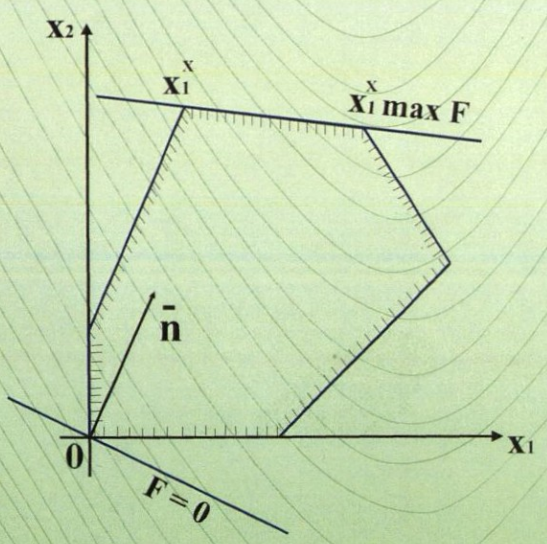
330(075.8)
P 72

V. Platon Iu. Calin

METODE CANTITATIVE ÎN LUAREA DECIZIILOR

Suport de curs



UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
Facultatea de Științe Economice
Departamentul Contabilitate și Informatică Economică

Valeriu PLATON, Iurie CALIN

METODE CANTITATIVE ÎN LUAREA DECIZIILOR

Suport de curs

Aprobat de
Consiliul Calității al USM

Chișinău, 2021
CEP USM

330
CZU 519.8(075.8)
P 70

Recomandat de Departamentul Contabilitate şi Informatică Economică şi de Comisia de Asigurare a Calităţii

Recenzent: **Elvira Naval**, dr., conf. univ.

Conţinutul lucrării ţine de *cercetări operaţionale* – ştiinţa despre alegerea raţională, ştiinţific argumentată a deciziilor în diferite domenii de activitate. Accentul se pune pe utilizarea diverselor tehnici analitice şi decizionale, precum şi pe modul de interpretare a rezultatelor obţinute în urma aplicării modelelor matematice şi a metodelor cantitative în domeniul economiei. În fiecare capitol sunt incluse probleme cu caracter practic din domeniul economiei, care permit studenţilor să-şi testeze cunoştinţele şi nivelul de înţelegere a conceptelor şi tehnicilor cantitative.

Lucrarea este destinată studenţilor, cadrelor didactice şi specialiştilor din domeniul economiei.

DESCRIEREA CIP A CAMEREI NAŢIONALE A CĂRŢII

Platon, Valeriu, Calin Iurie

Metode cantitative în luarea deciziilor: Suport de curs / V. Platon, Iu. Calin; Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Ştiinţe Economice, Departamentul Contabilitate şi Informatică Economică. – Chişinău: CEP USM, 2021. – 142 p.: tab., fig.

Referinţe bibliogr.: p. 138-139 (19 tit.). – 50 ex.

ISBN 978-9975-152-85-3.

519.8(075.8)

P 70

ISBN 978-9975-152-85-3

© V. Platon, Iu. Calin, 2021
© USM, 2021

Universitatea de Stat din Moldova
1793670
Biblioteca Centrală Universitară

Prefaţă

Elementul principal în activitatea specialistului din domeniul economiei (şi nu numai) este procesul de luare a deciziilor. Termenul "luarea deciziilor" trebuie conceput aici ca alegerea celei mai bune (mai eficiente, mai convenabile din anumite considerente) variante de acţiune (de decizie) din mai multe variante disponibile, concretizând totodată regulile prin care se face alegerea, oportunitatea şi criteriul de optimalitate a alegerii.

Ramura matematicii aplicate în care se studiază problemele de luare a deciziilor poartă denumirea "Cercetări Operaţionale". Noţiunea "operaţie" constituie totalitatea de acţiuni orientate spre atingerea unui anumit obiectiv. Scopul Cercetărilor Operaţionale (CO) constă în crearea bazelor ştiinţifice a metodelor cantitative, adică metode bazate pe modele matematice ale proceselor de alegere raţională a variantei (variantelor) de acţiune. Prin noţiunea "model matematic" al unui proces economic real sau a unei situaţii din domeniul economiei se are în vedere reprezentarea acestui proces prin relaţii matematice – funcţii, ecuaţii, inecuaţii etc. Modelele matematice ale problemelor de decizie formează un spectru foarte larg şi variat. În cea mai generală formă modelul unui sistem economic (activităţi de producţie, prestări de servicii, investiţii etc.) poate fi exprimat prin relaţia

$$Z = F(X, Y),$$

unde X este vectorul volumului activităţilor desfăşurate de către agentul economic, Y – vectorul parametrilor (factorilor) care nu pot fi dirijaţi de agentul economic, iar Z este funcţia obiectiv sau funcţia de eficienţă a activităţii economice menită să măsoare nivelul la care se îndeplineşte scopul propus (i se mai spune "criteriu de eficienţă" sau "criteriu de optimalitate").

Modelele matematice constituie instrumentul principal al cercetărilor operaţionale. Ele oferă posibilitatea de a realiza o analiză prealabilă a procesului examinat, o anumită previziune privind evoluţia acestui proces. Prin intermediul modelelor se elaborează recomandări pentru a lua cea mai bună decizie, adică decizia optimă.

Teoria CO se ocupă de rezolvarea următoarelor probleme:

- elaborarea metodelor de modelare matematică a proceselor de luare a deciziilor inclusiv şi a principiilor de optimalitate a soluţiilor;

- studierea subiectului cu privire la existenţa soluţiei optime pentru diferite tipuri de probleme;

- definirea condiţiilor necesare şi suficiente de optimalitate a soluţiilor pentru diferite tipuri de probleme;
- elaborarea metodelor numerice de determinare a soluţiilor optime.

O importanţă deosebită în problemele de luare a deciziilor o are persoana sau grupul de persoane numită **decident** care alege soluţia eficientă pentru realizarea în cele mai bune condiţii a obiectivului (a obiectivelor) propus.

Modelele matematice ale diferitelor activităţi economice pot fi studiate doar clasificându-le după anumite principii. Există mai multe modalităţi de clasificare. În prezenta lucrare se examinează câteva situaţii legate de domeniul economic în care se utilizează modele matematice la alegerea deciziilor optime. În acest sens un spectru larg îl constituie procesele economice care pot fi prezentate prin modele matematice cu o singură funcţie obiectiv.

În interiorul acestei clase se deosebesc câteva tipuri de situaţii. Mai simple şi mai cunoscute se consideră problemele de decizie în care parametrii meniţi să reprezinte condiţiile iniţiale ale procesului studiat obţin doar valori cunoscute fixate şi nu pot fi supuşi unor efecte aleatoare. Această categorie de situaţii constituie aşa numitele *probleme de luare a deciziilor în condiţii de certitudine*, iar capitolul "Cercetărilor Operaţionale" în care se studiază metodele de rezolvare pentru ele - "Programare Matematică". Totalitatea problemelor în care criteriul de eficienţă, cât şi mulţimea condiţiilor care se impun asupra parametrilor de decizie sunt structuri liniare, constituie o subdiviziune a cercetărilor operaţionale numită Programare Liniară – parte componentă a Programării Matematice. Aplicarea largă în activitatea practică a programării liniare se justifică ţinând cont de faptul că prin modele liniare pot fi examinate probleme economice de mare importanţă cum sunt problemele de planificare, transport, amestec, croire, investiţii, repartiţie etc.

Competenţe profesionale şi finalităţi de studiu

a) Competenţe profesionale

- Aplicarea competenţelor profesionale proprii în concordanţă cu necesităţile situaţiilor reale din domeniu.
- Participarea la discuţii pe teme profesionale, punctele de vedere proprii fiind susţinute în mod responsabil, cu argumente pertinente.

- Gestiunea şi utilizarea critică a metodelor şi tehnicilor de elaborare a deciziilor optime.
- Utilizarea tehnologiilor informaţionale necesare în activitatea profesională eficientă.
- Formarea şi menţinerea relaţiilor de muncă în echipă în cadrul activităţii profesionale.
- Demonstrarea capacităţii de analiză a situaţiei economice reale în adoptarea deciziilor optime.

b) Finalităţi de studiu

- A cunoaşte tipurile de modele matematice de luare a deciziilor, tehnicile şi procedeele principale de calcul ale modelelor matematice utilizate în luarea deciziilor.
- A identifica modelul matematic, tipurile de date, tehnicile necesare pentru soluţionarea unei probleme de luare a deciziilor.
- A cunoaşte conceptele principale utilizate în teoria jocurilor şi aplica tehnicile teoriei jocurilor.
- A aplica modelele matematice de luare a deciziilor bazate pe programarea liniară, principiile teoriei jocurilor şi procedee empirice, gestionând eficient modelele utilizate.
- A elabora modele matematice pentru situaţii reale din domeniul economiei, analiznd soluţiile obţinute cu scopul de a propune idei inovatoare.

1 Elemente de programare liniară

1.1 Forme de prezentare ale problemelor de programare liniară

O problemă de programare liniară în *formă generală* se prezintă astfel: Să se determine valorile numerice ale variabilelor x_1, x_2, ..., x_n care să maximizeze (minimizeze) funcţia

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.1}$$

şi să satisfacă următoarele condiţii (restricţii)

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \ i = \overline{1, m_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, \ i = \overline{m_1+1, m_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i, \ i = \overline{m_2+1, m}, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{1.3}$$

Aici $(x_1, x_2, ..., x_n)$ reprezintă vectorul necunoscutelor problemei; a_{ij}, b_i, c_j, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ sunt numere date şi totodată $b_i \geq 0$.

Aceeaşi problemă dar în *formă standard* are următoarea prezentare:

Să se determine valoarea optimă (minimală sau maximală) a funcţiei liniare

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.4}$$

cu următoarele restricţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \ (\geq b_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \ (\geq b_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m, \ (\geq b_m), \end{cases} \tag{1.5}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n}. \tag{1.6}$$

Forma principală care se aplică la rezolvarea problemelor de programare liniară este *forma canonică* şi se prezintă astfel:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min) \tag{1.7}$$

cu următoarele restricţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{1.9}$$

Forma canonică se consideră principală deoarece anume pentru această formă a fost elaborată metoda analitică de rezolvare. Rezolvarea problemelor prezentate în alte forme a devenit posibilă doar reducându-le mai întâi la forma canonică.

Deseori este potrivită prezentarea problemei de programare liniară în *formă matriceală*. Într-adevăr, considerăm problema (1.7) - (1.9). Notând:

$$C = (c_1, c_2, ..., c_n),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

putem scrie problema (1.7) - (1.9) în forma

$$F(X) = C \cdot X \to \max(\min),$$
$$A \cdot X = B, \quad X \geq 0. \tag{1.10}$$

După necesitate aceeaşi problemă mai poate fi prezentată şi *vectorial*:

$$F(X) = C \cdot X \to \max(\min),$$
$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = B, \quad X \geq 0, \quad B \geq 0, \tag{1.11}$$

unde

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n),$$
$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$
$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{1j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ j = \overline{1;n}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Aici $C \cdot X$ este produsul scalar al vectorilor C şi X.

Funcţia (1.1) *se numeşte funcţie obiectiv (criteriu de optimalitate, criteriu de eficienţă), sistemul* (1.2) *constituie restricţiile problemei, iar* (1.3) *se numesc restricţii de nenegativitate ale necunoscutelor problemei.*

Orice mulţime ordonată de numere $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *care verifică relaţiile* (1.2) *şi* (1.3) *se numeşte soluţie admisibilă a problemei. Soluţia admisibilă care maximizează funcţia obiectiv* $F(X)$ *(sau minimizează - după caz) se numeşte soluţie optimă a problemei.*

Relaţiile (1.1) – (1.3) reprezintă modelul matematic al activităţii unui agent economic (dacă se examinează o problemă din domeniul economiei). Mărimile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *variabile de decizie*; ele formează *programul sau planul de activitate* şi arată nivelurile desfăşurate de către agentul economic. Funcţia obiectiv (1.1) exprimă matematic scopul activităţii şi, prin intermediul coeficienţilor c_j, $j = \overline{1;n}$, evaluează nivelul de performanţă al activităţii. Prin coeficienţii c_j pot fi exprimate costuri unitare pentru achiziţionarea materialelor necesare în cazul unor probleme de minim sau venituri unitare în probleme de maxim. Mărimile a_{ij}, $i = \overline{1;m}$, $j = \overline{1;n}$ din sistemul de restricţii se numesc *coeficienţi tehnico - economici* sau parametri tehnologici. Valorile lor se stabilesc pe baza observaţiilor pentru fiecare problemă examinată şi au menirea să caracterizeze nivelul tehnologic prin care se asigură rezolvarea problemei. Partea dreaptă b_i, $i = \overline{1;m}$ a unei restricţii se numeşte termen liber. Prin termenii liberi se stabileşte volumul resurselor materiale disponibile, volumul forţelor de muncă încadrate în procesul de producţie, capacităţile de producţie etc. Din punct de vedere matematic a rezolva o problemă de programare liniară înseamnă a determina valorile nenegative a variabilelor x_j care satisfac restricţiile (1.2) şi (1.3) şi care optimizează (adică fac minimă sau maximă) valoarea funcţiei obiectiv, iar în sens economic asta înseamnă a determina nivelurile x_j la care trebuie să se desfăşoare activităţile agentului economic astfel încât eficienţa economică a întregului plan de activitate să fie optimă.

1.2 Câteva exemple de probleme de programare liniară

1.2.1 Problema de utilizare optimă a resurselor disponibile (Probleme de producţie)

O unitate economică (întreprindere) dispune de m tipuri de resurse $R_1, R_2, \ldots, R_m$ în volum de $b_1, b_2, \ldots, b_m$ unităţi respectiv. Din resurse-

le disponibile întreprinderea poate fabrica n tipuri de produse P_1, P_2, ..., P_n în cantităţi de x_1, x_2, ..., x_n unităţi respectiv. Cantitatea din resursa R_i necesară pentru fabricarea unei unităţi de produs P_j este a_{ij} (parametrii tehnico-economici, care depind de nivelul tehnologic al întreprinderii). Produsul P_j se vinde cu c_j unităţi monetare pe unitate de produs. Trebuie determinate nivelurile producţiei x_j (adică ce cantităţi, bineînţeles nenegative, de produs de fiecare tip trebuie să se producă) care satisfac cele m restricţii impuse de cantităţile disponibile de resurse şi totodată maximizează venitul total.

Din condiţiile problemei stabilim că dacă produsul P_j se vinde cu un venit unitar de c_j unităţi monetare, atunci pentru întreaga cantitate a acestui produs venitil va fi $c_j x_j$, iar la nivelul întregii activităţi de producţie conduce la venitul total exprimat prin funcţia

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

Totodată vom ţine cont de faptul că pentru fabricarea celor x_j unităţi de produs P_j se vor consuma $a_{ij} \cdot x_j$ unităţi din resursa R_i, iar întregul consum din această resursă pentru fabricarea celor n tipuri de produse nu poate depăşi disponibilul de b_i unităţi, adică

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j \leq b_i$$

Astfel, se obţine următorul set de relaţii matematice:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

care constituie modelul matematic al problemei de producţie.

1.2.2 Probleme de nutriţie

O fermă zootehnică are de format raţia zilnică pentru animale care să conţină m elemente nutritive $N_1, N_2, \ldots, N_m$ în cantităţile minime obligatorii $b_1, b_2, \ldots, b_m$ stabilite de specialişti. În acest scop ferma cumpără n tipuri de alimente (nutreţuri) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ la preţurile unitare $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Analizele de laborator arată că o unitate din nutreţul A_j conţine a_{ij} unităţi de substanţă nutritivă N_i, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1;n}$. Astfel, dacă în raţia zilnică sunt introduse x_j unităţi din alimentul A_j atunci animalul va primi $a_{ij} \cdot x_j$ unităţi de substanţă nutritivă N_i. Aceasta înseamnă că folosind toate n alimente aportul total de substanţă nutritivă N_i va fi de

$$a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \ldots + a_{ni}x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j, \; j = \overline{1,n}$$

şi această sumă, conform condiţiilor problemei, trebuie să fie nu mai mică decît necesarul minim obligatoriu care este de b_i unităţi. Totodată ferma doreşte ca costul total pentru achiziţionarea alimentelor să fie minimal. Astfel se obţine următoarul model matematic al problemei:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,n}.$$

1.2.3 Probleme de tip transport

Considerăm următoarea situaţie: în m puncte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ numite *furnizori* există un anumit produs identic în cantităţile $a_1, a_2, \ldots, a_m$ respectiv. Acest produs este solicitat de către n consumatori (utilizatori) $B_1, B_2, \ldots, B_n$ în cantităţi de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ respectiv. Produsul trebuie transportat de la furnizori consumatorilor astfel încât

1. Produsul să fie ridicat în totalitate de la furnizori;

2. Consumatorii să obţină cu siguranţă cantitatea solicitată;

3. Cheltuielile integrale pentru lucrările de transport să fie minimale, dacă se ştie că costul transportului unei unităţi de produs de la furnizorul A_i consumatorului B_j este c_{ij} unităţi monetare.

Dacă notăm prin x_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ cantitatea de produs care se transportă de la furnizorul A_i la consumatorul B_j, atunci problema ne conduce la următorul model matematic

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ... + c_{2n}x_{2n} +$$
$$+ ... + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + ... + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = a_2, \\ ..... \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = a_m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2, \\ ..... \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = b_n, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Problemele de ordin practic prezentate mai sus conduc la modele matematice liniare care diferă prin structura lor – unele sunt cu criterii de minimizare, iar altele – de maximizare, unele au restricţii-inecuaţii, altele restricţii-ecuaţii. La prima vedere o astfel de diversitate complică studierea problemelor de programare liniară. S-a stabilit însă că, în realitate din punct de vedere matematic, aceste modele sunt doar forme diferite de prezentare a uneia şi aceleiaşi probleme de programare liniară şi, în caz de necesitate, uşor se realizează trecerea de la o formă la alta. Astfel:

1. problema de minimizare poate fi prezentată ca problemă de maximizare, aplicând relaţia $\min Z(X) = -\max[-Z(X)]$

2. transformarea inecuaţiilor în ecuaţii se face prin introducerea unor variabile nenegative noi, numite variabile de compensare, aşa încât

inecuaţia $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$ se înlocuieşte cu ecuaţia $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$, $x_{n+1} \geq 0$, iar inecuaţia $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i$ prin ecuaţia $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$, $x_{n+1} \geq 0$. Variabilele de compensare se adaugă în funcţia obiectiv cu coeficienţii zero.

3. Orice variabilă x_j care nu este supusă condiţiei de nenegativitate se înlocuieşte cu diferenţa a două noi variabile nenegative $x_j = x'_j - x''_j$, unde $x'_j \geq 0$ şi $x''_j \geq 0$.

Se demonstrează că trecerea de la o formă de prezentare la alta, realizată prin procedeele prezentate nu afectează soluţia optimă a problemei iniţiale.

1.3 Noţiuni de bază referitoare la mulţimi de puncte în spaţiul euclidian n-dimensional

Mulţimea punctelor $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ coordonatele cărora verifică relaţia

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 \leq r^2 \qquad (1.12)$$

se numeşte sferă, cu raza r şi centrul în punctul $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Relaţia (1.12) se prezintă mai compact în forma $\rho(M_0, M) \leq r$. Mulţimea punctelor pentru care se verifică relaţia $\rho(M_0, M) < r$ se numeşte sferă deschisă, iar mulţimea de puncte pentru care $\rho(M_0, M) = r$ se numeşte suprafaţă sferică.

Sfera deschisă cu centrul în punctul $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ şi raza egală cu ε se numeşte *ε-vecinătate a punctului M_0*.

Considerăm o mulţime D de puncte. Punctul M_0 se numeşte punct interior dacă el aparţine mulţimii D împreună cu careva vecinătate a sa. Mulţimea D se numeşte deschisă dacă oricare din punctele ei este interior.

Punctul M_0 se numeşte punct de frontieră al mulţimii D dacă orice vecinătate a lui M_0 constă atât din puncte ale mulţimii D, cât şi din puncte ce nu aparţin mulţimii D. Mulţimea D se numeşte închisă dacă ei îi aparţin toate punctele sale de frontieră. Mulţimea D se numeşte mărginită dacă oricare două puncte din D formează un segment de lungime finită.

Fie M_1 şi M_2 – două puncte ale mulţimii D. Mulţimea

$$[M_1, M_2] = (1 - \lambda) M_1 + \lambda M_2,$$

unde $0 \leq \lambda \leq 1$, se numeşte segment cu extremităţile M_1 şi M_2.

O mulţime D de puncte se numeşte convexă dacă oricare două puncte din D formează un segment care totalmente aparţine mulţimii D. Drept exemple pot servi:

1. În R^2 un segment, o dreaptă sau o semidreaptă, un semiplan, punctele unui triughi, unui pătrat împreună cu frontierele, unui cerc etc.

2. În R^3 un cub, o sferă, o piramidă şi a.m.d.

Fie D o mulţime convexă de puncte. Punctul A se numeşte vârf sau punct de extremă al mulţimii dacă nu există două puncte A_1 şi A_2 din D astfel încât A să fie punct interior al segmentului (A_1A_2). Drept exemple pot servi: vârfurile unui pătrat, unui poligon convex, unei piramide şi a.m.d.

Mulţimea punctelor din R^n care satisfac ecuaţia liniară $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j = b$ se numeşte hiperplan în R^n. Orice hiperplan este o mulţime convexă. Un hiperplan secţionează spaţiul R^n în două semispaţii. Fiecare din ele se reprezintă prin una din inecuaţiile liniare $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j \leq b$ sau $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j \geq b$. Orice semispaţiu este o mulţime convexă.

Intersecţia unui număr finit de mulţimi convexe este o mulţime convexă. Intersecţia unui număr finit de semispaţii se numeşte *tronson*, iar un *tronson mărginit este un poliedru cu număr finit de vârfuri.*

1.4 Soluţiile problemei de programare liniară

Totalitatea soluţiilor admisibile ale problemei de programare liniară formează "domeniul (mulţimea) soluţiilor admisibile". Pentru orice problemă concretă de programare liniară este posibil unul din următoarele trei cazuri:

1. Mulţimea soluţiilor admisibile este vidă (caz în care se spune că restricţiile problemei sunt contradictorii) sau este formată dintr-un singur punct (nu există posibilitatea alegerii celei mai bune soluţii). Problema nu are soluţii optime

2. Mulţimea soluţiilor admisibile nu este vidă, dar pentru orice componentă a acestei mulţimi funcţia obiectiv a problemei este nemărginită superior (inferior) şi dacă problema este cu criteriu de maximizare (minimizare) atunci ea nu are soluţii optime.

3. Mulţimea soluţiilor admisibile nu este vidă, iar funcţia obiectiv este mărginită superior (respectiv – inferior). Problema dispune de soluţii optime.

