геометрия.* Москва: МГУ, 1969.
4. ГРЭХЭМ, П. *Практический курс языка Паскаль*. Москва: Радио и связь, 1986. ISBN 32.973 G92 UDC 681.3.06.800.92.
5. VLADA, M., NISTOR, I., POSEA, A., CONSTANTINESCU, C. *Grafica pe calculator în limbajele Pascal şi C.* Vol. II: APLICAȚII. Bucureşti: Editura tehnică, 1992. ISBN 973-31-0406-X, 973-31-0408-6.