Ţinând cont de noţiunile de mai sus conchidem că *mulţimea soluţiilor admisibile a oricărei probleme de programare liniară este convexă şi geometric se asociază cu un poliedru convex care are un număr finit de vârfuri.*

În orice problemă de programare liniară gradientul funcţiei obiectiv este unul şi acelaşi în toate punctele interioare ale mulţimii soluţiilor admisibile

$$\text{grad}\, Z(X) = \text{grad}\,(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n) = (c_1, c_2, ..., c_n)$$

Prin urmare, funcţia obiectiv nu dispune de extreme locale în careva din punctele interioare ale mulţimii soluţiilor admisibile. *Deci, dacă nu toţi coeficienţii* $c_j, j = \overline{1;n}$ *sunt concomitent egali cu zero, atunci funcţia obiectiv poate obţine valori extreme doar pe frontiera mulţimii soluţiilor admisibile.*

Considerăm o problemă de programare liniară prezentată în formă canonică

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\,(\min)$$

cu următoarele restricţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\quad b_i \geq 0,\ i = \overline{1;m}.$$

În cele ce urmează vom considera că sistemul de restricţii constă din m ecuaţii liniar independente, adică rangul este $r = m < n$. Deci sistemul de vectori $A_1, A_2, ..., A_n$ dispune de bază – subsistem maximal de vectori liniar independenţi. Baze pot fi mai multe, dar numărul lor nu depăşeşte C_n^r, deci C_n^m, unde n este numărul de variabile în problemă. Fiecare bază constă din acelaşi număr $r = m$ de vectori numiţi vectori bazici. Necunoscutele problemei asociate vectorilor bazici se numesc necunoscute bazice, adică problema are m necunoscute bazice. Celelalte $n - m$ necunoscute se numesc libere.

O soluţie admisibilă a problemei de programare liniară se numeşte *soluţie admisibilă de bază* (*sau soluţie suport*) dacă satisface condiţiile:

1. Are cel mult m componente strict pozitive, iar celelalte sunt egale cu zero, adică $X^0 = \left(\underbrace{x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0}_{m}, \underbrace{0, ..., 0}_{n-m} \right)$.

2. Vectorii-coloane ai coeficienţilor componentelor strict pozitive A_1, A_2,...,A_m sunt vectori liniar independenţi.

Numărul componentelor nenule într-o soluţie admisibilă de bază nu poate depăşi rangul $r = m$, unde m este numărul restricţiilor problemei. Dacă numărul componentelor nenule este m, atunci soluţia respectivă se numeşte *nedegenerată*, iar dacă componente nenule sunt mai puţine de m, atunci avem soluţie *degenerată*. Pot fi demonstrate următoarele afirmaţii:

1. *Orice soluţie admisibilă de bază reprezintă un vârf al domeniului soluţiilor admisibile şi orice vârf al domeniului de soluţii admisibile reprezintă o soluţie admisibilă de bază.*

2. *Soluţia optimă a problemei de programare liniară* (1.1) – (1.3) *se află printre soluţiile admisibile de bază, adică printre vârfurile domeniului soluţiilor admisibile.*

3. *Dacă mulţimea soluţiilor admisibile este un poliedru (tronson mărginit), atunci problema admite optim finit şi există două vârfuri* X_1^0 *şi* X_2^0 *(două soluţii admisibile de bază) în care funcţia obiectiv obţine valoarea minimală şi, respectiv, maximală.*

4. *Dacă problema de programare liniară admite două soluţii optime distincte, atunci ea admite o infinitate de soluţii optime.*

În cazul în care o problemă are optim unic acesta se mai numeşte "optim rigid", iar dacă are o infinitate de soluţii se mai spune că are "optim elastic".

De menţionat încă o dată: *în orice soluţie admisibilă de bază necunoscutele libere se egalează cu zero.*

1.5 Metoda grafică de rezolvare a problemelor de programare liniară

Metoda grafică poate fi aplicată în rezolvarea problemelor de programare liniară numai dacă aceasta are două variabile (sau problemele prezentate în formă canonică şi verifică relaţia $n - m \leq 2$, unde n este numărul variabilelor sistemului de restricţii, iar m – numărul restricţiilor, cu condiţia că acestea sunt liniar independente). Această metodă utilizează posibilitatea de a reprezenta grafic domeniul soluţiilor admisibile ale problemei.

Exemplul 1.1. Să se rezolve problema de programare liniară

$$F(X) = 7x_1 + 3x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq -12, \\ x_1 + 3x_2 \leq 16, \\ x_1 \leq 7, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Rezolvare. Se determină mai întâi mulţimea soluţiilor admisibile. Pentru aceasta prezentăm imaginile geometrice ale restricţiilor în sistemul cartezian x_1Ox_2. Fiecare restricţie geometric determină unul din semiplanele formate de dreapta respectivă $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$. Domeniul (sau poligonul) soluţiilor admisibile pentru problema propusă este intersecţia OABCD a tuturor semiplanurilor reprezentate de restricţii şi formează o mulţime convexă de puncte (notată prin Ω) cu un număr finit de vârfuri (cărora li se mai spune şi "puncte extremale"). Fiecare vârf al poligonului se asociază cu o soluţie admisibilă de bază a problemei, şi reciproc. Soluţia optimă se află printre soluţiile admisibile de bază.

Pentru determinarea soluţiei optime se utilizează *liniile de nivel* ale funcţiei obiectiv. Se numeşte *linie de nivel* dreapta pe care funcţia obiectiv a problemei obţine una şi aceeaşi valoare, adică $F(X) = C$, C – *const*. Sau $c_1x_1 + c_2x_2 = C$. Liniile de nivel reprezintă un fascicul de drepte paralele cu dreapta $F(X) = 0$.Vectorul normal al dreptelor acestui fascicul este $\vec{n} = (c_1; c_2)$. Dacă dreapta $F(X) = 0$ se va deplasa paralel cu ea însăşi în direcţia vectorului $\vec{n}$ atunci valoarea funcţiei obiectiv $F(X)$ va creşte.

În problema propusă linia de nivel zero a funcţiei obiectiv are ecuaţia $7x_1 + 3x_2 = 0$ cu vectorul normal $\vec{n} = (7; 3)$. Deplasând linia de nivel paralel cu ea însăşi în direcţia vectorului $\vec{n}$, stabilim ultimul punct la

Universitatea de Stat din Moldova
1793670
Biblioteca Centrală Universitară

ieşire din Ω, care să aparţină şi liniei de nivel. În cazul dat acesta este vârful C al poligonului soluţiilor admisibile. Aici funcţia obiectiv obţine valoare optimă (figura 1.1).

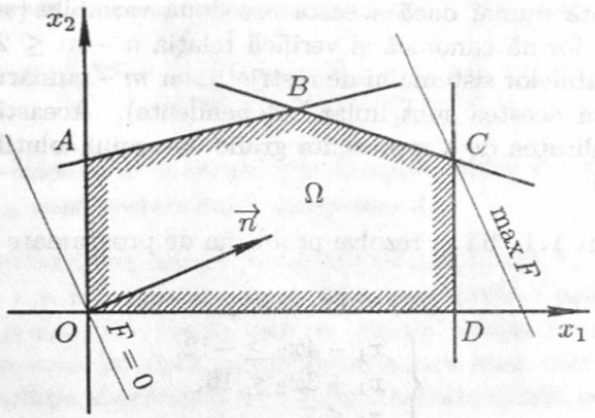


Figura 1.1

Determinăm coordonatele punctului C, rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 16, \\ x_1 = 7. \end{cases}$$

Obţinem $C(7;\,3)$. Deci soluţia optimală a acestei probleme este:

$$X^* = (7;\,3), \quad F_{\max} = F(X^*) = 7 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 58. \qquad \#$$

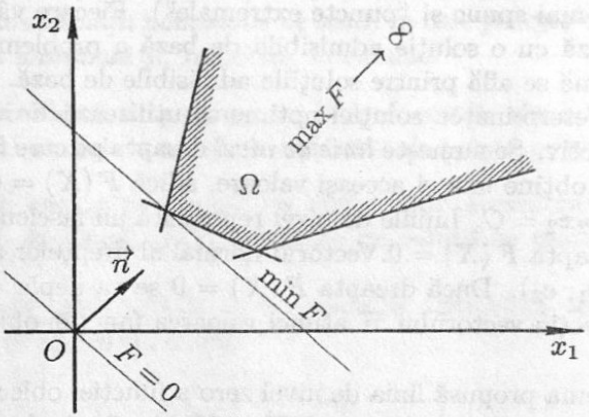


Figura 1.2

Considerăm o problemă de programare liniară cu două variabile (cazul

generic):

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min),$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq (\geq)\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq (\geq)\, b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq (\geq)\, b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Pentru ea este posibilă una din următoarele trei situaţii:

a. Mulţimea soluţiilor admisibile este vidă; problema nu are soluţii.

b. Mulţimea soluţiilor admisibile nu este vidă, însă funcţia obiectiv este nemărginită superior pe această mulţime (pentru problemă cu criteriu de maximizare) sau inferior (pentru probleme cu criteriu de minimizare). În asemenea cazuri problema nu are soluţii (are optim $+\infty$ sau $-\infty$) (figura 1.2).

c. Mulţimea soluţiilor admisibile nu este vidă şi funcţia obiectiv este mărginită. În acest caz problema are o singură soluţie (în figura 1.3 A este punct de minim, iar C este punct de maxim) sau o mulţime infinită de soluţii (figura 1.4).

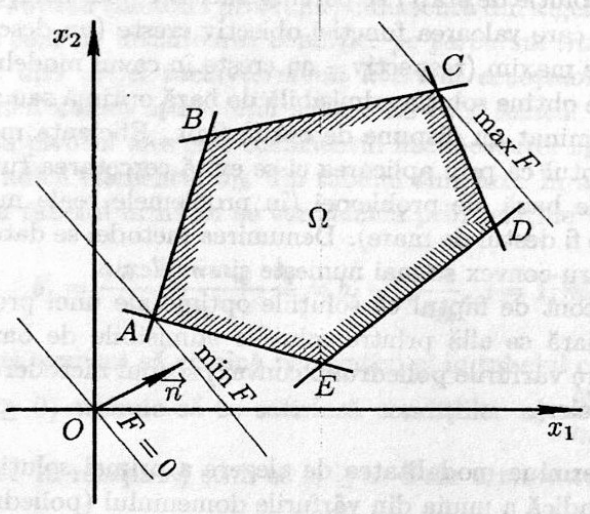


Figura 1.3

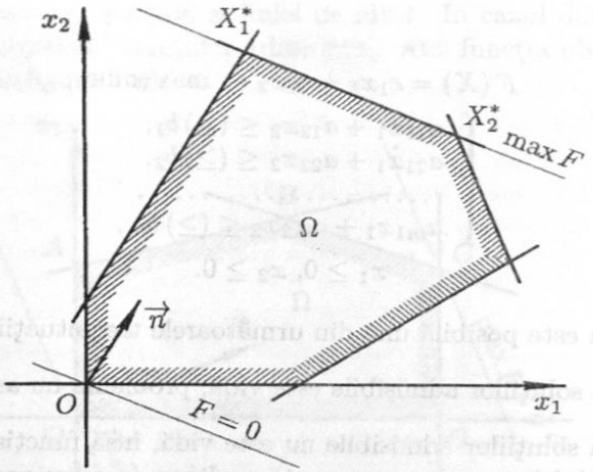


Figura 1.4

1.6 Metoda simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară

O modalitate analitică universală de rezolvare a problemelor de programare liniară este *metoda simplex*. Ideea acestei metode constă în următoarele: pornind de la o soluţie admisibilă de bază (numită soluţie iniţială sau soluţie de start) se parcurg succesiv doar soluţii admisibile de bază pentru care valoarea funcţiei obiectiv creşte (nu descreşte) în cazul modelului de maxim (respectiv – nu creşte în cazul modelului de minim) până când se obţine soluţia admisibilă de bază optimă sau se stabileşte că modelul examinat nu dispune de optim finit. Eficienţa metodei simplex constă în faptul că prin aplicarea ei se evită cercetarea tuturor soluţiilor admisibile de bază ale problemei (în problemele reale numărul acestor soluţii poate fi destul de mare). Denumirea metodei se datorează faptului că un poliedru convex se mai numeşte şi *simplex*.

Ţinând cont de faptul că soluţiile optime ale unei probleme de programare liniară se află printre soluţiile admisibile de bază ale acesteia (adică printre vârfurile poliedrului convex) scopul metodei simplex constă în următoarele:

1. A determina modalitatea de alegere a primei soluţii admisibile de bază, adică a unuia din vârfurile domeniului (poliedrului) soluţiilor admisibile;

2. A indica procesul de trecere de la o soluţie admisibilă de bază la alta (de la un vârf al poliedrului la altul) mai bună decât cea precedentă (mai aproape de cea optimă);

3. A stabili criteriile prin care să se oprească procesul de trecere de la o soluţie admisibilă de bază la alta, terminând acest proces cu alegerea soluţiei admisibile de bază optime sau venind la concluzia că problema nu dispune de optim finit.

1.6.1 Soluţia admisibilă de bază iniţială

Considerăm problema de programare liniară prezentată în formă canonică

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$$

cu următoarele restricţii

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\quad b_i \geq 0,\ i = \overline{1;m}.$$

Soluţiile admisibile de bază ale problemei pot fi determinate prin metoda Gauss-Jordan (metoda pivotului) cunoscută din algebră. Aici trebuie să se ţină cont de următoarea condiţie: *pe parcursul transformărilor pivotul trebuie ales astfel încât termenii liberi ai ecuaţiilor să rămână nenegativi fiindcă numai aşa soluţia admisibilă va fi bazică.*

Admitem că pivotul ales este coeficientul necunoscutei x_k din ecuaţia cu numărul l, adică elementul a_{lk} din tabelul simplex. În acest caz termenii liberi din tabelul următor se vor calcula prin relaţiile

$$b'_l = \frac{b_l}{a_{lk}},\quad b'_i = \frac{a_{lk}\cdot b_i - a_{ik}\cdot b_l}{a_{lk}} = b_i - b_l\frac{a_{ik}}{a_{lk}},\ i = \overline{1;m},\ i \neq l.$$

Pentru ca aceşti termeni să rămînă nenegativi şi în tabelul care urmează ($b'_l \geq 0$ şi $b'_i \geq 0$) trebuie să se satisfacă condiţiile: a) $\frac{b_l}{a_{lk}} \geq 0$ şi b) $b_i - \frac{b_l}{a_{lk}}a_{ik} \geq 0$. În relaţia a) ştim că $b_l \geq 0$. Prin urmare condiţia a) se verifică doar dacă $a_{lk} > 0$. În relaţia b) împărţind la a_{ik} obţinem $\frac{b_l}{a_{lk}} \leq$

$\frac{b_i}{a_{ik}}$. Această relaţie trebuie să se verifice pentru toate liniile tabelului în care $a_{ik} > 0$ (ştim că $b_i \geq 0$). Deci $\frac{b_l}{a_{lk}} = \min\limits_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\}$, $a_{ik} > 0$. Rapoartele $\frac{b_i}{a_{ik}}$, $i = \overline{1; m}$ se numesc rapoarte simplex.

Concluzie. Admitem că pivotul transformării este unul din elementele coloanei cu numărul k. Alegerea corectă a pivotului din această coloană se asigură doar dacă se respectă următoarele două condiţii:

1. Pivotul trebuie să fie strict pozitiv, $(a_{lk} > 0)$;
2. Pivotul se află în raportul simplex minimal $\frac{b_l}{a_{lk}} = \min\limits_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \right\}$.

Aici l este numărul vectorului care se exclude din bază, iar k este numărul vectorului care vine în bază în locul celui exclus. Condiţiile 1. şi 2. asigură determinarea primei soluţii admisibile de bază cât şi trecerea de la o soluţie admisibilă de bază la alta. Dacă ţinem cont de ipoteza $\operatorname{rang} A = m < n$ atunci numărul soluţiilor de bază nu depăşeşte C_n^m.

După cum s-a menţionat mai sus, metoda simplex oferă posibilitatea de a parcurge succesiv doar acele soluţii admisibile de bază (adică acele vârfuri ale poliedrului convex) în care valoarea funcţiei obiectiv creşte treptat în cazul unui model de maxim (respectiv-descreşte în cazul unui model de minim). Fiecărui vârf al poliedrului i se asociază sistemul său de ecuaţii. Astfel, procedura de calcul a metodei simplex constituie rezolvarea succesivă a sistemelor de ecuaţii liniare şi, prin urmare, pot fi utilizate tabelele simplex. Admitem că avem o problemă de programare liniară prezentată în formă canonică şi aplicând metoda simplex am determinat prima soluţie admisibilă de bază a acesteia, adică soluţia de start. Ea se asociază cu unul din vârfurile poliedrului soluţiilor admisibile. Aici ne oprim pentru a răspunde la următoarele întrebări:

1. Este oare optimă soluţia obţinută (ar putea fi fiindcă soluţia optimă se află în careva din vârfurile poliedrului soluţiilor admisibile)? Dacă da, problema este rezolvată. În caz contrar trebuie să trecem la altă soluţie admisibilă de bază (la alt vârf al poliedrului). Şi atunci
2. Care vector (care necunoscută) trebuie eliminat din baza prezentă şi care trebuie inclus în locul celui eliminat, astfel încât la trecerea de la baza B_1 la baza nouă B_2 să obţinem $F_2 > F_1$ în cazul modelului de maxim. Adică se cere o soluţie mai bună decât cea prezentă.

1.6.2 Îmbunătăţirea soluţiei. Criteriile de optimalitate ale soluţiilor

Îmbunătăţirea soluţiilor admisibile de baza ale unei probleme de programare liniară se realizează utilizând un test special oferit de metoda simplex. Testul constituie un set de numere notate cu Δ_j, $j = \overline{1;n}$, (adică câte o valoare pentru fiecare vector a_j), care se numesc estimaţiile soluţiei respective şi se calculează prin relaţia

$$\Delta_j = C_j \cdot a_j - c_j, j = \overline{1;n}, \tag{1.13}$$

unde $C_j = (c_1, c_2, ..., c_m)$ este vectorul coeficienţilor variabilelor bazice luaţi din funcţia obiectiv; $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$; c_j – coeficientul variabilei x_j în funcţia obiectiv. Poate fi demonstrat că:

1. *Pentru un model de maxim o soluţie admisibilă de bază este optimă doar dacă toate estimaţiile* Δ_j *sunt nenegative, adică* $\Delta_j \geq 0$, $j = \overline{1;n}$;

2. *Pentru un model de minim o soluţie admisibilă de bază este optimă doar dacă toate estimaţiile* Δ_j *sunt nepozitive, adică* $\Delta_j \leq 0$, $j = \overline{1;n}$;

3. *Dacă într-o problemă de programare liniară cu condiţie de maxim (de minim) soluţia admisibilă de bază nedegenerată are o estimaţie negativă* $\Delta_k < 0$ *(pozitivă* $\Delta_k > 0$ *), atunci această soluţie poate fi îmbunătăţită doar cu condiţia că vectorul* a_k *(adică coloana lui* $\Delta_k < 0$*) are cel puţin o componentă strict pozitivă* $a_{ik} > 0$;

4. *Criteriul de optim unic . Într-o problemă de programare liniară soluţia optimă este unică dacă pentru oricare vector nebazic (oricare necunoscută nebazică) estimaţia este diferită de zero, adică* $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{m+1;n}$;

5. *Criteriul de optim multiplu. O problemă de programare liniară dispune de o infinitate de soluţii optime dacă cel puţin un vector ne bazic (o necunoscută ne bazică)* are estimaţie egală cu zero, adică există cel puţin un k, $k = \overline{m+1;n}$ *pentru care* $\Delta_k = 0$.

1.6.3 Algoritmul metodei simplex

1. Prolema propusă se aduce la forma canonică;

2. Se determină prima soluţie admisibilă de bază (soluţia de start) cu baza formată din vectori unitari;

3. Se formează tabelul simplex. Prima coloană a tabelului notată cu "B" conţine variabilele bazice (sau vectorii bazei), coloana a doua notată cu "C_b" conţine coeficienţii variabilelor bazice din funcţia obiectiv, iar în coloana "1" (această coloană se mai notează şi cu "b") sunt prezentate valorile variabilelor bazice. În ultima linie a tabelului numită şi *linie test* se scrie valoarea F a funcţiei obiectiv în soluţia asociată bazei B, precum, şi valorile estimaţiilor Δ_j;

4. Dacă în tabelul simplex obţinut se verifică criteriul de optimalitate şi de unicitate a soluţiei prezente, atunci problema este rezolvată;

5. Dacă soluţia din tabelul prezent nu satisface criteriul de optimalitate sau cel de unicitate, atunci procesul de rezolvare a problemei continue cu îmbunătăţirea soluţiei. În acest caz variabila care trebuie inclusă în baza nouă se alege din coloana cu cel mai mic Δ_j negativ pentru un model de maxim şi cel mai mare Δ_j pozitiv pentru un model de minim. În rezultat se obţine o soluţie nouă şi pentru aceasta iarăşii se verifică criteriul de optimalitate. Acest proces continue până se ajunge la soluţia optimă sau se stabileşte că problema nu are soluţii.

Exemplul 1.2. Întreprinderea dispune de trei tipuri de resurse R_1 – forţe de muncă, R_2 – semifabricate, R_3 – capacităţi de producţie şi din ele poate fabrica patru feluri de marfă M_1, M_2, M_3 şi M_4. Să se elaboreze un plan de producţie care să asigure întreprinderii venit maximal. Informaţia necesară pentru rezolvarea problemei este prezentată în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1

Tipul de resurse	Consumul la o unitate de produs				Cantităţi disponibile de resurse
	M_1	M_2	M_3	M_4	
R_1	2,5	2,5	2	1,5	100
R_2	4	10	4	6	260
R_3	8	7	4	10	370
Venitul/Unitate de marfă	40	50	100	80	
Planul	x_1	x_2	x_3	x_4	

Venitul obţinut de la vânzarea unei unităţi de marfă M_1 este de 40 unităţi monetare, de marfă M_2 – 50 unităţi monetare, de marfă M_3 – 100 unităţi monetare, iar de marfă M_4 – 80 unităţi monetare.

Rezolvare. Formăm modelul matematic al problemei. Notăm: se vor fabrica x_1 unităţi de marfă M_1, x_2 unităţi de marfă M_2, x_3 unităţi de marfă M_3 şi x_4 unităţi de marfă M_4. Pentru fabricarea acestor cantităţi de mărfuri se vor consuma $2,5x_1+2,5x_2+2x_3+1,5x_4$ unităţi din resursa R_1 – forţe de muncă (întreprinderea având la dispoziţie 100 de unităţi), $4x_1+10x_2+4x_3+6x_4$ unităţi din resursa R_2 şi $8x_1+7x_2+4x_3+10x_4$ unităţi din resursa R_3. Cantităţile de resurse consumate în producţie nu pot depăşi cantităţile disponibile. Prin urmare, relaţiile dintre consumul de resurse şi cantităţile disponibile de resurse se vor exprima prin relaţiile:

$$\begin{cases} 2,5x_1+2,5x_2+2x_3+1,5x_4 \le 100, \\ 4x_1+10x_2+4x_3+6x_4 \le 260, \\ 8x_1+7x_2+4x_3+10x_4 \le 370. \end{cases}$$

Din sensul problemei avem $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$. Venitul total va constitui

$$F(X) = 40x_1+50x_2+100x_3+80x_4.$$

Astfel, modelul matematic (sau economico-matematic) al problemei este: Să se afle valorile nenegative ale variabilelor x_1, x_2, x_3 şi x_4 care satisfac condiţiile sistemului de mai jos şi, totodată, maximizează funcţia $F(X)$

$$F(X) = 40x_1+50x_2+100x_3+80x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2,5x_1+2,5x_2+2x_3+1,5x_4 \le 100, \\ 4x_1+10x_2+4x_3+6x_4 \le 260, \\ 8x_1+7x_2+4x_3+10x_4 \le 370, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}.$$

Urmează rezolvarea modelului (acesta este prezentat în formă standard). Pentru a aplica metoda simplex de rezolvare trecem la forma canonică a modelului, utilizând trei variabile suplimentare x_5, x_6 şi x_7, numite *variabile de compensare*. Obţinem

$$F(X) = 40x_1+50x_2+100x_3+80x_4+0\cdot x_5+0\cdot x_6+0\cdot x_7 \to \max$$

$$\begin{cases} 2,5x_1+2,5x_2+2x_3+1,5x_4+x_5 = 100, \\ 4x_1+10x_2+4x_3+6x_4+x_6 = 260, \\ 8x_1+7x_2+4x_3+10x_4+x_7 = 370, \end{cases} \qquad x_j \ge 0,\ j=\overline{1,7}.$$

Acum modelul are formă canonică fiindcă toate restricţiile sunt ecuaţii şi termenii lor liberi sunt mărimi nenegative. Modelul conţine două tipuri de variabile – cele iniţiale x_1, x_2, x_3 şi x_4 numite *variabile de decizie*; economic acestea au sens de cantităţi de marfă care se vor produce la întreprnidere conform planului optim de producţie şi variabilele suplimentare x_5, x_6 şi x_7, numite *variabile de compensare*, care din punct de vedere economic constituie cantităţile eventuale de resurse rămase după realizarea planului optim. În sistemul de restricţii-ecuaţii variabilele x_5, x_6 şi x_7 formează bază, adică putem trece problema în tabelul simplex.

Tabelul 1

			40	50	100	80	0	0	0
B_1	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	100	2,5	2,5	[2]	1,5	1	0	0
x_6	0	260	4	10	4	6	0	1	0
x_7	0	370	8	7	4	10	0	0	1
Δ_j		0	-40	-50	-100 ↑	-80	0	0	0

Tabelul 1 este primul tabel simplex din rezolvarea problemei. În prima coloană B_1 sunt prezente necunoscutele bazice (respective vectorilor bazei sistemului de restricţii, în coloana a doua C_b– coeficienţii necunoscutelor bazice în funcţia obiectiv, iar în coloana a treia (notată cu b_i) – componentele primei soluţii admisibile de bază (soluţia de start)

$$X_1 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 100;\ 260;\ 370)\,.$$

În ultima linie (notată cu Δ_j) este prezentată, atât valoarea funcţiei obiectiv calculată în X_1

$$F(X_1) = 40 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 100 \cdot 0 + 80 \cdot 0 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 260 + 0 \cdot 370 = 0$$

($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ – nimic nu s-a produs), cât şi estimaţiile planului X_1 pentru fiecare vector A_j, $j = \overline{1;7}$ din sistemul de restricţii $\Delta_j = C_b \cdot A_j - c_j$, adică: $\Delta_1 = 0 \cdot 2,5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 8 - 40 = -40$, $\Delta_2 = 0 \cdot 2,5 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 7 - 50 = -50$, $\Delta_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 - 100 = -100$, $\Delta_4 = 0 \cdot 1,5 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 10 - 80 = -80$, $\Delta_5 = \Delta_6 = \Delta_7 = 0$ – pentru vectorii bazici estimaţiile sunt egale cu zero. Printre estimaţiile calculate sunt şi negative. Prin urmare, soluţia X_1 nu verifică criteriul de optimalitate. Însă avem posibilitatea să trecem la o altă soluţie mai "bună" fiindcă în toate coloanele cu estimaţii negative există elemente $a_{ij} > 0$. Conform condiţiilor de optimizare, trecerea de la soluţia prezentă X_1 la alta mai

bună X_2 se realizează prin schimbarea bazei prezente B_1 cu altă bază B_2 astfel încât în B_2 să se includă vectorul A_j care în B_1 are cea mai mică estimaţie. În tabelul 1 acest vector este A_3 (sau variabila x_3) cu estimaţia $\Delta_3 = -100$. Marcăm coloana lui $\Delta_3 = -100$ cu o săgeată. Deci în baza B_2 se va include variabila x_3, care va lua locul uneia din variabilele bazice ale bazei B_1. Conform celor menţionate mai sus, din B_1 trebuie exclusă variabila care asigură valoare minimă pentru unul din rapoartele simplex. Cu elementele strict pozitive ale coloanei lui Δ_3 formăm rapoarte simplex şi din ele alegem pe cel mai mic $\frac{b_i}{a_{i3}} = \min\left(\frac{100}{2}; \frac{260}{4}; \frac{370}{4}\right) = \frac{100}{2}$. Observăm că raportul simplex minimal este format de linia lui x_5 şi coloana lui x_3, adică x_5 se elimină din bază, iar în locul lui vine x_3. Astfel se formează baza B_2 cu componentele (x_3, x_6, x_7). Trecerea la tabelul simplex cu baza B_2 se realizează prin metoda Gauss-Jordan, utilizând în calitate de pivot, numitorul raportului simplex minimal, adică elementul situat la intersecţia liniei lui x_5 cu coloana lui x_3. În cazul dat acesta este elementul 2. În rezultat obţinem tabelul 2 (trecerea de la un tabel la altul se mai numeşte *iteraţie*).

Tabelul 2

			40	50	100	80	0	0	0
B_2	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	100	50	1,25	1,25	1	0,75	0,5	0	0
x_6	0	60	-1	5	0	[3]	-2	1	0
x_7	0	170	3	2	0	7	-2	0	1
Δ_j		5000	85	75	0	-5 ↑	50	0	0

În tabelul 2 avem o nouă soluţie admisibilă de bază

$$X_2 = (0, 0, 50, 0, 0, 60, 170),$$

care de asemenea nu este optimă fiindcă în linia Δ_j avem un element negativ: $\Delta_4 = -5$. Mai realizăm o iteraţie gaussiană cu pivotul $a_{24} = 3$.

Tabelul 3

			40	50	100	80	0	0	0
B_3	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	100	35	3/2	0	1	0	1	-1/4	0
x_4	80	20	-1/3	5/3	0	1	-2/3	1/3	0
x_7	0	30	16/3	-29/3	0	0	8/3	-7/3	1
Δ_j		5100	250/3	250/3	0	0	140/3	5/3	0

Obţinem tabelul 3 în care linia Δ_j nu conţine elemente negative, adică soluţia admisibilă de bază din acest tabel este optimă şi se va nota prin simbolul X^*. Astfel, avem:

$$X^* = (x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 35,\ x_4^* = 20,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 0,\ x_7^* = 30)$$

şi $F(X^*) = 5100$. Analizând răspunsul obţinut trebuie să ţinem cont de faptul că în problemă avem două categorii de variabile cu sens economic diferit: variabile de decizie (x_1, x_2, x_3, x_4) care exprimă cantităţi de mărfuri preconizate pentru fabricare şi variabile de compensare (x_5, x_6, x_7) care constituie cantităţile de resurse rămase neutilizate după realizarea planului optim de producţie. Aşadar interpretarea economică a răspunsului obţinut este: întreprinderea va avea un venit maximal în sumă de 5100 unităţi monetare, dacă va realiza planul optim de producţie, conform căruia nu va fabrica mărfuri de tipul M_1 şi M_2 $(x_1^* = 0, x_2^* = 0)$, dar va produce 35 unităţi de marfă de tipul M_3 $(x_3^* = 35)$ şi 20 unităţi de marfă de tipul M_4 $(x_4^* = 20)$. Deci producerea mărfurilor M_1 şi M_2 nu este convenabilă pentru întreprindere.

Valorile optime ale variabilelor de compensare sunt $x_5^* = 0, x_6^* = 0, x_7^* = 30$. Variabila x_5 apare în prima restricţie a problemei, care se referă la cantitatea disponibilă de forţe de muncă, adică x_5^* constituie cantitatea de forţe de muncă rămasă neutilizată după realizarea planului optim.

$$x_5^* = 100 - (2,5x_1^* + 2,5x_2^* + 2x_3^* + 1,5x_4^*) =$$
$$= 100 - (2,5 \cdot 0 + 2,5 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 1,5 \cdot 20) = 0.$$

Deoarece $x_5^* = 0$ constatăm că pentru a îndeplini planul optim de producţie trebuie să se consume toate forţele de muncă disponibile. În mod analog observăm că şi semifabricatele se consumă integral la realizarea planului optim $(x_6^* = 0)$. Variabila de compensare x_7 se referă la cantitatea de capacităţi de producţie rămase nefolosite la realizarea planului optim. Deoarece $x_7^* = 30$ constatăm că după îndeplinirea planului optim vor rămâne neutilizate 30 unităţi de capacităţi de producţie, adică întreprinderea dispune de surplus de capacităţi de producţie.

În tabelul simplex final al problemei rezolvate toate necunoscutele libere au estimaţii strct pozitive $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_5 > 0, \Delta_6 > 0$. Prin urmare soluţia admisibilă de bază

$$X^* = (x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 35, x_4^* = 20, x_5^* = 0, x_6^* = 0, x_7^* = 30)$$

este unică soluţie admisibilă de bază optimală şi $F(X^*) = 5100$. #

1.7 Metoda bazei artificiale

Soluţia optimă a unei probleme de programare liniară poate fi determinată prin metoda simplex doar pornind de la o soluţie admisibilă de bază numită de start (sau soluţie iniţială). Există însă situaţii în care problema nu dispune de soluţie iniţială admisibilă de bază, adică sistemul de restricţii nu constituie un sistem de ecuaţii liniare cu baza formată din vectori unitari.

Fie dată o prolemă de programare liniară în formă canonică

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},\quad b_i \geq 0,\ i = \overline{1;m}.$$

şi aceasta nu conţine un sistem de vectori unitari care să formeze baza sistemului de restricţii.

În asemenea situaţii problema prezentă poate fi transformătă într-o nouă problemă, numită *extinsă*. Modelul acesteia se formează artificial în felul următor: La fiecare restricţie a problemei iniţiale care nu dispune de necunoscută bazică se adaugă o necunoscută artificială x_{n+i}, $i = \overline{1;m}$ cu coeficientul $+1$, neschimbând semnul egalităţii în restricţie. *Necunoscutele (x_{n+i}) formează bază artificială a sistemului de restricţii în problema extinsă.* Necunoscutele artificiale se adaugă şi în funcţia obiectiv însă cu coeficientul $-M$ în cazul modelului de maxim şi $+M$ când avem un model de minim, unde M este un număr pozitiv foarte mare. Astfel se obţine modelul matematic al problemei extinse:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+m} \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n+m},\quad b_i \geq 0,\ i = \overline{1;m}.$$

Se demonstrează că, dacă problema extinsă are soluţie optimă $\overline{X^*} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, \ldots, 0)$ în care toate variabilele artificiale au valori egale cu

zero, atunci problema inițială are soluție optimă $X^* = (x_1^*, x_2^*, ...x_n^*)$, care se obține din soluția $\overline{X^*}$, înlăturând din ea valorile nule ale variabilelor artificiale.

Dacă problema extinsă are soluție optimă în care cel puțin una din variabilele artificiale are valoare diferită de zero, atunci problema inițială nu are soluții fiindcă sistemul de restricții este contradictoriu. Dacă problema extinsă nu are soluție optimă, atunci nici cea inițială de asemenea nu are soluție.

Exemplul 1.3. Să se rezolve problema de programare liniară utilizând metoda bazei artificiale

$$F(X) = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;4}.$$

Rezolvare. Avem o problemă cu criteriu de minimizare prezentată în formă canonică, dar fără soluție admisibilă de bază de start. Pentru a obține o astfel de soluție formăm problema extinsă, adăugând în fiecare restricție câte o necunoscută artificială x_5 și x_6. În funcția obiectiv acestea se vor adăuga cu coeficienții $+M$, unde $M >> 0$. Astfel avem

$$F(X) = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 + Mx_5 + Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 + x_6 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;6}.$$

Problema extinsă dispune de soluție admisibilă de bază de start $\overline{X_1} = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 6;\ 2)$ cu baza $\overline{B_1} = (A_5, A_6)$ formată din vectori unitari. Trecem problema în tabelul simplex și calculăm estimațiile soluției. În cazul problemei extinse la etapa inițială a calculelor estimațiile soluțiilor vor avea două componente – componenta $\Delta_j^{'}$ care nu depinde de M și a doua $\Delta_j^{''}(M)$ dependentă de M. Calculele se realizează mai comod dacă componentele estimațiilor se prezintă în linii separate și se ține cont mai întâi de componenta $\Delta_j^{''}(M)$ fiindcă $M >> 1$. Totodată, după ce o variabilă artificială iese din bază, coloana acesteia se exclude din calculele ulterioare. Dacă ținem cont de acestea observăm că soluția $\overline{X_1}$ nu este optimă și

prima iteraţie trebuie realizată cu pivotul $a_{21} = 3$ din coloana lui x_1. Astfel, variabila artificială x_6 părăseşte baza şi în locul ei vine x_1, formând baza $\overline{B_2}$ prezentată în tabelul 2.

Tabelul 1

			-2	1	8	-2	M	M
$\overline{B_1}$	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	M	6	5	-1	-7	2	1	0
x_6	M	2	[3]	-1	-4	1	0	1
Δ_j'		8M	2	-1	-8	2	0	0
$\Delta_j''(M)$			8M ↑	-2M	-11M	3M	0	0

Tabelul 2

			-2	1	8	-2	M	M
$\overline{B_2}$	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	M	8/3	0	[2/3]	-1/3	1/3	1	5/3
x_1	-2	2/3	1	-1/3	-4/3	1/3	0	1/3
Δ_j'		8/3M-4/3	0	1/3	16/3	-4/3	0	2/3
$\Delta_j''(M)$			0	2/3M ↑	-1/3M	1/33M	0	-8/3M

În tabelul 2 linia $\Delta_j''(M)$ conţine două elemente pozitive, (ceia ce denotă că soluţia din T.2 nu este optimă) cel mai mare din ele fiind 2/3M. În coloana lui trebuie ales pivotul următoarei iteraţii. Acesta poate fi doar elementul $a_{12} = 2/3$. Cu el realizăm iteraţia respectivă în rezultatul căreia obţinem tabelul 3 cu baza $\overline{B_3}$ (x_2, x_1).

Tabelul 3

			-2	1	8	-2	M	M
$\overline{B_3}$	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1	4	0	1	-1/2	1/2		
x_1	-2	2	1	0	-3/2	[1/2]		
Δ_j'		0	0	0	-11/2	3/2 ↑	0	0

Deoarece în $\overline{B_3}$ nu mai sunt variabile artificiale, coloanele lor, cât şi linia $\Delta_j''(M)$ pot fi omise din calcule ulterioare. Linia Δ_j a tabelului 3 conţine un element pozitiv ($\Delta_4 = 3/2$), adică în tabelul 3 nu avem soluţie optimă. Iteraţia a patra se realizează cu pivotul $a_{24} = 1/2$ şi venim la tabelul simplex final (tabelul 4).

În tabelul 4 avem soluţia optimă a problemei (toate elementele Δ_j, $j = \overline{1;4}$ sunt nepozitive) $X^* = (0; 2; 0; 4)$ şi $\min F(X) = F(X^*) = -6$. #

Tabelul 4

			-2	1	8	-2	M	M
$\overline{B_4}$	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1	2	-1	1	1	0		
x_4	-2	4	2	0	-3	1		
Δ_j'		-6	-3	0	-1	0		

Exemplul 1.4. Pentru întreţinerea unei specii de păsări se întrebuinţează două tipuri de hrană H_1 şi H_2, în care se conţin substanţe nutritive – vitamine A, B, C. Cantitatea de vitamine într-un kilogram de hrană de fiecare tip, cât şi minimumul zilnic necesar pentru întreţinerea păsărilor este prezentat în tabelul 1.2.

Tabelul 1.2

Vitamine	Cantitatea de vitamine într-un kg de hrană		Cantitatea minima de vitamine necesară pe zi
	H_1	H_2	
A	3	1	9
B	1	2	8
C	1	6	12
Costul unui kg de hrană	4	6	

Să se compună un raţion de hrană astfel încât păsările să primească zilnic cantităţile necesare de vitamine, dar totodată cheltuielile pentru achiziţionarea hranei să fie minimale.

Rezolvare. Formăm modelul matematic al problemei, notând prin x_1 şi x_2 cantităţile necesare de hrană care trebue procurate. Atunci cheltuielile totale pentru hrană vor fi

$$F(X) = 4x_1 + 6x_2 \to \min,$$

Totodată se impun următoarele restricţii

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,2}. \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$

Modelul obţinut se rezolvă prin metoda simplex, dar trebuie prezentat în formă canonică prin introducerea a trei variabile noi x_3, x_4, x_5 (de compensare) care să transforme restricţiile-inecuaţii în restricţii-ecuaţii. Vom

avea

$$F(X) = 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 8, \\ x_1 + 6x_2 - x_5 = 12, \end{cases} \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5},$$

unde x_1 şi x_2 sunt variabile de decizie, iar x_3, x_4, x_5 – variabile de compensare. Modelul canonic nu are soluţie admisibilă de bază de start. Pentru a forma o astfel de soluţie aplicăm metoda bazei artificiale, adăugând la fiecare restricţie câte o necunoscută artificiala. În funcţia obiectiv acestea se vor adăuga cu coeficienţii $+M$, unde $M >> 1$. Venim la problema extinsă

$$F(X) = 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7 + Mx_8 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 = 8, \\ x_1 + 6x_2 - x_5 + x_8 = 12, \end{cases} \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1,8}$$

cu soluţia admisibilă de bază de start $\overline{X_1} = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 9; 8; 12)$. Trecem problema în tabelul simplex şi continuăm rezolvarea.

Tabelul 1

			4	6	0	0	0	M	M	M
$\overline{B_1}$	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_6	M	9	3	1	-1	0	0	1	0	0
x_7	M	8	1	2	0	-1	0	0	1	0
x_8	M	12	1	[6]	0	0	-1	0	0	1
Δ_j'		0+	-4	-6	0	0	0	0	0	0
$\Delta_j''(M)$		29M	5M	9M ↑	-M	-M	-M	0	0	0

Soluţia $\overline{X_1}$ din tabelul 1, evident, nu este optimă – în liniile estimaţiilor sunt elemente strict pozitive şi cel mai mare dintre ele este 9M-6. Din coloana acestui element alegem pivotul transformării: $\min\left(\frac{9}{1}; \frac{8}{2}; \frac{12}{6}\right) = \frac{12}{6}$. Elementul pivot este $a_{32} = 6$. Cu el se realizează o iteraţie gaussiană, în rezultatul căreia se obţine tabelul simplex 2 cu baza $\overline{B_2} = (x_6, x_7, x_2)$, adică din baza $\overline{B_1}$ a fost exclus x_8, înlocuidu-l cu x_2. În calculele ulterioare coloana lui x_8 se omite.

Tabelul 2

			4	6	0	0	0	M	M	M
B_2	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_6	M	7	[17/6]	0	-1	0	1/6	1	0	
x_7	M	4	2/3	0	0	-1	1/3	0	1	
x_2	6	2	1/6	1	0	0	-1/6	0	0	
Δ_j'		12+	-3	0	0	0	-1	0	0	
$\Delta_j''(M)$		11M	7/2M ↑	0	-M	-M	1/2M	0	0	

Tabelul 3

			4	6	0	0	0	M	M	M
B_3	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	4	42/17	1	0	-6/17	0	1/17		0	
x_7	M	40/17	0	0	4/17	-1	[5/17]		1	
x_2	6	27/17	0	1	1/17	0	-3/17		0	
Δ_j'		330/17+	0	0	-18/17	0	-14/17		0	
$\Delta_j''(M)$		40/17M	0	0	-4/17M	-M	5/17 ↑		0	

Tabelul 4

			4	6	0	0	0	M	M	M
B_4	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	4	2	1	0	2/5	1/5	0			
x_5	0	8	0	0	4/5	-17/5	1			
x_2	6	3	0	1	1/5	-3/5	0			
Δ_j'		26	0	0	-2/5	-14/5	0			

Soluţia optimă a problemei iniţiale se obţine în tabelul 4:

$$X^* = (2;\ 3;\ 0;\ 0;\ 8), \quad \min F(X) = F(X^*) = 26.$$

Păsările vor putea primi cantităţile necesare de vitamine dacă întreprinderea va procura zilnic câte 2 unităţi de hrană H_1 şi 3 unităţi de hrană H_2 cheltuind suma minimală de 26 unităţi monetare.

Vom clarifica care este semnificaţia economică a variabilelor de compensare x_3, x_4 şi x_5 în problema rezolvată. Din prima restricţie a modelului canonic avem: $x_3 = (3x_1 + x_2) - 9$. În varianta optimă $x_3^* = (3x_1^* + x_2^*) - 9$, unde $(3x_1^* + x_2^*)$ constitue cantitatea de vitamină A pe care întreprinderea trebue să o procure conform planului optim, iar numărul 9 este minimumul necesar de vitamină A care asigură o stare normală

a păsărilor. Şi, aşa cum $x_3^* = (3 \cdot 2 + 1 \cdot 3) - 9 = 0$, conchidem că potrivit planului optim, întreprinderea va procura vitamină A exact atât cât este stabilit de normele veterinare. Aceiaşi situaţie o avem şi pentru vitamina B, fiindcă în soluţia optimă $x_4^* = 0$. Însă, dacă ne referim la variabila de compensare x_5, valoarea ei optimă este $x_5^* = 8$ sau $x_5^* = (x_1^* + 6x_2^*) - 12 = (1 \cdot 2 + 6 \cdot 3) - 12 = 8$, unde $(x_1^* + 6x_2^*) = (2 + 6 \cdot 3)$ este cantitatea de vitamină C care se va procura conform planului optim, iar numărul 12 este cantitatea necesară (minimumul necesar) de vitamină C pentru funcţionarea normală a organismului păsărilor. Deci, conform soluţiei optime, cantităţile de hrană H_1 (2 un.) şi H_2 (3 un.) asigură întreprinderea cu un surplus de 8 unităţi de vitamină C şi strictul necesar de celelalte vitamine.

Concluzie. În problema rezolvată variabilele de compensare, în varianta lor optimă, constitue surplusurile de vitamine pe care le va avea întreprinderea, aplicând un raţion optim de hrană pentru păsări. #

1.8 Probleme propuse

Să se rezolve prin metoda simplex următoarele probleme:

1. $F(X) = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$,
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 \le -6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

2. $F(X) = x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min$,
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 1, \\ x_1 + x_4 \le 5, \\ x_2 + x_3 \le 10, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

3. $F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$,
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

4. $F(X) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \min$,
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

2 Dualitatea în programarea liniară

2.1 Noţiuni privind dualitatea în programarea liniară

Admitem că o întreprindere (numită convenţional întreprinderea Nr.1) dispune de m tipuri de resurse R_1, R_2,...,R_m din care poate fabrica n varietăţi de produse P_1, P_2,...,P_n. Se ştie că pentru a fabrica o unitate de produs P_j, $j = \overline{1;n}$ se vor consuma a_{ij} unităţi din resursa R_i, $i = \overline{1;m}$; (mărimile a_{ij} constitue parametrii tehnologici, aceştea caracterizează nivelul de asigurare tehnologică al întreprinderii). Se cunoaşte că venitul de la comercializarea unei unităţi de produs (de marfă) P_j constitue c_j unităţi monetare. Se cere să se elaboreze un plan de producţie, astfel încât în condiţiile date, întreprinderea să obţină un venit integral maximal.

Datele problemei se prezintă în tabelul 2.1.

Tabelul 2.1

Resurse	Produse						Cantităţi disponibile de resurse
	P_1	P_2	...	P_j	...	P_n	
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...
R_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Venitul	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	
Planul de producţie	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	

Notăm cantităţile de produse $P_1, P_2, ..., P_n$ care se vor fabrica la întreprindere, respectiv, prin x_1, x_2,...,x_n şi formăm modelul matematic al problemei. Obţinem:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Aici $F(X)$ este funcţia obiectiv a problemei şi reprezintă venitul integral obţinut de la comercializarea producţiei; celelalte relaţii reprezintă restricţiile impuse de cantităţile disponibile de resurse cât şi restricţiile de nenegativitate ale mărimilor x_j, $j = \overline{1;n}$.

Admitem acum că există un agent economic (întreprinderea Nr.2) care intenţionează să cumpere toate resursele întreprinderii Nr.1, propunând y_1 u.m. pentru fiecare unitate de resursă R_1, y_2 u.m. pentru fiecare unitate de resursă R_2, ..., y_m u.m. pentru fiecare unitate de resursă R_m. Astfel, pentru procurarea tuturor resurselor cumpărătorul (întreprinderea Nr.2) trebuie să cheltuiască o sumă de $S(Y)$ u.m. pe care şi-ar dori-o să fie minimală, adică

$$S(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_ny_n \to \min$$

Întreprinderea Nr.1 are interesul său: ea vrea să primească de la întreprinderea Nr.2 o sumă nu mai mică decât cea pe care ar fi obţinut-o de la vânzarea producţiei gata. Astfel, dacă ţinem cont de faptul că pentru fabricarea unei unităţi de marfă de tipul $P1$ se cer a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1} cantităţi de resurse, venim la concluzia că suma totală pe care o va cheltui cumpărătorul (întreprinderea Nr.2) pentru a procura aceste cantităţi de resurse constituie

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m,$$

şi firesc, vînzătorul vrea ca ea să fie nu mai mică de cât c_1 – venitul de la vînzarea unei unităţi de marfă P_1, adică

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1,$$

În caz contrar pentru întreprinderea Nr.1 nu ar fi convenabilă vânzarea resurselor disponibile.

În mod analog se obţin şi relaţiile

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n.$$

Astfel, ţinînd cont de interesele ambelor părţi (vînzător şi cumpărător) în rezultatul anumitor "tratative", obţinem c nouă problemă de programare liniară

$$S(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ ..... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n, \\ y_i \geq 0, \ i = \overline{1;m}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Aceasta se numeşte *problema duală* asociată problemei iniţiale (care în cele ce urmează se va numi *problemă primală*), iar ambele formează o pereche numită *cuplu de probleme în dualitate.* Menţionăm aici că fiecărei restricţii i din problema primală, adică fiecărei resurse R_i i se asociază o variabilă y_i, numită *variabilă duală.* Problema (2.2), fiind o problemă de programare liniară, se rezolvă prin metoda simplex. Valoarea optimă a variabilei duale y_i corespunzătoare resursei R_i se numeşte *estimaţie duală* a acestei resurse.

Astfel, din informaţia care se conţine în tabelul 2.1 s-au obţinut două probleme de programare liniară care modelează două posibilităţi diferite de utilizare a resurselor disponibile. Aceste probleme au caracter autonom, adică pot fi formulate independent una de alta (iniţial se putea formula problema a doua) şi pot fi rezolvate în mod autonom. Totodată ele sunt legate printr-un şir de relaţii şi proprietăţi fundamentale care impun ca în multe situaţii să fie examinate împreună. Observăm, că criteriile de optimalitate, cît şi semnele restricţiilor în problemele (2.1) şi (2.2) sunt reciproc opuse.

S-a stabilit, că pentru orice problemă de programare liniară se poate construi o altă problemă de programare liniară numită *duala* celei iniţiale. Astfel se constitue *principiul dualităţii în programarea* liniară. Perechea de probleme (2.1) şi (2.2) poartă denumirea de *cuplu de probleme în dualitate.*

Dacă un cuplu de probleme poate fi prezentat în forma (2.1) şi (2.2) atuci se spune că ele sunt simetrice în dualitate. Dacă însă în sistemul de restricţii a problemei primale sunt şi ecuaţii (adică restricţii cu semnul "=") sau careva variabile nu sunt supuse restricţiei de nenegativitate, atunci construind duala acestei probleme vom obţine un cuplu nesimetric de probleme în dualitate.

2.2 Reguli de formare a problemei duale

Conceptul de dualitate ocupă un loc central în programarea liniară. Conform acestui concept fiecărei probleme de programare liniară numită **iniţială** sau **primală** i se poate ataşa o altă problemă de programare

liniară numită **dual**ă. Dualitatea oferă un şir de posibilităţi importante pentru o analiză amplă şi profundă a multor situaţii din domeniul economiei.

Fie dată o problemă de programare liniară în formă generală

$$F(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n \le b_l, \\ a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + ... + a_{l+1,n}x \ge b_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_m = b_m, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,t},\ t \le n.$$

Considerăm că (2.3) este problema primală.

Problema duală se formează prin următorul **algoritm**:

1. Restricţiile-inecuaţii ale problemei primale se aduc în concordanţă cu funcţia obiectiv, adică dacă în problemă se cere maximizarea funcţiei obiectiv ($\max F(X)$) atunci toate restricţiile-inecuaţii trebuie să aibă semnul "$\le$"; dacă se cere minimizarea funcţiei obiectiv ($\min F(X)$) atunci restricţiile-inecuaţii trebuie să fie cu semnul "$\ge$". În cazul cînd careva restricţie-inecuaţie nu este în concordanţă cu funcţia obiectiv atunci aceasta se va înmulţi cu "-1". Restricţiile-ecuaţii se lasă neschimbate.

2. Fiecărei restricţii i din problema primală i se ataşează câte o nouă necunoscută y_i **numită dual**ă; necunoscuta duală ataşată unei restricţii-inecuaţii va fi supusă condiţiei de nenegativitate, iar necunoscuta duală ataşată restricţiei-ecuaţie nu va fi supusă condiţiei de nenegativitate (se spune "fără restricţie de semn" – f.r.s.).

3. Funcţia obiectiv a problemei duale se scrie

$$S(Y) = c_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m,$$

unde c_0 este termenul liber din funcţia obiectiv a primalei;

$y_1, y_2, \dots, y_m$ – necunoscutele problemei duale;

$b_1, b_2, \dots, b_m$ – termenii liberi din restricţiile primalei.

4. Dacă în problema primală $F(X) \to \max$, atunci în problema duală $S(Y) \to \min$; dacă $F(X) \to \min$, atunci $S(Y) \to \max$.

5. Matricea coeficienţilor necunoscutelor sistemului de restricţii a dualei este matricea transpusă a coeficienţilor necunoscutelor sistemului de restricţii a primalei.

6. Toate restricţiile problemei duale se scriu în concordanţă cu funcţia obiectiv a dualei.

7. Coeficienţii necunoscutelor funcţiei obiectiv a primalei servesc ca termeni liberi în restricţiile dualei.

Exemplul 2.1. Să se formeze problema duală pentru următoarea problemă de programare liniară

$$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 7, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Rezolvare. Prima şi a treia restricţie se înmulţesc cu -1 pentru a le pune în concordanţă cu funcţia obiectiv. Astfel problema primală obţine forma

$$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -7, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -4, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mid y_1 \\ \mid y_2 \\ \mid y_3 \end{array}$$

Formăm problemă duală conform regulilor de mai sus şi primim

$$S(Y) = -7y_1 + 5y_2 - 4y_3 \to \max$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - 3y_3 \leq 4, \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 5, \\ y_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases} \qquad \#$$

Exemplul 2.2. Să se scrie problema duală pentru următoarea problemă de programare liniară

$$Z(X) = x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 \to \min,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \end{array} \right. \begin{array}{l} \vert\ y_1 \\ \vert\ y_2 \end{array}$$

Rezolvare.

$$S(Y) = 7y_1 + 10y_2 \to \max,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5y_1 + 3y_2 \leq 1, \\ 7y_1 + 5y_2 \leq -3, \\ 2y_1 + 3y_2 \leq -4, \\ 3y_1 + y_2 \leq 5, \end{array} \right.$$

unde y_1 şi y_2 sunt fără restricţii de semn (f.r.s.). #

Evident, duala dualei este problema primală. Există situaţii în care una din problemele cuplului se rezolvă mai simplu. În asemenea cazuri este raţional să se rezolve anume această problemă, (fără a o rezolva şi pe cealaltă) după ce, în baza relaţiilor dintre soluţiile optime ale cuplului (care vor fi prezentate mai jos) se determină şi soluţia optimă a celeilalte probleme din cuplu.

2.3 Teoreme ale dualităţii

Fiecare din problemele unui cuplu este autonomă si, prin urmare, poate fi rezolvată separat prin metoda simplex. Însă teoria dualităţii (care constă dintr-un set de leme şi teoreme) pune la dispoziţie cîteva proprietăţi si relaţii fundamentale dintre problemele cuplului prin care se simplifică determinarea soluţiilor optime ale problemelor din cuplu. Prezentăm (fără demonstraţie) cîteva din teoremele dualităţii.

Teorema 2.1. *Dacă una din problemele cuplului are soluţie optimă, atunci si cealaltă problemă din cuplu dispune de soluţie optimă şi valorile optime ale funcţiilor obiectiv coincid, adică* $\max F(X) = \min S(Y)$, *sau*

$$F(X^*) = S(Y^*), \tag{2.4}$$

adică

$$c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + b_2y_2^* + \ldots + b_my_m^* \tag{2.5}$$

Dacă, însă, una din problemele cuplului nu are soluţie optimă, atunci sistemul de restricţii din cealaltă problemă este contradictoriu (adică nici această problemă nu are soluţie optimă).

Sensul economic al primei teoreme: Planul $X^* = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de producţie a mărfurilor şi setul $Y^* = (y_1, y_2, ..., y_m)$ de estimaţii ale resurselor disponibile devin optime doar în cazul în care venitul de la comercializarea producţiei calculat prin preţurile pieţei $c_1, c_2, ..., c_n$ (cunoscute până la rezolvarea problemei) este egal cu costul resurselor consumate pentru a fabrica producţia, cost calculat prin preţurile interne (numite şi "preţuri umbră") $y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*$ (care se determină doar după rezolvarea problemei şi, prin urmare, valabile doar pentru condiţiile întreprinderii examinate). Pentru toate celelalte soluţii admisibile X şi Y venitul de la vînzarea producţiei nu depăşeşte cheltuielile resurselor consumate, adică

$$F(X) \leq S(Y).$$

Prin urmare mărimea $S(Y) - F(X)$ constitue pierderea suportată de întreprindere în funcţie de programul de activitate (X) şi de estimaţiile (Y) pentru resursele disponibile. Din prima teoremă rezultă că, dacă se aplică planul optim de activitate (X^*) şi estimaţiile optime (Y^*) ale resurselor disponibile atunci pierderile de producţie sunt nule.

Din punct de vedere economic, sensul primei teoreme poate fi interpretat şi astfel: pentru întreprindere este indiferent cum să procedeze – sau să producă marfă conform planului optim X^* şi să obţină astfel venit maximal în valoare de $F(X^*)$ unităţi monetare, sau să vîndă resursele disponibile cu preţuri optime Y^* şi să obţină de la vînzare o sumă $S(Y^*)$ egală cu $F(X^*)$. Deci preţurile umbră constitue un instrument de echilibrare a venitului obţinut de la comercializarea unei unităţi de produs şi a cheltuielilor pentru resursele necesare la fabricarea acestei unitatăţi de produs.

Trebue totodată de avut în vedere că semnificaţia economică a variabilelor duale $y_1, y_2, ..., y_m$ este determinată de tipul şi structura problemei, adică au caracter şi relevanţă locală şi deaceea sunt valabile numai pentru modelul din care rezultă. Prin urmare atributul lor de "preţ" trebue înţeles doar în sensul de evaluare. L.V.Cantorovici le-a numit "estimaţii obiectiv determinate" (объективно обусловленные оценки).

Teorema 2.2. *(Teorema ecarturilor complementare). Condiţiile necesare şi suficiente ca soluţiile admisibile*

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \quad şi \quad Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$$

ale unui cuplu de probleme în dualitate să fie şi soluţii optime pentru aceste probleme sunt:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, i = 1, 2, ..., m, \tag{2.6}$$

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, j = 1, 2, ..., n, \tag{2.7}$$

Din relaţiile (2.6) şi (2.7) conchidem, că dacă careva inecuaţie din sistemul de restricţii nu devine egalitate în soluţia optimă, atunci componenta respectivă din soluţia optimă a dualei trebue să fie egală cu zero; dacă însă careva componentă a soluţiei optime a uneia din problemele cuplului este pozitivă, atunci restricţia respectivă din problema duală trebue să se transforme în egalitate. Adică, dacă pentru careva valoare a lui i avem $y_i^* > 0$ atuci

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i,$$

iar dacă $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, atunci $y_i^* = 0$. Dacă pentru careva valoare a lui j avem $x_j^* > 0$, atunci

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j,$$

dacă însă $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > 0$, atunci $x_j^* = 0$.

Teorema 2.3. *Considerăm problema* (2.1) *de utilizare optimă a resurselor disponibile (problema de producţie). În ea funcţia $F(X)$ reprezintă venitul pe care-l va obţine întreprinderea de la comercializarea producţiei fabricate. Ţinând cont de relaţiile* (2.4) *şi* (2.5) *putem scrie:*

$$F(X^*) = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + ... + b_m y_m^*, \tag{2.8}$$

unde $F(X^*)$ este valoarea maximă a venitului, $b_1, b_2, ..., b_m$ – cantităţile disponibile de resurse, iar $y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*$ – preţurile umbră respective pentru aceste resurse.

Conţinutul teoremei a treia se exprimă prin relaţia:

$$\frac{\partial F(X^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \ i = \overline{1, m}, \tag{2.9}$$

din care conchidem că valoarea optimă a variabilei duale y_i este egală cu creşterea funcţiei obiectiv cauzată de o creştere mică a cantităţii resursei respective. Dacă în (2.9) punem $\partial b_i \approx \Delta b_i$ şi $\partial F_i(X^*) \approx \Delta F_i(X^*)$, atunci venim la egalitatea

$$\frac{\Delta F_i(X^*)}{\Delta b_i} = y_i^* \quad \text{sau} \quad y_i^* \Delta b_i = \Delta F_i(X^*)$$

şi pentru $\Delta b_i = 1$ obţinem $y_i^* = \Delta F_i(X^*)$. *Prin urmare, valoarea optimă a estimaţiei duale y_i^* este numeric egală cu creşterea $\Delta F_i(X^*)$ a funcţiei obiectiv când cantitatea resursei respective b_i creşte cu o unitate.*

Prin aceasta se confirmă, că estimaţiile duale $y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*$ au sens de preţuri, care, ţinând cont de specificul lor deosebit, au fost numite *preţuri umbră (preţuri interne sau estimaţii marginale ale resurselor).*

Formulăm acum rezumativ câteva proprietăţi importante, care reiese din teoremele dualităţii:

1. Din prima teoremă avem: conform planului optimal de lucru al întreprinderii toate cheltuielile de producţie, calculate prin preţurile interne (preţurile umbră) coincid numeric cu venitul optim de la comercializarea producţiei, calculat prin preţurile externe (adică preţurile pieţei). Prin urmare, estimaţiile duale y_i, $i = \overline{1; m}$ constituie un instrument de balansare a cheltuielilor de producţie şi rezultatele obţinute de la vînzarea acesteia.

2. Din teorema a doua: estimaţiile duale pot fi utilizate în calitate de măsură a nivelului de deficit pentru resursele disponibile – dacă pentru resursa R_i, $i = \overline{1; m}$ estimaţia respectivă y_i are valoare pozitivă, atunci toată cantitatea disponibilă a resursei R_i se consumă pentru realizarea planului optim şi această resursă este considerată *deficitară* (în sens că întreprinderea nu poate să-şi continue activitatea şi să-şi mărească venitul fiindcă îi lipseşte resursa R_i). Dacă, însă, pentru îndeplinirea planului optimal nu s-a consumat toată cantitatea

disponibilă a resursei R_i ci doar o parte din ea, atunci restul rămas neutilizat se consideră surplus, adică cantitatea acestei resurse este excedentară. În acest caz resursa R_i este *nedeficitară*, iar estimatia ei dual este egală cu zero. Deci resursa deficitară (se consumă total pentru realirea planului optimal) are estimaţie pozitivă, iar resursa nedeficitară (excedentară) are estimaţie nulă.

3. Prin aplicarea estimaţiilor duale poate fi stabilită oportunitatea fabricării unuia sau altui tip de produse, adică, estimaţiile duale pot servi în calitate de măsură a rentabilităţii fabricării producţiei de anumit tip.

2.4 Rezolvarea simultană a unui cuplu de probleme în dualitate

O legătură importantă între problema primară şi problema duală o constituie corespondenţa dintre soluţiile lor de bază.

Considerăm cuplul de probleme în dualitate (2.1) şi (2.2) şi aducem fiecare problemă la forma ei canonică

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.10}$$

$$S(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ ..... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1;m}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Pentru aceasta, în restricţiile problemei (2.10) $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1;m}$ trebuie introduse m variabile nenegative $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ (câte una în fiecare restricţie), iar în restricţiile problemei (2.11) $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j,\ j =$

$\overline{1,n}$ – n variabile nenegative $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}$. Se demonstrează că există următoarea corespondenţă biunivocă dintre variabilele problemelor cuplului

Tabelul 2.2

Variabilele problemei primale							
Variabile iniţiale				Variabile de compensare			
x_1	x_2	x_j	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+i}	x_{n+m}
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
y_{m+1}	y_{m+2}	y_{m+j}	y_{m+n}	y_1	y_2	y_i	y_m
Variabile de compensare				Variabile iniţiale			
Variabilele problemei duale							

Din teoremele formulate mai sus urmează concluzia, că dacă problemele cuplului dispun de soluţii admisibile de bază, atunci fiecărei soluţii de bază a problemei primale îi corespunde o soluţie de bază a problemei duale. Variabilelor bazice din problema primală le corespund variabile nebazice în problema duală. De asemenea, variabilelor nebazice din problema primală le corespund variabile bazice ale problemei duale. Această corespondenţă dintre componentele soluţiilor de bază ale cuplului de probleme în dualitate se numeşte *proprietate de complementaritate* a soluţiilor.

Proprietatea de complementaritate este valabilă şi pentru soluţiile problemelor cuplului: dacă o soluţie de bază este admisibilă, atunci soluţia respectivă de bază a celelalte probleme din cuplu nu este admisibilă. Doar pentru soluţiile optime X^* şi Y^*se verifică simultan criteriul de admisibilitate şi valorile funcţiilor obiectiv sunt egale $F(X^*) = S(Y^*)$.

La fiecare iteraţie algoritmul simplex identifică simultan o soluţie de bază X pentru problema primală si soluţia Y pentru problema duală. Dacă X nu este optimă pentru problema primală, atunci Y nu este admisibilă pentru problema duală.

Se demonstrează că prin aplicarea algoritmului simplex, problema primală şi cea duală se rezolvă simultan, astfel încât în tabelul simplex final al rezolvării uneia din ele se conţine atât soluţia optimă a problemei primale (duale) X^* (Y^*) pe coloana vectorului termenilor liberi B_0 (această coloană se mai notează şi prin b_i), cât şi soluţia optimă a problemei duale (primale) pe linia Δ_j a tabelului. Componentele soluţiei optime a dualei se află la intersecţia liniei Δ_j cu coloanele vectorilor care au format baza iniţială, dar coeficienţii din funcţia obiectiv ai variabilelor din baza iniţială să fie egali cu zero (deseori acestea sunt coloanele necunoscutelor de compensare sau/şi ale necunoscutelor artificiale unde se pune $M = 0$).

2.5 Sensul economic al variabilelor duale

Mai sus s-a menţionat că semnificaţia economică a variabilelor duale se determină în funcţie de tipul problemei. Vom examina următoarele probleme

Exemplul 2.3. O întreprindere dispune de trei resurse: R_1 – forţe de muncă (om/ore), R_2 – semifabricate (u. f.) şi R_3 – capacităţi de producţie (u. f.) şi planifică să fabrice patru feluri de articole A_1, A_2, A_3 şi A_4, utilizând resursele disponibile. Consumul necesar de resurse pentru fabricarea unei unităţi de fiecare tip de articol, cantităţile disponibile de resurse cât şi venitul obţinut de la vânzarea unei unităţi de articol de fiecare fel sunt prezentate în tabelul 2.3.

Tabelul 2.3

Tipul de resurse	Consumul de resurse pentru fabricarea unei unităţi de articol				Cantităţi disponibile de resurse
	A_1	A_2	A_3	A_4	
R_1	2,5	2,5	3	2	270
R_2	4	10	5	5	550
R_3	8	7	6	9	750
Venitul unitar	80	70	120	90	
Planul	x_1	x_2	x_3	x_4	

Să se determine planul optimal de producţie pentru întreprindere şi să se realizeze analiza economică a soluţiei obţinute.

Rezolvare. Formăm mai întîi modelul matematic al problemei propuse şi totodată modelul problemei duale, necesar pentru analiza economică. Notăm:

x_1 – numărul de articole de tipul A_1, care urmează a fi fabricate;
x_2 – numărul de articole de tipul A_2, care urmează a fi fabricate;
x_3 – numărul de articole de tipul A_3, care urmează a fi fabricate;
x_4 – numărul de articole de tipul A_4, care urmează a fi fabricate.

Acum venitul total care se va obţine de la comercializarea producţiei fabricate la întreprindere se exprimă prin funcţia

$$F(X) = 80x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 90x_4 \to \max, \qquad (2.12)$$

urmată de restricţiile impuse de cantităţile limitate de resurse disponibile

$$\begin{cases} 2,5x_1 + 2,5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 270, \\ 4x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4 \le 550, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 \le 750, \end{cases} \qquad (2.13)$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}. \tag{2.14}$$

Relaţiile (2.12)-(2.14) constitue modelul matematic al problemei propuse spre rezolvare. Forma canonică a acestui model (pe parcurs se va mai numi şi modelul problemei primale) este:

$$F(X) = 80x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 90x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2,5x_1 + 2,5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 270, \\ 4x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 5x_4 + x_6 = 550, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 + x_7 = 750, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Duala problemei (2.12)-(2.14) este următoarea:

$$S(Y) = 270y_1 + 550y_2 + 750y_3 \to \min, \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} 2,5y_1 + 4y_2 + 8y_3 \geq 80, \\ 2,5y_1 + 10y_2 + 7y_3 \geq 70, \\ 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 120, \\ 2y_1 + 5y_2 + 9y_3 \geq 750, \end{cases} \tag{2.17}$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}, \tag{2.18}$$

Forma canonică a modelului (2.16)-(2.18) este

$$S(Y) = 270y_1 + 550y_2 + 750y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6 + 0y_7 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2,5y_1 + 4y_2 + 8y_3 - y_4 = 80, \\ 2,5y_1 + 10y_2 + 7y_3 - y_5 = 70, \\ 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 - y_6 = 120, \\ 2y_1 + 5y_2 + 9y_3 - y_7 = 750, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,7}.$$

În modelul canonic al problemei primale variabilele iniţiale x_1, x_2, x_3 şi x_4 sunt variabile de decizie, ele reprezintă cantităţile de produse care se vor fabrica la întreprindere şi prin ele se formează valoarea venitului acestei întreprinderi. Celelalte variabile, adică x_5, x_6 şi x_7 sunt variabile de compensare şi valorile lor nu au nici un impact asupra valorii funcţiei obiectiv; acestea se asociază respectiv cu una din resursele disponibile R_1, R_2, R_3. În modelul canonic dual variabilele de decizie sunt y_1, y_2, y_3, iar cele de compensare sunt y_4, y_5, y_6 şi y_7.

În tabelul ce urmează se prezintă rezolvarea prin metoda simplex a problemei primale (2.12)-(2.14).

Tabelul 2.4

			80	70	120	90	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	270	2,5	2,5	[3]	2	1	0	0
x_6	0	550	4	10	5	5	0	1	0
x_7	0	750	8	7	6	9	0	0	1
Δ_j		0	-80	-70	-120 ↑	-90	0	0	0
x_3	120	90	0,833	0,833	1	0,667	0,333	0	0
x_6	0	100	0,167	5,833	0	1,667	-1,667	1	0
x_7	0	210	3,0	2,0	0	[5,0]	-2,0	0	1
Δ_j		10800	20	30	0	-10 ↑	40	0	0
x_3	120	62	0,433	0,567	1	0	0,6	0	-0,133
x_6	0	30	-1,167	5,167	0	0	-1	1	-0,333
x_4	90	42	0,6	0,4	0	1	-0,4	0	0,2
Δ_j		11220	26	34	0	0	36	0	2
			y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

În ultimul tabel toate elementele Δ_j sunt nenegative, prin urmare în acest tabel sunt prezente soluţiile optime pentru ambele probleme ale cuplului. Soluţia optimă pentru problema primală este:

$$X^* = (x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ x_3^* = 62;\ x_4^* = 42;\ x_5^* = 0;\ x_6^* = 30;\ x_7^* = 0)$$

şi $\max F(X) = F(X^*) = 11220.$

Soluţia optimă a problemei duale:

$$Y^* = (y_1^* = 36;\ y_2^* = 0;\ y_3^* = 2;\ y_4^* = 26;\ y_5^* = 34;\ y_6^* = 0;\ y_7^* = 0)$$

şi $\min S(Y) = S(Y^*) = 11220.$

Aici se încheie faza matematică în rezolvarea problemei.

Pentru prima grupă avem următoarele relaţii dintre variabilele primale-duale:

$$\begin{array}{ccc} x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3. \end{array}$$

Urmează analiza economică a soluţiilor obţinute, utilizînd estimaţiile duale. Vom examina două grupări ale variabilelor problemelor cuplului:

1. variabilele care se referă la cantităţile disponibile de resurse (variabilele de compensare);

2. variabilele care exprimă cantităţile de articole planificate pentru fabricare (variabilele de decizie). #

2.5.1 Resurse deficitare şi nedeficitare. Preţuri umbră

Examinăm sistemul de restricţii (2.15) din problema primală. Din prima ecuaţie a acestui sistem avem

$$x_5 = 270 - (2,5x_1 + 2,5x_2 + 3x_3 + 2x_4),$$

iar în condiţiile programului optim de activitate

$$x_5^* = 270 - (2,5x_1^* + 2,5x_2^* + 3x_3^* + 2x_4^*). \qquad (2.20)$$

În (2.20) numărul 270 constitue volumul disponibil al resursei R_1, iar expresia din paranteze – partea acestei resurse care se consumă pentru a realiza planul optim de producţie. Prin urmare x_5^* constitue diferenţa dintre cantitatea totală disponibilă de resursă R_1 şi acea cantitate din ea care se consumă pentru a realiza planul optim. Dacă punem în (2.20) valorile optime ale variabilelor de decizie din problema primală $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 62, x_4^* = 42$ obţinem $x_5^* = 0$, ceea ce înseamnă că toată cantitatea disponibilă a resursei R_1 a fost utilizată pentru a realiza planul optim de producţie. Totodată observăm că valoarea $x_5^* = 0$, se regăseşte în vectorul X^* (componenta a cincea). Prin urmare, pentru a stabili cum se valorifucă resursele disponibile la îndeplinirea planului optim de producţie este suficient de examinat valorile variabilelor de compensare din soluţia optimă X^*, si dacă componenta ei $x_{n+i}^* = 0$, $i = \overline{1;m}$, atunci resursa respectivă R_i se consumă total pentru a realiza planul optim, iar dacă $x_{n+i}^* > 0$, atunci cantitatea disponibilă a resursei R_i nu se consumă în întrejime pentru realizarea planului optim, adică o parte din ea, şi anume x_{n+i}^* unităţi, rămîne neutilizată şi constitue surplus. Deoarece în problema rezolvată x_6 şi x_7 se referă la resursele R_2 şi R_3, respectiv (a se vedea (3.4)), iar din soluţia optimă X^* avem $x_6^* = 30$ şi $x_7^* = 0$ venim la concluzia, că după realizarea planului optim din volumul total de 550 unităţi a resursei R_2 au rămas neutilizate 30 unităţi, adică întreprinderea dispune de un surplus al acestei resurse. Resursa R_3 se utilizează în întregime ($x_7^* = 0$).

Resursele, cantităţile cărora se consumă în întregime pentru realizarea planului optim de producţie se numesc deficitare (sau resurse rare), iar resursele care nu se consumă complet se numesc resurse nedeficitare.

În problema rezolvată resursele R_1 şi R_3 sunt deficitare, iar resursa R_2 este una nedeficitară. Aici conceptul "resursă deficitară" şi "resursă nedeficitară" are un specific aparte. S-a convenit să se numească "deficitară" acea resursă a întreprinderii lipsa căreia sau micşoraea cantităţii ei disponibile provoacă nerealizarea planului de producţie sau diminuarea venitului întreprinderii. Totodată, o resursa se numeşte "nedeficitară" nu din motiv că în stoc cantitatea ei este nelimitată (cantităţile resurselor sunt limitate de mărimile b_i), dar din cauza că nu toată cantitatea ei disponibilă se utilizează pentru realizarea planului optim. Resursa se numeşte nedeficitară fiindcă aceasta nu constitue o piedică pentru creşterea în continuare a venitului; piedica o constitue resursele deficitare fiindcă cantităţile lor se consumă în întregime şi din această cauză procesul de producţie se stopează.

Conform principiilor dualităţii, variabilelor de compensare x_5, x_6, x_7 din problema primală le corespund respectiv variabilele de decizie ale problemei duale y_1, y_2, y_3. În varianta optimă acestea sunt mărimile $y_1^* = 36$, $y_2^* = 0$ şi $y_3^* = 2$ şi constitue estimaţiile optime pentru resursele disponibile, care, după cum s-a menţionat mai sus, se mai numesc şi preţuri umbră ale resurselor. Observăm că preţurile umbră ale resurselor deficitare R_1 şi R_3 sunt diferite de zero (strict pozitive), iar preţul umbră al resursei nedeficitare R_2 este egal cu zero. După cum urmează din teorema a treia, preţul umbră y_i^* al resursei R_i arată cu cât se modifică valoarea optimă a funcţiei obiectiv $F(X^*)$ atunci cînd cantitatea resursei R_i se schimbă cu o unitate (mai jos vom vedea că această afirmaţie este valabilă doar pentru anumite limite de variaţie a cantităţii resursei R_i). Deci, prin preţurile umbră se poate stabili contribuţia (aportul) fiecărei resurse (adică fiecărei restricţii) la formarea venitului maximal. Prin valoarea preţului umbră se măsoară şi nivelul de deficit al resursei, prin urmare determină "importanţa" acesteia în formarea venitului optim. În problema rezolvată avem $y_1^* = 36$. Aceasta înseamnă că resursa R_1 (cărea îi corespunde y_1) este deficitară şi creşterea cantităţii ei disponibile cu o unitate aduce la venitul optimal un adaus de 36 unităţi monetare (respectiv – diminuarea cantităţii disponibile a resursei R_1 cu o unitate va micşora venitul optimal cu 36 u.m.). Preţul umbră pentru resursa R_2 este zero ($y_2^* = 0$), deci ea este nedeficitară şi modificarea cantităţii ei disponibile (pînă la anumite limite) nu schimbă valoarea venitului optimal. Preţul umbră al resursei R_3 este $y_3^* = 2$, adică R_3 este tot deficitară, dar cota ei de influenţă asupra venitului este mai mică decît cea pe care o are resursa R_1.

Astfel, am determinat care este sensul economuic şi interpretarea fiecărei variabile de compensare x_5, x_6, x_7 a problemei primale, cât şi ale estimaţiilor duale corespunzătoare y_1, y_2, y_3 (care sunt variabile de decizie în problema duală).

2.5.2 Costuri reduse

În continuare vom examina a doua grupă de perechi de variabile

$$\begin{array}{cccc} x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^* \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4^* & y_5^* & y_6^* & y_7^*. \end{array} \tag{2.21}$$

Aici x_1, x_2, x_3 şi x_4 constitue cantităţile de articole de fiecare tip planificate pentru fabricare, iar y_4, y_5, y_6 şi y_7 – estimaţiile duale respective ale acestor cantităţi. Din soluţia optimă prezentată mai sus urmează că întreprinderea va obţine un venit maximal în valoare de 11220 u.m., dacă nu va produce articole de tipul A_1, ($x_1 = 0$) şi A_2, ($x_2 = 0$), dar va produce doar articole de tipul A_3 în cantitate de 62 unităţi ($x_3^* = 62$) şi articole de tipul A_4 în cantitate de 42 unităţi ($x_4^* = 42$). Pentru a stabili care este cauza că planul optim de producţie "nu recomandă" fabricarea articolelor de tipul A_1 şi A_2, adică variabilele de decizie x_1 şi x_2 ale problemei primale nu sunt componente bazice în soluţia optimă, vom apela la estimaţiile duale corespunzătoare din soluţia Y^*. Aici variabilei primale x_1^* îi corespunde estimaţia duală y_4^*, iar lui x_2^* îi corespunde y_5^*. Din prima ecuaţie a sistemului canonic de restricţii (2.19) al problemei duale putem scrie:

$$y_4^* = (2,5y_1^* + 4y_2^* + 8y_3^*) - 80 \tag{2.22}$$

Aici expresia din paranteze constitue cheltuielile pentru cantităţile de resurse consumate la fabricarea unei unităţi de articol A_1 (cheltuieli calculate prin preţurile umbră ale resurselor), iar 80 este mărimea venitului care se va obţine dacă această unitate s-ar vinde. Înlocuind în (2.22) $y_1^* = 36, y_2^* = 0, y_3^* = 2$ obţinem

$$y_4^* = (2,5 \cdot 36 + 4 \cdot 0 + 8 \cdot 2) - 80 = 106 - 80 = 26. \tag{2.23}$$

Din (2.23) constatăm, că cheltuilile pentru fabricarea unei unităţi de articol A_1 sunt egale cu 106 u.m., iar venitul de la vînzarea acestei unităţi este 80 u.m., adică cheltuilile de producţie depăşesc venitul cu 26 u.m. Astfel venim la concluzia că estimaţia duală y_4^* constitue diferenţa dintre

costul de producţie al unei unităţi de articol şi venitul pe care îl aduce această unitate. Este evident, că dacă cheltuielile depăşesc venitul, adică dacă estimaţia duală $y_4^* > 0$, atunci fabricarea acestui tip de articole nu este convenabilă pentru întreprindere. Prin urmare, planul optim de producţie X^* "nu acceptă" fabricarea articolelor de tipul A_1 ($x_1^* = 0$) fiindcă producerea lor nu este convenabilă; acest lucru se denotă prin faptul că estimaţia duală corespunzătoare variabilei primale x_1 (a se vedea schema (2.21)) este strict pozitivă $y_4^* > 0$. Mai mult ca atît, valoarea lui y_4^* arată cât ar pierde întrprinderea din venitul său optim, dacă ar fi obligată să producă totuşi o (una) unitate de articol A_1, adică acest venit ar scădea cu 26 u.m. Prin urmare, fabricarea articolelor de tipul A_1 ar deveni rentabilă dacă preţul de vânzare a acesteia ($c_1 = 80$) s-ar majora cu o valoare $\Delta c_1 \geq 26$. În mod analog se explică şi faptul că planul optim nu prevede nici fabricarea articolelor de tipul A_2. La fabricarea unei unităţi de acest tip de articole cheltuielile ar depăşi venitul cu 34 u.m. ($y_5^* = 34$).

Deci, în cazul în care estimaţia duală a căruiva tip de articol planificat pentru fabricare este strict pozitivă, acest articol este nerentabil pentru întreprindere şi nu se include în planul optim de producţie.

În continuare examinăm estimaţiile duale y_6 şi y_7. Conform schemei (2.21) acestea corespund variabilelor primale x_3 şi x_4 respectiv. Din ecuaţia a treia a sistemului (2.19) avem

$$y_6 = (3y_1 + 5y_2 + 6y_3) - 120$$

şi pentru soluţia optimă Y^*

$$\begin{aligned} y_6^* &= (3y_1^* + 5y_2^* + 6y_3^*) - 120 = \\ &= (3 \cdot 36 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 2) - 120 = 120 - 120 = 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Aici, ca şi în primele două ecuaţii ale sistemului (2.19) expresia din paranteze constitue valoarea cheltuielilor pentru resursele consumate la fabricarea unei unităţi de articol A_3, iar 120 este venitul de la vînzarea acestei unităţi. Prin urmare, y_6^* este diferenţa dintre cheltuielile de productie şi venit şi, deoarece $y_6^* = 0$, rezultă că venitul acoperă cheltuielile de producţie şi astfel fabricarea articolelor de tipul A_3 este convenabilă pentru întreprindere, fapt ce se cofirmă şi de planul optim de producţie X^*, unde $x_3^* = 62$. Deorece şi $y_7^* = 0$ putem afirma că şi producerea articolelor de tipul A_4 deasemenea este rentabilă; aceasta se confirmă şi de planul optim X^* unde avem $x_4^* = 42$.

Adică, dacă estimaţia duală a unui tip de articol este egală cu zero, atunci fabricarea acestui tip de articole este rentabilă pentru întreprindere.

Prin urmare, estimaţiile duale de compensare, în varianta lor optimă, arată cu ce valoare cheltuielile de producţie pentru o unitate de articole depăşesc venitul de la comercializarea acestei unităţi. Aceste estimaţii poartă denumirea de *costuri reduse* ale produselor planificate pentru fabricare.

Rezultatele obţinute din analiza soluţiei optime a problemei formulate mai sus împreună cu soluţia optimă a problemei duale respective ne conduce la următoarele concluzii

Pentru o problemă de producţie (de utilizare optimă a resurselor) în care întreprinderea are toată libertatea de a lua decizii în activitatea sa, avem (tabelul 2.2):

1. Valorile optime ale variabilelor de decizie în problema primală reprezintă cantităţile de produse care trebue fabricate pentru a obţine venit maximal;

2. Valorile optime ale variabilelor de compensare din problema primală constitue cantităţile de resurse rămase neutilizate după realizarea planului optim de producţie;

3. Valorile optime ale variabilelor de decizie din problema duală reprezintă estimaţiile resurselor; deci *preţurile umbră* ale resurselor disponibile. Prin intermediul lor se măsoară impactul fiecărei restricţii (adică a fiecărei resurse) la formarea venitului maximal. Valoarea preţului umbră y_i^*, $i = \overline{1;m}$ constitue mărimea cu care se va modifica valoarea venitului maximal dacă cantitatea resursei R_i se va schimba cu o unitate.

4. Valorile optime ale variabilelor de compensare din problema duală (costurile reduse ale produselor) reprezintă estimaţiile duale ale articolelor pe care întreprinderea ar putea să le producă. Valorilor nule $y_{m+j}^* = 0$, $j = \overline{1;n}$ le corespud produse-componente ale planului optim, adică cele convenabile pentru a fi fabricate (sau sunt impuse pentru a fi fabricate). Valorilor $y_{m+j}^* > 0$, $j = \overline{1;n}$ le corespund produsele care nu sunt componente ale planului optim, fiind nerentabile pentru întreprindere. Numeric aceste estimaţii constitue pierderile pe care întreprinderea ar trebui să le suporte dacă ar include produsele respective în planul de producţie.

Astfel, pentru problema propusă sunt determinate valorile numerice ale tuturor necunoscutelor (primale şi duale, cât şi sensul economic al acestora.

Exemplul 2.4. O întreprindere produce trei tipuri de stofe S_1, S_2 şi S_3, normele de producţie pe schimb fiind: S_1 – nu mai puţin de 90m, S_2 – nu mai puţin de 70m şi S_3 – nu mai puţin de 60m. Resursele disponibile pe schimb constitue 780 unităţi de capacităţi de producţie (utilage), 850 unităţi de materii prime şi 790 unităţi energie electrică. Stofa S_1 se vinde cu 80 u.m. pe metru, S_2 – cu 70 u.m., iar S_3 – cu 60 u.m. pe metru. Se cere adoptarea unei decizii cu privire la cantitatea de stofă de fiecare tip fabricată de întreprindere, astfel încît venitul total obţinut de la vănzarea stofelor să fie maxumal. Informaţia disponibilă pentru rezolvarea problemei se sintetizează în tabelul 2.5.

Tabelul 2.5

Tipul de resurse	Consumul de resurse pentru fabricarea unui metru de stofă			Cantităţi disponibile de resurse
	S_1	S_2	S_3	
Utilaje	2	3	4	780
Materii prime	1	4	5	850
Energie electrică	3	4	2	790
Preţuri de vânzare	80	70	60	
Planul de producţie	x_1	x_2	x_3	

Rezolvare. Formăm modelul matematic al problemei, notând cantităţile de stofă S_1, S_2, S_3 prin x_1, x_2, x_3 respectiv. Se obţine:

$$F(X) = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 780, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 850, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 790. \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 90, \\ x_2 \geq 70, \\ x_3 \geq 60. \end{cases} \tag{2.26}$$

unde (2.25) şi (2.26) reprezintă, respectiv restricţiile impuse de resursele disponibile şi restricţiile impuse de normele zilnice de producţie. Acest model, fiind adus la forma canonică devine:

$$F(X) = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 780, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 = 850, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 790, \end{cases} \tag{2.27}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_7 = 90, \\ x_2 - x_8 = 70, \\ x_3 - x_9 = 60. \end{cases} \tag{2.28}$$

Acum problema conţine nouă necunoscute, care după sensul lor economic constitue trei grupe, si anume: x_1, x_2, x_3 exprimă cantităţi de producţie (de stofă), x_4, x_5, x_6 – necunoscute de compensare care se referă doar la cantităţile disponibile de resurse, iar x_7, x_8, x_9 exprimă diferenţele dintre cantităţile de stofă care se vor fabrica conform planului optim şi cantităţile respective de stofă prevăzute în normele zilnice de producţie.

Construim problema duală conform regulelor stabilite mai sus şi avem

$$S(Y) = 780y_1 + 850y_2 + 790y_3 - 90y_4 - 70y_5 - 60y_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 \geq 80, \\ 3y_1 + 4y_2 + 4y_3 - y_5 \geq 70, \quad y_i \geq 0, \ i = \overline{1,6}. \\ 4y_1 + 5y_2 + 2y_3 - y_6 \geq 60, \end{cases} \tag{2.29}$$

Scriem forma canonică pentru acest model, aplicând variabilele de compensare y_7, y_8, y_9. Obţinem

$$S(Y) = 780y_1 + 850y_2 + 790y_3 - 90y_4 - 70y_5 - 60y_6 + 0y_7 + 0y_8 + 0y_9 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 - y_7 = 80, \\ 3y_1 + 4y_2 + 4y_3 - y_5 - y_8 = 70, \quad y_i \geq 0, \ i = \overline{1,9}. \\ 4y_1 + 5y_2 + 2y_3 - y_6 - y_9 = 60, \end{cases} \tag{2.30}$$

Aplicăm metoda simplex la rezolvarea problemei primale, prezentînd aici doar primul şi ultimul tabele simplex.

Tabelul 2.6 Tabelul-simplex iniţial

			80	70	60	0	0	0	0	0	0	-M	-M	-M
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_4	0	780	2	3	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	850	1	4	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_6	0	790	3	4	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{10}	-M	90	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	0
x_{11}	-M	70	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0
x_{12}	-M	60	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	1
Δ_j		-220M	-M-80	-M-70	-M-60	0	0	0	M	M	M	0	0	0

Tabelul 2.7 Tabelul-simplex final

			80	70	60	0	0	0	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_9	0	26,25	0	0	0	0,375	0	-0,25	0	0,125	1
x_5	0	26,25	0	0	0	-1,625	1	0,75	0	2,125	0
x_7	0	22,5	0	0	0	-0,25	0	0,5	1	1,25	0
x_1	80	112,5	1	0	0	-0,25	0	0,5	0	1,25	0
x_2	70	70,0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0
x_3	60	86,25	0	0	1	0,375	0	-0,25	0	0,125	0
Δ_j		19075	0	0	0	2,5	0	25	0	37,5	0
			y_7^*	y_8^*	y_9^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*	y_4^*	y_5^*	y_6^*

Din tabelul simplex final se identifică soluţiile optime ale cuplului de probleme: pentru problema primală

$$X^* = (x_1^* = 112,5;\ x_2^* = 70;\ x_3^* = 86,25;\ x_4^* = 0;\ x_5^* = 26,25;\ x_6^* = 0;\ x_7^* = 22,5;\ x_8^* = 0;\ x_9^* = 26,25) \qquad \max F(X) = F(X^*) = 19075.$$

si pentru problema duală

$$Y^* = (y_1^* = 2,5;\ y_2^* = 0;\ y_3^* = 25;\ y_4^* = 0;\ y_5^* = 37,5;\ y_6^* = 0;\ y_7^* = 0;\ y_8^* = 0;\ y_9^* = 0) \qquad \min S(Y) = S(Y^*) = 19075.$$

Ne vom opri acum la aspectul economic al rezultatelor obţinute, ţinând cont de faptul că variabilele celor două probleme (primală şi duală) sunt "legate" în perechi prin relaţiile stabilite în teoria dualităţii. De aceea este util să examinăm cupluri (perechi) de variabile

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1^* & x_2^* & x_3^* & x_4^* & x_5^* & x_6^* & x_7^* & x_8^* & x_9^* \\ 112,5 & 70 & 86,25 & 0 & 26,25 & 0 & 22,5 & 0 & 26,25 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_7^* & y_8^* & y_9^* & y_1^* & y_2^* & y_3^* & y_4^* & y_5^* & y_6^* \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 & 0 & 25 & 0 & 37,5 & 0. \end{array} \tag{2.31}$$

Modelele canonice ale problemelor conţin cîte nouă variabile, acestea având "conţinut" (interpretare) economic distinct. Vom diviza variabilele primalei (şi respectiv ale dualei) în trei grupe:

1. variabilele primale de decizie x_1, x_2, x_3 care se referă la planul de producţie. Acestora le corespund variabilele duale de compensare y_7, y_8, y_9, care exprimă costurile reduse ale produselor-componente ale planului optim;

2. variabilele primale de compensare x_4, x_5, x_6 care se referă la resursele disponibile. Lor le corespund variabilele duale de decizie y_1, y_2, y_3 care constituie estimaţii duale pentru resursele disponibile (preţurile umbră ale acestora);

3. variabilele primale de compensare x_7, x_8, x_9 care se referă la diferenţa dintre planul optim de producţie şi normele de producţie date în enunţul problemei. Lor le corespund variabilele duale y_4, y_5, y_6, acestea fiind estimaţiile duale ale tipurilor respective de stofe.

Conform planului optim, pentru întreprindere este convenabil să producă 112,5 metri de stofă de tipul întîi ($x_1^* = 112,5$), 70 metri de stofă de tipul doi ($x_2^* = 70$), şi 86,25 metri de stofă de tipul al treilea ($x_3^* = 86,25$). Dacă întreprinderea va accepta acest plan, atunci va obţine venit maximal în valoare de 19075 unităţi monetare. Aici trebue menţionat faptul că, urmînd planul optim, întreprinderea va produce pe zi stofe de tipul S_1 şi S_3 în cantităţi mai mari decît normele zilnice indicate în enunţul problemei, şi anume:

$x_1^* = 112,5 > 90$ (sau acelaşi lucru $x_7^* = 22,5$) şi

$x_3^* = 86,25 > 60$ (sau $x_9^* = 26,25$).

Cît priveşte stofa de tipul S_2, în conformitate cu planul optim întreprinderea trebue să producă cantitatea indicată în norme, adică 70 metri pe schimb. Estimaţiile duale ale mărimilor x_1^*, x_2^*, x_3^* (componente ale planului optim) sunt prezentate de variabilele duale de compensare y_7^*, y_8^*, y_9^*. Ele constitue costurile reduse ale articolelor indicate în planul optim de producţie şi au valori zero (se confirmă ţinînd cont de (2.30)).

Grupa a doua constă din perechile

$$\begin{array}{ccc} x_4^* & x_5^* & x_6^* \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1^* & y_2^* & y_3^*, \end{array}$$

unde variabilele primale de compensare x_4, x_5, x_6 în varianta lor optimă exprimă diferenţele respective dintre cantităţile disponibile de resurse şi cantăţile de resurse care se vor consuma pentru realizarea planului optim. Într-adevăr, din (2.27) putem scrie

$$\begin{cases} x_4^* = 780 - (2x_1^* + 3x_2^* + 4x_3^*), \\ x_5^* = 850 - (x_1^* + 4x_2^* + 5x_3^*), \\ x_6^* = 790 - (3x_1^* + 4x_2^* + 2x_3^*). \end{cases}$$

Conform planului optim X^* avem $x_4^* = 0$; $x_5^* = 26,25$; $x_6^* = 0$. Prin urmare, după îndeplinirea planului optim, resursele "utilage" şi "energie

electrică" se vor cosima în totalitate, iar din cantitatea disponibilă de "materii prime" (adică 850 unităţi fizice) va rămîne un rest de 26,25 u.f. ($x_5^* = 26,25$). Mărimile y_1, y_2, y_3 sunt variabile duale de decizie. Valorile optime ale acestora constitue preţurile umbră ale resurselor disponibile. Ele arată care este contribuţia fiecărei resurse la formarea profitului maximal. Din Y^* citim: $y_1^* = 2,5$; $y_2^* = 0$; $y_3^* = 25$. De aici conchidem că resursele "utilage" şi "energie electrică" au estimaţii duale strict pozitive şi, prin urmare, sunt deficitare, adică variaţia cantităţilor disponibile va influenţa valoarea profitului maximal; în special variaţia cu o unitate a resursei "utilage" va schimba profitul optim cu 2,5 u.m., iar variaţia resursei "energie electrică" cu o unitate va schimba profitul cu 25 u.m. Resursa "materii prime" este una nedeficitară fiindcă preţul umbră al acesteia este egal cu zero ($y_2^* = 0$). Majorarea cantităţii ei disponibile (în anumite limite) nu va avea nici un impact asupra profitului optim.

Grupa a treia de variabile conţine perechile

$$\begin{array}{ccc} x_7^* & x_8^* & x_9^* \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4^* & y_5^* & y_6^*. \end{array}$$

Aici x_7^*, x_8^*, x_9^* sunt tot mărimi de compensare; ele exprimă diferenţa dintre componentele planului optim de producţie şi normele zilnice de producţie. Într-adevăr, ţinând cont de relaţiile (2.28) obţinem $x_7^* = 22,5$, $x_8^* = 0$, $x_9^* = 26,25$. Deci, pentru întreprindere este convenabil să producă supra normă stofa S_1 cu 22,5 metri ţi S_3 cu 26,25 metri; iar stofa S_2 se va produce doar în cantitatea minimală stabilită de norma zilnică, adică 70 metri. Prin urmare, volumul producţiei convenabile nu se determină de normele iniţiale, ci doar de cantităţile limitate de resurse, adică stofele S_1 şi S_3 se produc atât cât permit cantităţile disponibile de resurse deficitare ("utilage" şi "energie electrică"). Stofele rentabile S_1 şi S_3 au estimaţii duale nule ($y_4^* = 0, y_6^* = 0$). Acestea arată că cheltuielile de producţie (estimate prin preţurile umbră numite şi preţuri interne) se compensează în totalitate de preţurile pieţei (preţuri externe) cu care se vînd stofele respective. Într-adevăr, din (2.29) avem:

$$y_4^* = (2y_1^* + y_2^* + 3y_3^*) - 80 = (2 \cdot 2,5 + 0 + 3 \cdot 25) - 80 = 0,$$
$$y_6^* = (4y_1^* + 5y_2^* + 2y_3^*) - 60 = (4 \cdot 2,5 + 0 + 2 \cdot 25)\, 60 = 0.$$

Deci estimaţii duale nule se obţin nu numai pentru resursele deficitare, dar şi pentru produsele rentabile. Producerea srofei de tipul S_2 nu este

rentabilă, dar ea este totuşi parte componentă a planului optimal de producţie doar datorită condiţiilor problemei ($x_2 \geq 70$). Estimaţia duală a producţiei nerentabile S_2 este strict pozitivă ($y_5^* = 37,5$). Din ecaţia a doua a sistemului (2.29) pentru valorile optime ale necunoscutelor avem:

$$y_5^* = (3y_1^* + 4y_2^* + 4y_3^*) - 70 =$$
$$= (3 \cdot 2,5 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 25) - 70 = 107,5 - 70 = 37,5.$$

Valoarea expresiei din paranteze constitue cheltuielile de producţie pentru stofa S_2, iar 70 este venitul obţinut de la vînzarea acesteia, adică cheltuielile depăşesc venitul cu 37,5 unităţi monetare. Prin urmatre fabricarea acestui tip de stofă nu este convenabilă pentru întreprindere, dar ea totuşi se produce fiindcă este impusă de condiţiile problemei (a se vedea (2.26), restricţia a doua). Mai mult, la fabricarea acestui tip nerentabil de stofă se consumă şi o parte din resursele deficitare, care puteau fi utilizate la producerea stofelor rentabile, dacă nu ar fi cerinţa $x_2 \geq 70$, şi aceasta ar majora valoarea venitului întreprinderii. În cazul problemei date la fabricarea fiecărui metru de stofă de tipul S_2 întreprinderea pierde 37,5 unităţi monetare. #

În concluzie menţionăm faptul că valorile optime ale estimaţiilor duale sunt egale cu zero pentru componentele planului optim (costurile reduse ale produselor prevăzute de planul optim), pentru resursele nedeficitare (preţuri umbră) cît şi pentru produsele rentabile. Celelalte estimaţii duale au valori optime strict pozitive.

2.6 Analiza senzitivităţii în programarea liniară

Problemele de programare liniară conţin o serie de mărimi considerate a fi constante. Însă acest lucru are loc doar în momentul în care se elaborează modelul respectiv.

În situaţii reale o problemă de programare liniară cu caracter practic nu poate fi considerată rezolvată în totalitate dacă s-a determinat doar soluţia optimă fiindcă cel puţin o parte din parametrii problemei nu sunt cu siguranţă mărimi cu valori stabile (preţurile pieţei de desfacere, cantităţile de resurse etc.). Variaţiile valorilor parametrilor pot schimba soluţia optimă calculată. Deaceea, pentru a determina care ar putea fi impactul variaţiei parametrilor asupra soluţiei optime a problemei se formulează şi se rezolvă o problemă specială care poartă denumirea "analiza senzitivităţii" (sau analiza sensibilităţii) în programarea liniară. Astfel,

după ce se determină soluţia optimă a problemei, trebue să urmeze o analiză cât se poate de detaliată a rezultatelor primite. Teoria dualităţii oferă o posibilitate în acest sens.

Scopul unei asemenea analize constă în determinarea unor limite de variaţie pentru parametrii problemei astfel încît, să se menţină structura optimă a soluţiei obţinute, adică baza optimă să rămînă aceeaşi. În aceste intervale de variaţie ale parametrilor problemei structura soluţiei optime este stabilă în raport cu anumite schimbări ale situaţiei la întreprindere. Prin urmare sortimentul (sau nomenclatura) producţiei nu trebue schimbat, păstrîdu-se astfel regimul de lucru al întreprinderii. Stabilitatea regimului de activitate reprezintă un factor important fiindcă instabilitatea poate provoca schimbarea sortimentului producţiei, iar aceasta conduce la cheltuieli suplimentare (schimbarea utilajului, pregătirea personalului etc.). Prin urmare, managerul întreprinderii trebuie să dispună de informaţii necesare cu privire la stabilitatea planului de activitate

Mai frecvent apare necesitatea efectuării analizei senzitivităţii pentru parametrii b_i, $i = \overline{1;m}$ (termenii liberi din sistemul de restricţii) şi c_j, $j = \overline{1;n}$ (coeficienţii necunoscutelor funcţiei obiectiv).

2.6.1 Stabilitatea soluţiilor optime în raport cu variaţia termenilor liberi ai sistemului de restricţii

Vom determina intervalele de stabilitate a soluţiei optime în raport cu variaţia parametrilor b_i (apoi şi c_j), utilizînd următorul exemplu

Problemă. O firmă poate produce patru tipuri de articole A_1, A_2, A_3 şi A_4, avînd la dipoziţie trei resurse – forţe de muncă (R_1), capacităţi de producţie (R_2), şi materii prime (R_3). În tabel sunt date cantităţile disponibile de resurse pentru o lună de activitate, consumurile specifice pentru fiecare articol cât şi preţurile de vînzare pe piaţă ale acestora.

Tabelul 2.8

Tipul de resurse	Consumul de resurse pentru fabricarea unei unităţi de articol				Cantităţi disponibile de resurse
	A_1	A_2	A_3	A_4	
R_1	3	2,5	2	1,5	120
R_2	5	10	3	6	240
R_3	4	9	4	5	310
Venitul/unitate de articol	140	50	95	105	
Planul	x_1	x_2	x_3	x_4	

Se cere elaborarea unui plan de producţie care să asigure firmei un venit lunar maximal. Notînd cu x_1, x_2, x_3 şi x_4 cantităţile în care vor fi fabricate articolelele respective, obţinem următorul model matematic:

$$F(X) = 140x_1 + 50x_2 + 95x_3 + 105x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2,5x_2 + 2x_3 + 1,5x_4 \le 120, \\ 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 6x_4 \le 240, \\ 4x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 310, \end{cases} \tag{2.32}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Aducem problema (2.32) la forma canonică prin întroducerea variabilelor de compensare x_5, x_6, x_7

$$F(X) = 140x_1 + 50x_2 + 95x_3 + 105x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2,5x_2 + 2x_3 + 1,5x_4 + x_5 = 120, \\ 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 6x_4 + x_6 = 240, \\ 4x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_7 = 310, \end{cases} \tag{2.33}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Aplicăm algoritmul simplex şi prezentăm tabelul iniţial şi tabelul final al rezolvării T1:

Tabelul 2.9 Tabelul-simplex iniţial

			140	50	95	105	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	0	120	3	5/2	2	3/2	1	0	0
x_6	0	240	5	10	3	6	0	1	0
x_7	0	310	4	9	4	5	0	0	1
Δ_j		0	140	50	95	105	0	0	0

Tabelul 2.10 Tabelul simplex final T1

			140	50	95	105	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	95	48	7/5	0	1	0	4/5	-1/5	0
x_4	105	16	2/15	5/3	0	1	-2/5	4/15	0
x_7	0	38	-34/15	2/3	0	0	-6/5	-8/15	1
Δ_j		6240	7	125	0	0	34	9	0
			y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

Din tabelul-simplex final identificăm următoarele informatii:

1. Soluţia optimă a problemei primale este

$$X^* = (x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 48,\ x_4^* = 16,\ x_5^* = 0,$$
$$x_6^* = 0,\ x_7^* = 38) \quad \max F(X) = F(X^*) = 6240.$$

Soluţia optimă a problemei duale este

$$Y^* = (y_1^* = 34,\ y_2^* = 9,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0,\ y_5^* = 7,$$
$$y_6^* = 125,\ y_7^* = 0) \quad \min S(Y) = S(Y^*) = 6240.$$

2. Venitul maxim pe care îl poate obţine firma este de 6240 unităţi monetare şi aceasta este limita superioară a posibilităţilor firmei în condiţiile date. Cantitatea obţinută trebue considerată doar ca una de referinţă către care trebue să tindă firma în activitatea sa. În realitate venitul va fi mai mic fiindcă pe parcursul realizării planului optim apar diverse probleme în legătură cu procurarea resurselor, cu vânzările producţiei pe piaţă etc. Totodată trebue să se ţină cont şi de faptul că marja de manevră a întreprinderii este limitată nu numai de restricţiile indicate în problemă, dar şi de alţi factori din care şi necontrolabili.

3. În condiţiile problemei examinate combinaţia optimă de produse se compune din:

$x_1^* = 0$ unităţi de articole de tip A_1,

$x_2^* = 0$ unităţi de articole de tip A_2,

$x_3^* = 48$ unităţi de articole de tip A_3 şi

$x_4^* = 16$ unităţi de articole de tip A_4.

Mai sus s-a stabilit că pentru întreprindere sunt rentabile doar produsele, estimaţiile duale ale cărora sunt egale cu zero, aici avem $y_6^* = 0$ şi $y_7^* = 0$. (Produsele nerentabile, dar impuse pentru fabricare deasemenea au estimaţii nule. În problema dată asemenea articole nu sunt, întreprinderea este liberă de orice obligaţiuni.) Articolele de tip A_1 şi A_2 sunt nerentabile; acestea au estimaţii duale strict pozitive $y_4^* = 7$ şi respectiv $y_5^* = 125$. Dacă s-ar fabrica articolele A_1 şi A_2, atunci venitul firmei ar scădea cu cîte 7 u.m. pentru fiecare unitate de articol de tip A_1 şi cu cîte 125 u.m. pentru fiecare unitate de articol de tip A_2.

4. Conform planului optim, cantităţile resurselor R_1 şi R_2 se vor consuma în totalitate fiincă $x_5^* = 0$ şi $x_6^* = 0$, adică acestea sunt resurse deficitare. Din resursa R_3 rămîn nefolosite 38 de unităţi ($x_7^* = 38$), deci ea este nedeficitară. Prin urmare, cantitatea disponibilă a resursei R_3 nu împiedică creşterea în continuare a venitului optimal; creşterea lui este limitată de cantităţile disponibile ale resurselor R_1 şi R_2. Apare o întrebare firească – cum s-ar putea utiliza cantitatea rămasă din resursa R_3? Analiza modului de utilizare poate conduce în mai multe direcţii. Firma ar putea întrebuinţa această rămăşiţă în alte activităţi de producţie, ar putea să o vîndă altei firme etc.

Însă o altă variantă ar fi suplimentarea cantităţilor disponibile ale resurselor deficitare R_1 şi R_2 în scopul utilizării mai bune a resursei nedeficitare R_3, dar cu condiţia că se va păstra structura sortimentală de producţie determinată de planul optim. Ne vom opri în continuare la acest scenariu, folosind teoria dualităţii.

În condiţiile problemei examinate resursele disponibile au următoarele preţuri umbră (estimaţii duale optime) $y_1^* = 34$, $y_2^* = 9$, $y_3^* = 0$, care arată cu ce valoare ar varia venitul optim în cazul în care cantitatea disponibilă a resursei respective s-ar schimbă cu o (una) unitate.
Pentru analiză vomi distinge trei cazuri:

a. se schimbă cantitatea disponibilă a unei resurse deficitare, iar toţi ceilalţi parametri ai problemei rămîn neschimbaţi.

b. se schimbă cantitatea disponibilă a unei resurse nedeficitare şi toţi ceilalţi parametri ai problemei rămîn neschimbaţi.

c. variază cantităţile disponibile a mai multor sau a tuturor resurselor.

Cazul a. Conform soluţiei optime, cantităţile resurselor R_1 şi R_2 se consumă în totalitate pentru a realiza planul optim (necunoscutele de compensare x_5 şi x_6 care reprezintă aceste resurse în modelul matematic al problemei sunt egale cu zero, iar estimaţiile duale respective y_1 şi y_2 sunt strict pozitive). Admitem că se schimbă cantitatea iniţială a uneia din ele, bunăoară a resursei R_2, adică în loc de $b_2 = 240$ vom avea $b_2 + \delta b_2 = 240 + \delta b_2$. Restul parametrilor rămân neschimbaţi. Această modificare conduce la o problemă nouă de programare liniară, care diferă de precedenta doar prin termenul liber al restricţiei a doua. Rezolvînd problema modificată prin metoda simplex venim la următorul tabel simplex final T2:

Tabelul 2.11 Tabelul simplex final T2

			140	50	95	105	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	95	48-1/5 δb_2	7/5	0	1	0	4/5	-1/5	0
x_4	105	16+4/15 δb_2	2/15	5/3	0	1	-2/5	4/15	0
x_7	0	38-8/15 δb_2	-34/15	2/3	0	0	-6/5	-8/15	1
Δ_j		6240+9 δb_2	7	125	0	0	34	9	0
			y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

Comparând T1 cu T2 observăm că T2 diferă de T1 doar prin elementele coloanei termenilor liberi (coloana b_i). În T2 aceste elemente sunt formate din elementele tabelului T1 la care se adaugă elementul respectiv din coloana lui x_6 înmulţit cu δb_2 (în modelul canonic primal anume x_6 reprezintă resursa a doua). Soluţia din tabelul T2 este admisibilă doar dacă se verifică criteriul de admisibilitate. În aceste condiţii în T2 avem soluţie optimă fiindcă toate elementele Δ_j sunt nenegative. Deci cerem:

$$\begin{cases} 48 - \dfrac{1}{5}\delta b_2 \geq 0, \\ 16 + \dfrac{4}{15}\delta b_2 \geq 0, \\ 38 - \dfrac{8}{15}\delta b_2 \geq 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

De aici $\delta b_2 \in [-60; 71,25]$, adică $\min \delta b_2 = -60$, iar $\max \delta b_2 = 71,25$. Pentru b_2 obţinem respectiv $\min b_2 = b_2 + \min \delta b_2 = 240 - 60 = 180$ şi $\max b_2 = b_2 + \max \delta b_2 = 240 + 71,25 = 311,25$, adică $b_2 \in [180; 311,25]$.

Astfel, conchidem că în cazul în care cantitatea resursei R_2 va lua orice valori pe domeniul (180; 311,25) componenţa planului optim de producţie (adică sortimentul producţiei) nu se va schimba; se vor schimba doar valorile componentelor soluţiei optime, cât şi valoarea venitului optim, care se va calcula prin relaţia $\max F(X) = 6240 + 9\,\delta b_2$.

Soluţia optimă a problemei duale va rămîne intactă (nu se va schimba nici componenţa acesteia şi nici valorile componentelor sale). Totodată de menţionat este faptul că dacă $b_2 \notin (180; 311,25)$, (ceea ce conduce la relaţia $\delta b_2 \notin [-60; 71,25]$), atunci se va schimba componenţa planului optim fiindcă cel puţin una din relaţiile sistemului (2.34) îşi va schimba sensul. Prin urmare, domeniul de stabilitate a planului optim în raport cu variaţia cantităţii resursei R_2 este (180; 311,25). În mod analog se de-

termină şi domeniile de stabilitate ale soluţiei optime în raport cu fiecare din celelalte resurse deficitare.

Cazul b. Variază cantitatea disponibilă a uneia din resursele nedeficitare. În problema rezolvată mai sus nedeficitară este doar resursa R_3 (preţul umbră al acesteia este $y_3^* = 0$). Cantitatea disponibilă nu se consumă în totalitate la realizarea planului optim. Variabila de compensare x_7^* arată că în planul optim 38 de unităţi din resursa R_3 rămîn neutilizate. Admitem cazul în care cantitatea disponibilă a acesteia $b_3 = 310$ variază cu δb_3 şi devine $b_3 + \delta b_3 = 310 + \delta b_3$. Ceilalţi parametri rămîn neschimbaţi. Obţinem astfel o nouă problemă care diferă de cea iniţială doar prin termenul liber al restrcţiei a treia. Rezolvăm problema nouă prin metoda simplex şi prezentăm tabelul simplex final T3 al rezolvării.

Tabelul 2.12 Tabelul simplex final T3

			140	50	95	105	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	95	48	7/5	0	1	0	4/5	-1/5	0
x_4	105	16	2/15	5/3	0	1	-2/5	4/15	0
x_7	0	$38+\delta b_3$	-34/15	2/3	0	0	-6/5	-8/15	1
Δ_j		6240	7	125	0	0	34	9	0
			y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

Soluţia din acest tabel va rămîne optimă doar dacă $38 + \delta b_3 \geq 0$. De aici $-38 \leq \delta b_3 < +\infty$; $\min \delta b_3 = -38$, $\max \delta b_3 = +\infty$. $\min b_3 = b_3 + \min \delta b_3 = 310 - 38 = 272$. $\max b_3 = b_3 + \max \delta b_3 = 310 + \infty = +\infty$. Asfel $b_3 \in (272; +\infty)$. Deci, pentru orice valoare a lui b_3 din domeniul $(272; +\infty)$ componenţa soluţiei optime rămîne stabilă.

Cazul c. Toţi termenii liberi din sistemul de restricţii obţin careva creşteri notate respectiv cu δb_1, δb_2, δb_3, iar ceilalţi parametri rămîn neschimbaţi. Astfel se formulează o nouă problemă, care diferă de cea iniţială doar prin termenii liberi ai sistemului de restricţii. Rezolvarea problemei noi conduce la următorul tabel simplex final T4.

Tabelul 2.13 Tabelul simplex final T4

			140	50	95	105	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	95	$48 + 4/5\,\delta b_1 - 1/5\,\delta b_2$	7/5	0	1	0	4/5	-1/5	0
x_4	105	$16 - 2/5\,\delta b_1 + 4/15\,\delta b_2$	2/15	5/3	0	1	-2/5	4/15	0
x_7	0	$38 - 6/5\,\delta b_1 - 8/15\,\delta b_2 + \delta b_3$	-34/15	2/3	0	0	-6/5	-8/15	1
Δ_j		$6240 + 34\,\delta b_1 + 9\,\delta b_2$	7	125	0	0	34	9	0
			y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

Linia estimaţiilor duale Δ_j nu conţine mărimi negative. Prin urmare, elementele coloanei b_i constituie soluţia optimă a problemei cu condiţia că aceste elemente satisfac condiţiile de admisibilitate, adică dacă mărimile δb_1, δb_2 şi δb_3 verifică sistemul

$$\begin{cases} 48 + \frac{4}{5}\delta b_1 - \frac{1}{5}\delta b_2 \geq 0, \\ 16 - \frac{2}{5}\delta b_1 + \frac{4}{15}\delta b_2 \geq 0, \\ 38 - \frac{6}{5}\delta b_1 - \frac{8}{15}\delta b_2 + \delta b_3 \geq 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

Referindu-ne la relaţiile obţinute în coloana b_i,menţionăm, că acestea se formează simplu dacă ţinem cont de faptul că vectorul soluţiei optime X^* poate fi calculat prin relaţia

$$X^* = A^{-1} \cdot b, \tag{2.36}$$

unde A este matricea coeficienţilor necunoscutelor bazei ultimului tabel simplex (T4), coeficienti luaţi din sistemul de restricţii al problemei, iar b este vectorul termenilor liberi ai acestui sistem. În problema rezolvată variabilele bazei ultimului tabel simplex (adică variabilele soluţiei optime) sunt x_3, x_4 şi x_7. În sistemul de restricţii coeficienţii lor formează matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea inversă A^{-1} este prezentă în ultimul tabel simplex T4. Elementele ei se află în coloanele variabilelor primale de compensare. Adică

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{15} & 0 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{8}{15} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ultimul tabel simplex T4 se referă la problema modificată în care vectorul

termenilor liberi este

$$b + \delta b = \begin{pmatrix} b_1 + \delta b_1 \\ b_2 + \delta b_2 \\ b_3 + \delta b_3 \end{pmatrix}.$$

Aplicăm relaţia (2.36) înlocuind în ea vectorul $b + \delta b$. Obţinem:

$$X^*_{mod} = A^{-1} \cdot (b + \delta b) = A^{-1} \cdot b + A^{-1} \cdot \delta b = X^* + A^{-1} \cdot \delta b =$$

$$= \begin{pmatrix} 48 \\ 16 \\ 38 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{15} & 0 \\ -\frac{6}{5} & -\frac{8}{15} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta b_1 \\ \delta b_2 \\ \delta b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 48 + \frac{4}{5}\delta b_1 - \frac{1}{5}\delta b_2 \\ 16 - \frac{2}{5}\delta b_1 + \frac{4}{15}\delta b_2 \\ 38 - \frac{6}{5}\delta b_1 - \frac{8}{15}\delta b_2 + \delta b_3 \end{pmatrix}.$$

Sistemele de tip (2.35), de regulă, nu se utilizează pentru determinarea domeniului de stabilitate a planului optim fiindcă determinarea domeniului soluţiilor admisibile al acestui sistem constitue, de fapt, o nouă problemă. Dar totodată, dacă din careva considerente se cunosc apriori valorile mărimilor δb_1, δb_2 şi δb_3, atunci înlocuim aceste valori în (2.35) şi în cazul în care semnele respective ale inegalităţilor se confirmă, conchidem că componenţa planului optim rămîne neschimbată, iar în caz contrar planul optim va avea o altă componenţă.

Exemplul 2.5. Rămânem în cadrul problemei rezolvate mai sus şi admitem că în perioada următoare prima resursă va avea o cantitate mai mică cu 12 unităţi decît cea iniţială, resursa a doua va avea o cantitate mai mare cu 15 unităţi, iar a treia – mai mare cu 18 unităţi decît cea iniţială. Trebue stabilit dacă:

1. modificările cantităţilor resurselor cu mărimile date mai sus nu vor afecta componenţa planului optim şi

2. de estimat impactul separat al modificării fiecărei resurse, cît şi impactul integral al tuturor modificărilor asupra venitului întreprinderii.

Rezolvare. Din condiţiile problemei avem: $\delta b_1 = -12$, $\delta b_2 = 15$ şi $\delta b_3 = 18$. Substituim aceste valori în (2.35). Obţinem:

$$\begin{cases} 48 + \frac{4}{5} \cdot (-12) - \frac{1}{5} \cdot 15 = 48 - \frac{63}{5} = \frac{177}{5} > 0, \\ 16 - \frac{2}{5} \cdot (-12) + \frac{4}{15} \cdot 15 = 16 + \frac{44}{5} = \frac{124}{5} > 0, \\ 38 - \frac{6}{5} \cdot (-12) - \frac{8}{15} \cdot 15 + 18 = 56 + \frac{32}{5} = \frac{312}{5} > 0. \end{cases}$$

Mărimile $\delta b_1 = -12$, $\delta b_2 = 15$ şi $\delta b_3 = 18$ verifică relaţiile sistemului (2.35), adică componenţa planului optim rămîne intactă.

Estimaţia separată a impactului variaţiei cantităţii resursei R_i asupra venitului se măsoară utilizînd preţurile umbră ale resurselor şi se calculează prin relaţia

$$\Delta F_i^* = y_i^* \cdot \delta b_i, \tag{2.37}$$

unde ΔF_i^*, $i = \overline{1,m}$ este creşterea venitului optim cauzată de variaţia δb_i, $i = \overline{1,m}$ a cantităţii resursei R_i, $i = \overline{1,m}$. Astfel avem:

$$\begin{cases} \Delta F_1^* = y_1^* \cdot \delta b_1 = 34 \cdot (-12) = -408, \\ \Delta F_2^* = y_2^* \cdot \delta b_2 = 9 \cdot 15 = 135, \\ \Delta F_3^* = y_3^* \cdot \delta b_3 = 0 \cdot 18 = 0. \end{cases}$$

Estimaţia integrală a impactului variaţiei concomitente a cantităţilor tuturor resurselor va fi

$$\Delta F^* = \Delta F_1^* + \Delta F_2^* + \Delta F_3^* = -408 + 135 + 0 = -273. \qquad \#$$

2.6.2 Stabilitatea soluţiilor optime în raport cu coeficienţii funcţiei obiectiv

În problemele de programare liniară coeficienţii necunoscutelor din funcţia obiectiv reprezintă, de regulă, estimări ale costurilor (eforturilor)

sau ale profiturilor (efectelor) unitare şi se consideră mărimi constante. Însă în situaţii reale aceste estimaţii se schimbă. După cum s-a menţionat mai sus, este important să se cunoască intervalele de variaţie pentru coeficienţii funcţiei obiectiv $F(X)$ a problemei astfel încât structura soluţiei optime să se menţină, adică baza optimă a problemei să rămână aceeaşi. Păstrarea structurii bazei optime înseamnă păstrarea nomenclaturii producţiei, iar aceasta, la rândul său, înseamnă că poate fi păstrată tehnologia de producţie, personalul ocupat în producţie etc. Prin urmare, pot fi evitate un şir de cheltuieli. Intervalele de variaţie ale coeficienţilor funcţiei obiectiv, în care structura bazei optime a problemei rămîne neschimbată, sunt numite intervale de stabilitate a bazei optime în raport cu coeficienţii respectivi. În situaţii reale mai frecvent se examinează senzitivitatea cînd variază doar unul din coeficienţii funcţiei obiectiv, iar ceilalţi se consideră invariabili.

Vom efectua analiza senzitivă pentru coeficienţii funcţiei obiectiv, utilizînd problema rezolvată mai sus. Vom examina trei situaţii posibile:

a. se modifică valoarea coeficientului uneia din necunoscutele bazice ale soluţiei optime, iar toţi ceilalţi parametri ai problemei rămîn neschimbaţi;

b. se modifică valoarea coeficientului uneia din necunoscutele libere ale soluţiei, iar toţi ceilalţi parametri ai problemei rămîn neschimbaţi;

c. se modifică valorile cîtorva (sau tuturor) coeficienţi ai funcţiei obiectiv.

Cazul a. Problema iniţială de mai sus are în total patru variabile x_1, x_2, x_3 şi x_4, iar în soluţia ei optimă avem două variabile bazice x_3 şi x_4 şi două variabile libere x_1 şi x_2. Admitem că coeficientul uneia din variabilele bazice, bunăoară c_4, poate varia cu o mărime δc_4, adică în loc de $c_4 = 105$ vom avea $c_4' = c_4 + \delta c_4 = 105 + \delta c_4$. Toţi ceilalţi parametri ai problemei nu se schimbă. Trebue determinat intervalul de variaţie a lui c_4', în care baza soluţiei optime a problemei să rămînă neschimbată (adică să fie stabilă). Pentru a afla acest interval se modifică problema iniţială schimbînd în ea doar coeficientul lui x_4, adică în locul lui $c_4 = 105$ se pune $c_4' = c_4 + \delta c_4 = 105 + \delta c_4$. Problema modificată se rezolvă prin metoda simplex şi se obţine următorul tabel simplex final T5.

Observăm că elementele Δ_j din tabelul simplex final T5 al rezolvării problemei obţinute din problema iniţială schimbând în ea coeficientul c_4 al variabilei bazice x_4 prin $c_4 + \delta c_4$ pot fi prezentate prin relaţiile $\Delta_j^{**} =$

$\Delta_j^* + a'_{4j} \cdot \delta c_4$, unde termenii Δ_j^* sunt mărimi constante, a'_{4j} sunt elementele liniei lui x_4 din tabelul simplex 2.14 (T5), iar δc_4 – o mărime necunoscută.

Tabelul 2.14 Tabelul simplex final T5

			140	50	95	105+δc_4	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	95	48	7/5	0	1	0	4/5	-1/5	0
x_4	105+δc_4	16	2/15	5/3	0	1	-2/5	4/15	0
x_7	0	38	-34/15	2/3	0	0	-6/5	-8/15	1
Δ_j		6240+ 16 δc_4	7+ 2/15 δc_4	125+ 5/3 δc_4	0	0	34− 2/5 δc_4	9+ 4/15 δc_4	0 0
			y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

Dacă ţinem cont de daptul că în tabelul 2.14 toate mărimile $\Delta_j^* \geq 0$, putem calcula valoarea necunoscutei δc_4, astfel încât elementele Δ_j^{**} din tabelul 2.14 să verifice criteriul de optimalitate pentru soluţia din acest tabel, adică $\Delta_j^{**} \geq 0$. Se obţine sistemul:

$$\begin{cases} 7 + \dfrac{2}{15}\,\delta c_4 \geq 0, \\ 125 + \dfrac{5}{3}\,\delta c_4 \geq 0, \\ 34 - \dfrac{2}{5}\,\delta c_4 \geq 0, \\ 9 + \dfrac{4}{15}\,\delta c_4 \geq 0. \end{cases} \tag{2.38}$$

Din sistemul (2.38) avem $\delta c_4 \in \left[-\dfrac{135}{4}; 85\right]$, adică $\min \delta c_4 = -\dfrac{135}{4}$, iar $\max \delta c_4 = 85$. Prin urmare $\min c'_4 = c_4 + \min \delta c_4 = 105 - \dfrac{135}{4} = -\dfrac{285}{4} = 71,25$; $\max c'_4 = c_4 + \max \delta c_4 = 105 + 85 = 190$. Deci, dacă omitem extremele, avem

$$c'_4 \in (71,25;\ 190)\,. \tag{2.39}$$

Concluzie. Pentru orice valoare a coeficientului variabilei x_4 din funcţia obiectiv (adică c_4) din intervalul (2.39) componenţa soluţiei optime rămîne neschimbată. Mai mult ca atît, şi valorile componentelor

acestei soluţii deasemenea rămîn stabile. Observăm, că şi soluţia optimă a problemei duale îşi păstrează componenţa şi doar valorile componentelor ei sunt variabile (se calculează prin relaţiile)

$$y_1^* = 34 - \frac{2}{5}\delta c_4 \geq 0,\ y_2^* = 9 + \frac{4}{15}\delta c_4 \geq 0,\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 7 + \frac{2}{15}\delta c_4 \geq 0,$$

$$y_5^* = 125 + \frac{5}{3}\delta c_4 \geq 0,\ y_6^* = 0,\ y_7^* = 0.$$

Valoarea venitului optim variază şi se determină prin relaţia

$$F(X^*) = 6240 + 16\,\delta c_4.$$

Dacă vom schimba coeficientul unei alte variabile bazice x_l, adică în loc de c_l vom pune $c_l + \delta c_l$, atunci elementele liniei Δ_j din tabelul simplex final al rezolvării problemei modificate se vor calcula prin relaţia

$$\Delta_j^{**} = \Delta_j^* + a'_{lj} \cdot \delta c_l, \tag{2.40}$$

unde a'_{lj} sunt elementele liniei lui x_l din tabelul simplex final.

Este simplu de stabilit că pentru orice valoare $c'_4 \notin (71,25;\ 190)$ soluţia din tabelul 2.14 (T5) nu va fi optimă.

Cazul b. În soluţia optimă a problemei rezolvate avem două variabile libere, şi anume, x_1 şi x_2. Fie în funcţia obiectiv coeficientul uneia din ele, bunăoară a lui x_2, obţine o creştere, adică în loc de c_2 vom avea $c_2 + \delta c_2 = 50 + \delta c_2$, iar toţi ceilalţi parametri ai problemei rămîn neschimbaţi. Astfel se obţine o problemă nouă care, fiind rezolvată prin metoda simplex, conduce la tabelul simplex final T6.

Tabelul 2.15 Tabelul simplex final T6

			140	$50+\delta c_2$	95	105	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	95	48	7/5	0	1	0	4/5	-1/5	0
x_4	105	16	2/15	5/3	0	1	-2/5	4/15	0
x_7	0	38	-34/15	2/3	0	0	-6/5	-8/15	1
Δ_j		6240	7	$125 - \delta c_2$	0	0	34	9	0
			y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

Conform criteriului de optimalitate toate elementele liniei Δ_j trebue să fie nenegative. Prin urmare punem condiţia: $\Delta_2 = 125 - \delta c_2 \geq 0$. De aici $-\infty < \delta c_2 \leq 125$, adică $\min \delta c_2 = -\infty$, iar $\max \delta c_2 = 125$. Acum determinăm domeniul de variaţie a lui c_2: $\min c_2 = c_2 + \min \delta c_2 = 50 - \infty =$

$-\infty$, iar $\max c_2 = c_2 + \max \delta c_2 = 50 + 125 = 175$. Comparînd tabelul T6 cu T1 constatăm că pentru orice valoare a lui c_2 dun mulţimea $(-\infty; 175]$ toate componentele soluţiei optime rămîn neschimbate cu excepţia variabilei duale de compensare $y^*_{m+i} = y^*_{3+2} = y^*_5$ care variază pe domeniul $(-\infty; 175]$. Însă dacă ţinem cont de faptul că c_2 este preţul unei unităţi de producţie, este firesc să admitem că $c_2 \geq 0$. De aici avem următoarea concluzie: dacă în funcţia obiectiv variază coeficientul căreiva din variabilele libere x_l în limitele $[0; c_l + \Delta c_l]$, atunci în soluţia optimă se schimbă doar variabila duală respectivă, luînd valori conform relaţiei $y^{**}_{m+l} = y^*_{m+l} - \delta c_l$; toate celelalte componente ale soluţiei optime rămîn neschimbate.

Cazul c. Admitem acum că toţi coeficienţii funcţiei obiectiv obţin careva creşteri, iar restul parametrilor problemei rămîn neschimbati. Astfel se formează o problemă nouă cu funcţia obiectiv

$$F'(X) = (140 + \delta c_1)x_1 + (50 + \delta c_2)x_2 + (95 + \delta c_3)x_3 + (105 + \delta c_4)x_4.$$

Aplicăm metoda simplex şi ne oprim la tabelul simplex final T7.

Tabelul 2.16 Tabelul simplex final T7

			$140+$ δc_1	$50+$ δc_2	$95+$ δc_3	$105+$ δc_4	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_3	$95+\delta c_3$	48	7/5	0	1	0	4/5	-1/5	0
x_4	$105+\delta c_4$	16	2/15	5/3	0	1	-2/5	4/15	0
x_7	0	38	-34/15	2/3	0	0	-6/5	-8/15	1
Δ_j		$6240+$ $48\,\delta c_3+$ $16\,\delta c_4$	$7-\delta c_1+$ $7/5\,\delta c_3+$ $2/15\,\delta c_4$	$125-$ δc_2+ $5/3\,\delta c_4$	0	0	$34+$ $4/5\,\delta c_3-$ $2/5\,\delta c_4$	$9-$ $1/5\,\delta c_3+$ $4/15\,\delta c_4$	0
			y^*_4	y^*_5	y^*_6	y^*_7	y^*_1	y^*_2	y^*_3

Tabelul T7 coincide în totalitate cu T1 cu excepţia elementelor liniei Δ_j. În T7 aceste elemente sunt:

$$\Delta_1 = 7 - \delta c_1 + \frac{7}{5}\delta c_3 + \frac{2}{15}\delta c_4; \quad \Delta_2 = 125 - \delta c_2 + \frac{5}{3}\delta c_4; \quad \Delta_3 = 0;$$

$$\Delta_4 = 0; \quad \Delta_5 = 34 + \frac{4}{5}\delta c_3 - \frac{2}{5}\delta c_4; \quad \Delta_6 = 9 - \frac{1}{5}\delta c_3 + \frac{4}{15}\delta c_4; \quad \Delta_7 = 0$$

(fiindcă în tabelul 2.16 (T7) toate estimaţiile Δ_j au primii termeni mărimi constante nenegative).

Soluţia admisibilă de bază din T7 va fi soluţie optimă doar în cazul în care toate elementele Δ_j din acest tabel vor fi nenegative ($\Delta_j \geq 0$, $j =$

$\overline{1,7}$), adică

$$\begin{cases} 7 - \delta c_1 + \frac{7}{5}\delta c_3 + \frac{2}{15}\delta c_4 \geq 0, \\ 125 - \delta c_2 + \frac{5}{3}\delta c_4 \geq 0, \\ 34 + \frac{4}{5}\delta c_3 - \frac{2}{5}\delta c_4 \geq 0, \\ 9 - \frac{1}{5}\delta c_3 + \frac{4}{15}\delta c_4 \geq 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

3 Probleme de afectare (repartiţie)

3.1 Probleme de afectare. Algoritmul ungar

O problemă de repartiţie (de afectare) se formulează după cum urmează:
Există n proiecte (lucrări) care trebuie realizate. Se formează n echipe de specialişti care vor îndeplini aceste lucrări. Fiecare din echipe poate îndeplini oricare din lucrări, dar din diferite motive obiective sau subiective, timpul necesar pentru efectuarea unei lucrări diferă de la echipă la echipă. Notăm prin c_{ij} timpul în care echipa cu numărul i poate realiza proiectul cu numărul j. Trebuie repartizată fiecare echipă la cate un singur proiect astfel încât suma timpilor pentru îndeplinirea tuturor proiectelor să fie minimală.

Tabelul 3.1

Echipe	Lucrări						
	L_1	L_2	...	L_j	...	L_n	
E_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	1
E_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	1
...	...	...	...	...	...	...	...
E_i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}	1
...	...	...	...	...	...	...	...
E_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nj}	...	c_{nn}	1
	1	1	...	1	...	1	$n \setminus n$

Dacă notăm prin x_{ij} faptul că echipa cu numărul i va realiza lucrarea cu numărul j atunci putem scrie

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{în cazul in care eechipa } i \text{ este repartizată la lucrarea } j, \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

fiindcă o echipă poate fi repartizată doar la unul din proiecte. Acum problema poate fi prezentată astfel:

Să se determine $\min F(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ cu restricţiile:

i. fiecare proiect (lucrare) se îndeplineşte doar de una din echipe

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n};$$

ii. fiecare echipă trebuie repartizată la îndeplinirea doar la unul din proiecte

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n};$$

iii. $x_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$

Observăm, că modelul matematic al problemei de repartiţie este un model liniar asemănător cu modelul problemei echilibrate de tip transport. Într-adevăr, dacă utilizăm terminologia problemei de transport atunci în problema i.-iii. echipele au "rolul" furnizorilor, iar proiectele (lucrările) – "rolul" consumatorilor (beneficiarilor) din problema de transport. Particularitatea problemei de repartiţie constă în faptul că oferta fiecărui furnizor este egală cu unu ($a_i = 1$), dar şi cererea fiecărui beneficiar este de asemenea egală cu unu ($a_i = 1$), $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Există un spectru larg de situaţii reale din domeniul economiei care pot fi prezentate prin modele de repartiţie. De aceea rezolvarea acestor modele a cerut o abordare aparte. Este bine cunoscut faptul că una din cele mai solicitate metode de rezolvare a problemelor de tip transport este *metoda potenţialelor*. Însă această metodă, fiind aplicată la rezolvarea problemelor de repartiţie s-a dovedit a fi neeficientă din motivul că soluţia de start a problemei de repartiţie este puternic degenerată şi rezolvarea ei necesită un volum mare de calcule. Din această cauză pentru rezolvarea problemei de repartiţie, era necesar un "instrument" matematic aparte şi acesta a fost elaborat. În baza lucrărilor lui Konig şi Ergervary, Kuhn a propus un algoritm special, numit ulterior "algoritm ungar", care are la bază următoarele două principii (se demonstrează teoremele respective):

- Soluţia optimă a problemei de repartiţie nu se schimbă dacă se micşorează sau se măresc cu aceeaşi valoare toate elementele liniei i, $i = \overline{1,n}$ sau toate elementele coloanei j, $j = \overline{1,n}$ din matricea iniţială a problemei.

- Dacă toate elementele matricei c_{ij} sunt nenegative şi s-a ajuns la soluţia X^* care verifică relaţia $F(X^*) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 0$, atunci X^* este soluţie optimă.

Vom expune aplicarea practică a algoritmului ungar examinând următorul exemplu.

Exemplul 3.1. Pentru realizarea a cinci proiecte s-au format cinci echipe, astfel încât fiecare echipă să poată îndeplini oricare proiect.

Tabelul 3.2

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
E_1	8	9	11	9	10
E_2	8	4	6	6	7
E_3	7	5	7	8	9
E_4	8	4	7	7	8
E_5	9	6	7	8	10

În matricea prezentată (a se vedea tabelul 3.2) sunt indicaţi timpii în care echipa E_i, $i = \overline{1,n}$ poate realiza proiectul P_j, $j = \overline{1,n}$. Se cere repartizarea echipelor pe proiecte astfel încât timpul în care se vor îndeplini toate proiectele să fie minimal cu condiţia că o echipă poate fi repartizată doar la unul din proiecte şi un proiect poate fi realizat de către o singură echipă.

Rezolvare. În problema dată se cere minimizarea funcţiei

$$F(X) = 8x_{11} + 9x_{12} + 11x_{13} + 9x_{14} + 10x_{15} + 8x_{21} + 4x_{22} + ...+ \\ + 7x_{25} + ... + 9x_{51} + 6x_{52} + 7x_{53} + 8x_{54} + 10x_{55} \to \min,$$

ţinând cont de următoarele restricţii:

- $\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1. \end{cases}$

- $\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1. \end{cases}$

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă echipa } E_i \text{ realizează proiectul } P_j, \\ 0, & \text{dacă echipa } E_i \text{ nu realizează proiectul } P_j. \end{cases}$

Ideea algoritmului ungar se realizează în baza proprietăţilor soluţiei optime prezentate mai sus. Matricea iniţială $C = (c_{ij})$ a problemei este formată din timpii reali necesari pentru realizarea tuturor proiectelor. Vom putea considera că problema este rezolvată (adică este obţinută soluţia optimă) doar în cazul în care vom stabili proiectul P_j, $j = \overline{1,5}$ la care trebuie repartizată echipa E_i, $i = \overline{1,5}$ astfel încât toate proiectele să fie îndeplinite, iar suma timpilor tuturor echipelor să fie minimală. Deci,

se cere determinarea repartiţiei tuturor echipelor pe proiecte astfel încât toate proiectele să fie realizate în timp integral minimal, adică valoarea funcţiei obiectiv din modelul matematic al problemei să fie minimală. Prin urmare , având matricea iniţială a timpilor , trebuie de ales din fiecare linie ţi fiecare coloană câte un singur element (asta o cer restricţiile problemei) astfel încât setul de elemente alese să asigure funcţiei obiectiv o valoare minimală.

Dacă ţinem cont de faptul că matricea timpilor poate fi modificată fără a afecta repartiţia optimă, atunci este firesc să se caute varianta matricei "legitim" modificate, care să conţină o repartiţie ce-i aduce funcţiei obiectiv cea mai mică valoare posibilă, adică zero. Evident, toate componentele acestei repartiţii vor fi egale cu zero. Acest scop poate fi atins aplicând *algoritmul ungar.*

Algoritmul ungar se realizează prin următorii paşi:

1. Din fiecare linie a matricei iniţiale C_0 se alege elementul cu valoare minimală şi acesta se scade din toate elementele liniei respective. Astfel se obţine o nouă matrice C_1 în care, cu siguranţă, toate liniile vor conţine cel puţin câte un zero.

2. Procedura din punctul 1. se realizează cu toate coloanele matricei C_1. În rezultat obţinem matricea C_2 în care fiecare linie şi fiecare coloană conţine cel puţin câte un zero.

3. În matricea C_2 notăm cu steluţă doar câte un singur zero în fiecare linie şi fiecare coloană. *Zerourile marcate se numesc independente, iar totalitatea (mulţimea) lor se numeţte cuplaj. Cuplajul se numeţte maximal dacă numărul lui de zerouri independente este egal cu ordinul matricei. Soluţia optimă a problemei se conţine doar în matricea cu cuplaj maximal.*

4. Matricele obţinute din cea iniţială se mai numesc *reduse.* Admitem că cuplajul zerourilor marcate din matricea redusă C_2 nu formează cuplaj maximal. În asemenea cazuri se face operaţia următoare: cu un număr minimal de drepte orizontale şi verticale se taie toate zerourile matricei. Din toate elementele rămase netăiate se alege cel mai mic; acesta se scade din celelalte netăiate şi se adaugă la cele tăiate de două drepte (adică se află la intersecţia a două drepte). Restul elementelor rămân intacte. Astfel se obţine matricea redusă C_3.

5. În matricea redusă C_3 se caută cuplajul de zerouri independente şi dacă acesta este maximal atunci în C_3 se conţine soluţia optimă. În caz contrar matricei C_3 i se aplică operaţia de la punctul 4. şi în rezultat se obţine matricea redusă C_4. Procesul este convergent. După un număr finit de iteraţii se obţine matricea redusă C_k în care se conţine repartiţia optimă, adică repartiţia care asigură valoarea minimă (valoarea zero) a funcţiei obiectiv. Pentru a identifica repartiţia optimă reală este destul să se suprapună matricea redusă C_k cu matricea iniţială C_0. Zerourile marcate vor indica repartiţia optimă reală.

Rezolvarea prin algoritmul ungar a problemei propuse în exemplul de mai sus se prezintă prin setul următor de iteraţii

$$C_0 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 11 & 9 & 10 \\ 8 & 4 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 7 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \end{matrix} \rightarrow \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 0^* & - & 1 & - & 2 & - & 0 & - & 0 \\ & & | & & & & & & \\ 4 & & 0^* & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & | & & & & & & \\ 2 & & 0 & & 1 & & 2 & & 2 \\ & & | & & & & & & \\ 4 & & 0 & & 2 & & 2 & & 2 \\ & & | & & & & & & \\ 3 & - & 0 & - & 0^* & - & 1 & - & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C_3 = \begin{pmatrix} 0^* & - & 2 & - & 2 & - & 0 & - & 0 \\ & & | & & | & & & & \\ 3 & - & 0 & - & 0 & - & 0^* & - & 0 \\ & & | & & | & & & & \\ 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 \\ & & | & & | & & & & \\ 3 & & 0^* & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & | & & | & & & & \\ 3 & & 1 & & 0^* & & 1 & & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow C_4 = \begin{pmatrix} 0^* & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0^* \\ 0 & 0 & 0 & 0^* & 0 \\ 2 & 0^* & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0^* & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că în matricea C_4 avem marcate cinci zerouri, câ te unul în fiecare linie şi în fiecare coloană, ceea ce înseamnă că setul de zeruri marcate (sistem complet de zeruri independente, cuplaj maximal) reprezintă soluţia optimă a problemei. Înlocuind în matricea C_4 fiecare zerou marcat cu 1, iar celelalte elemente ale matricei cu 0, obţinem soluţia optimă a problemei X^*. Deci repartiţia echipelor pe proiecte va fi optimă dacă $x_{11} = x_{24} = x_{35} = x_{43} = x_{52} = 1$, iar toţi ceilalţi x_{ij} vor fi zero, adică echipa E_1 va fi repartizată la proiectul P_1, E_2 – la proiectul P_5, E_3 – la proiectul P_4, E_4 – la proiectul P_2 şi E_5 – la proiectul P_3. În acest caz timpul total minimal necesar pentru realizarea celor cinci proiecte, conform matricei iniţiale C_0 va fi $F(X^*) = c_{11} = c_{25} = c_{34} = c_{42} = c_{53} = 8 + 7 + 8 + 4 + 7 = 34$. #

3.2 Probleme de repartiţie neechilibrate.

Există situaţii în care numărul de lucrări este diferit de numărul de executanţi – caz analog cu problemele de transport neechilibrate. Problemele de repartiţie de acest gen se echilibrează ca şi cele de transport. Dacă, bunăoară, numărul de lucrări este mai mare decât numărul de executanţi, adică $n > m$ în problemă se adaugă $n - m$ executanţi fictivi, atribuindu-le timpi egali cu zero (aceştea nu există, prin urmare, nici timp nu consumă). Astfel problema devine echilibrată şi poate fi rezolvată prin algoritmul ungar. Rezultatul rezolvării va conţine $n - m$ lucrări ne îndeplinite. În mod analog se procedează şi în situaţiile în care numărul m al executanţilor este mai mare decât numărul n al lucrărilor. În acest caz în problemă se adaugă $m - n$ lucrări fictive. În rezultatul rezolvării problemei $m - n$ echipe nu vor fi repartizate la lucrări.

Exemplul 3.2. Se cere realizarea a cinci proiecte. S-au angajat doar patru echipe. Matricea timpilor este:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 6 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Să se determine repartiţia oprimă cu criteriu de minimizare.

Rezolvare. În primul rând echilibrăm matricea iniţială.

$$\begin{pmatrix} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & \\ E_1 & 5 & 4 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ E_2 & 9 & 6 & 6 & 8 & 5 & 5 \\ E_3 & 7 & 6 & 6 & 7 & 5 & 5 \\ E_4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ E_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0^* & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0^* \\ 0^* & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0^* & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0^* & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0^* & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0^* \\ 0^* & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0^* & 1 \end{pmatrix} \to X^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aici E_5 este un executant fictiv. Matricea este echilibrată. Aplicăm algoritmul ungar. În matricea a doua nu avem cuplaj maximal ($k = 4$, iar $n = 5$). Tăiem liniile l_1, l_4, l_5 şi coloana a cincea, după aceasta din elementele netăiate alegem pe cel mai mic şi formăm matricea a treia.

În baza matricei a treia obţinem soluţia optima X^*. Astfel E_1 va îndeplini proiectul P_2, E_2 – proiectul P_3, E_3 – proiectul P_5, E_4 – proiectul P_1, iar E_5 – proiectul P_4, ceea ce înseamnă că acest proiect va rămâne nerealizat. Timpul minimal necesar pentru realizarea celorlalte proiecte constituie: $F_{\min} = F(X^*) = c_{12} + c_{23} + c_{35} + c_{41} = 4 + 6 + 5 + 4 = 19$ un. #

Exemplul 3.3. În acest exemplu se cere să se determine repartiţia oprimă cu criteriu de minimizare a cinci echipe la realizarea a patru proiecte, dacă

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 10 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Echilibrăm matricea iniţială şi aplicăm algoritmul ungar:

$$\begin{pmatrix} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ E_1 & 7 & 5 & 9 & 4 & 0 \\ E_2 & 6 & 4 & 8 & 10 & 0 \\ E_3 & 7 & 6 & 8 & 9 & 0 \\ E_4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ E_5 & 5 & 6 & 7 & 4 & 0 \\ & 5 & 4 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0^* & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 0^* \\ 1 & 1 & 0^* & 0 & 0 \\ 0^* & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0^* & 0 \\ 0 & 0^* & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 0^* \\ 1 & 2 & 0^* & 0 & 1 \\ 0^* & 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

În acest exemplul proiectul P_5 este fictiv. Conform soluţiei optime X^* acestui proiect îi corespunde echipa E_3. Deci echpa E_3 nu va fi repartizată la nici un proiect. Aici valoarea funcţiei obiectiv este $F_{\min} = F(X^*) = c_{14} + c_{22} + c_{43} + c_{51} = 4 + 4 + 4 + 5 = 17$. #

Exemplul 3.4. Într-o secţie a unei întreprinderi se asamblează un tip de dispozitive pentru automobile. Asamblarea unui dispozitiv se realizează prin şase operaţii diferite. Şeful secţiei trebuie să repartizeze şase muncitori – câte unul la fiecare operaţie, care să asambleze dispozitivul. Muncitorii au trecut un test prin care s-a determinat timpul necesar fiecărui muncitor pentru realizarea fiecărei operaţii. Rezultatele testării sunt prezentate în tabel.

$$\begin{pmatrix} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & O_6 \\ M_1 & 23 & 6 & 7 & 12 & 6 & 12 \\ M_2 & 8 & 16 & 11 & 6 & 12 & 11 \\ M_3 & 6 & 90 & 9 & 8 & 16 & 23 \\ M_4 & 11 & 90 & 18 & 15 & 15 & 12 \\ M_5 & 12 & 17 & 12 & 11 & 7 & 15 \\ M_6 & 4 & 12 & 11 & 6 & 17 & 90 \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 11 \\ 7 \\ 4 \end{matrix}$$

S-a stabilit că muncitorii M_1 şi M_4 nu pot îndeplini operaţia O_2, iar M_6 nu poate îndeplini operaţia O_6. Să se determine repartiţia muncitorilor pe operaţii, astfel ca dispozitivul să fie asamblat într-un timp minimal.

Rezolvare. Cum s-a procedat şi în exemplele de mai sus, notăm prin c_{ij} timpul (minute) în care muncitorul M_i poate îndeplini operaţia O_j. Pentru a tine cont de faptul că muncitorii M_3, M_4 şi M_6 nu pot îndeplini anumite operaţii vom admite contrariul, adică ei ar putea realiza operaţiile, dar în timp foarte îndelungat. Punem pe locurile menţionate în problemă numere foarte mari în comparaţie cu restul timpilor din tabel. Aici am pus numărul 90 (puteam pune oricare alt număr mare) şi am "blocat" astfel operaţia O_2 pentru muncitorii M_3 şi M_4, iar operaţia O_6 pentru M_6.

$$\begin{pmatrix} 17 & 0 & 1 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & 10 & 5 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 90 & 3 & 2 & 10 & 17 \\ 0 & 90 & 7 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 7 & 2 & 13 & 90 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 17 & - & 0 & - & 0^* & - & 6 & - & 0 & - & 5 \\ | & & & & & & & & & & \\ 2 & - & 10 & - & 4 & - & 0^* & - & 6 & - & 4 \\ | & & & & & & & & & & \\ 0 & & 90 & & 2 & & 2 & & 10 & & 16 \\ | & & & & & & & & & & \\ 0 & - & 90 & - & 6 & - & 4 & - & 4 & - & 0^* \\ | & & & & & & & & & & \\ 5 & - & 10 & - & 4 & - & 4 & - & 0^* & - & 7 \\ | & & & & & & & & & & \\ 0^* & & 8 & & 6 & & 2 & & 13 & & 90 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 19 & 0^* & 0 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 10 & 4 & 0^* & 6 & 4 \\ 0 & 90 & 0^* & 0 & 8 & 14 \\ 2 & 90 & 6 & 4 & 4 & 0^* \\ 7 & 10 & 4 & 4 & 0^* & 7 \\ 0^* & 6 & 4 & 0 & 11 & 90 \end{pmatrix} \rightarrow X^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluţia optimă se asociază cuplajului maximal de zerouri marcate din penultima matrice. Conform acestui plan de repartiţii timpul total pentru asamblarea unui dispozitiv constituie

$$F_{\min} = F(X^*) = c_{12} + c_{24} + c_{33} + c_{46} + c_{55} + c_{61} =$$
$$= 6 + 6 + 9 + 12 + 7 + 4 = 44 \text{ minute.} \quad \#$$

3.3 Probleme de repartiţie cu criteriu de maximizare

Există probleme de repartiţie în care criteriul de optimalitate este de maximizare. Astfel de probleme pot fi rezolvate deasemenea prin algoritmul ungar, însă doar după racorderea lor la acest algoritm.

În cazul în care problema de repartiţie este cu criteriu de maximizare, ea mai întâi trebuie transformată într-o problemă echivalentă, dar cu criteriu de minimizare, la care se aplică algoritmul ungar. Trecerea de la o problemă de repartiţie de maximizare la una echivalentă de minimizare se realizează prin următoarea procedură:
Fie dată problema de repartiţie

$$\max F(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}.$$

Identificăm elementul $d = \max\limits_{i,j} c_{ij}$, $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$. Formulăm o problemă nouă:

$$\min F'(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} \cdot x_{ij},$$

unde $c'_{ij} = d - c_{ij}$, care se rezolvă, utilizând algoritmul ungar.

Exemplul 3.5. O firmă deschide patru puncte comerciale noi (C_j, $j = \overline{1,4}$) la care trebuie să angajeze patru vânzători. Au depus actele pentru angajare cinci pretendenţi (P_i, $i = \overline{1,5}$). Fiecare din ei au trecut o testare menită să determine eficienţa activităţii la fiecare punct comercial. Rezultatele testării sunt prezentate în matricea M_1.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 15 & 18 \\ 13 & 14 & 17 & 18 \\ 15 & 13 & 16 & 15 \\ 16 & 15 & 12 & 13 \\ 14 & 16 & 17 & 17 \end{pmatrix}.$$

Se cere de stabilit repartiţia pretendenţilor la punctele comerciale, astfel încât eficienţa totală să fie maximală cu condiţia că fiecare pretendent va deservi un singur punct comercial şi fiecare punct comercial va fi deservit de către un singur pretendent.
Rezolvare. Problema propusă este neechilibrată dar totodată şi cu criteriu de maximizare. În primul rând echilibrăm problema adăugând un punct comercial virtual (fictiv) evident cu eficienţe nule. Obţinem astfel matricea a doua M_2. După aceasta racordăm problema echilibrată la condiţiile algoritmului ungar, adică transformăm problema de maximizare într-o problemă de minimizare. Pentru aceasta alegem din matricea M_2

elementul cu cea mai mare valoare, aceasta fiind 18, şi din el scădem valorile tuturor celorlalte elemente ale matricei, formând astfel o nouă matrice M_3. La M_3 aplicăm algoritmul ungar.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 & 15 & 18 & 0 \\ 13 & 14 & 17 & 18 & 0 \\ 15 & 13 & 16 & 15 & 0 \\ 16 & 15 & 12 & 13 & 0 \\ 14 & 16 & 17 & 17 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 & 18 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 18 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 18 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 18 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 18 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \rightarrow \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 0 & 18 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 18 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 16 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0^* & 2 \\ 1 & 2 & 0^* & 1 & 0 \\ 0^* & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0^* & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_6 = \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 2 & \tilde{0} & 1 \\ 4 & 2 & \tilde{0} & 0^* & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & \tilde{0}^* \\ \tilde{0} & 0^* & 4 & 4 & 0 \\ 3 & \tilde{0} & 0^* & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

În continuare aplicăm asupra matricei M_3 algoritmul ungar, adică formăm matrice cu cuplaje de zerouri independente până când se obţine matricea cu cuplaj maximal ($k = n$). În problema dată aceasta este matricea M_6. În baza matricea M_6 obţinem soluţia optimă a problemei X^*, cât şi $\tilde{X}^*$. "Suprapunem" matricea M_6 cu M_1 şi constatăm că repartiţia optimă a pretendenţilor la punctele comerciale este următoarea: $P_1 \rightarrow C_1$; $P_2 \rightarrow C_4$; $P_3 \rightarrow C_5$; $P_4 \rightarrow C_2$ şi $P_5 \rightarrow C_3$. În acest caz eficienţa maximă este $F_{\max} = F(X^*) = m_{11}+m_{24}+m_{35}+m_{42}+m_{53} = 17+18+0+15+17 = 67$,

unde m_{ij}, $i = \overline{1,n}$ $j = \overline{1,n}$ sunt elementele matricei M_2. Observăm că pretendentul al treilea rămâne neangajat.

Remarcă. O problemă de repartiţie poate avea mai multe variante de soluţii optime însă pentru toate variantele optime posibile valoarea funcţiei obiectiv este una şi aceeaşi. Bunăoară, o soluţie optimă a problemei este şi $\tilde{X}^*$. Astfel, în problema rezolvată o repartiţie optimă este şi repartiţia: $P_1 \to C_4$; $P_2 \to C_3$; $P_3 \to C_5$; $P_4 \to C_1$; $P_5 \to C_2$. În acest caz $F_{\max} = F(\tilde{X}^*) = m_{14}+m_{23}+m_{35}+m_{41}+m_{52} = 18+17+0+16+16 = 67$. #

Exemplul 3.6. Directorul firmei are de format cinci echipe de lucrători care să realizeze lucrările de montare a utilajului în cinci puncte comerciale. În fiecare echipă se va include câte un inginer şi câte un designer responsabili de realizarea lucrărilor. La formarea perechilor inginer-designer au participat persoane cu experienţă în domeniu şi care s-au mai întâlnit anterior unii cu alţii, îndeplinind lucrări similare. Persoanelor care intenţionau să formeze perechi inginer-designer li s-a aplicat un test psihologic, menit să determine compatibilitatea reciprocă a perechilor preconizate. Conform teoriei, indicele de compatibilitate variază de la 20 (relaţii de prietenie) până la 1 (ostilitate reciprocă). Rezultatele testării sunt prezentate în tabel.

$$M_1 = \begin{pmatrix} & I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 \\ D_1 & 6 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 \\ D_2 & 10 & 11 & 13 & 10 & 13 & 9 \\ D_3 & 8 & 14 & 11 & 8 & 14 & 13 \\ D_4 & 9 & 11 & 15 & 9 & 15 & 7 \\ D_5 & 14 & 11 & 10 & 13 & 7 & 16 \end{pmatrix}$$

Determinaţi repartiţia inginerilor şi designerilor pe perechi astfel încât suma indicilor să fie maximală.

Rezolvare. În primul rând problema trebuie echilibrată, adică vom completa tabelul cu un designer virtual D_6 (inexistent). Indicii de compatibilitate ai acestuia cu toţi inginerii sunt egali cu zero. Astfel venim la matricea M_2. Transformăm matricea M_2, racordând-o la condiţiile algoritmului ungar, adică din elementul maximal 16 al matricei M_2 scădem toate celelalte elemente. Obţinem matricea M_3 la care aplicăm operaţiile algoritmului ungar până se ajunge la matricea M_5, în care există cuplajul maximal de zerouri independente. Acest cuplaj reprezintă soluţia optimă a problemei.

$$M_2=\begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 \\ 10 & 11 & 13 & 10 & 13 & 9 \\ 8 & 14 & 11 & 8 & 14 & 13 \\ 9 & 11 & 15 & 9 & 15 & 7 \\ 14 & 11 & 10 & 13 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_3=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 3 & 6 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 5 & 8 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 9 & 0 \\ 16 & 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 16 \end{matrix} \to$$

$$\to M_4=\begin{pmatrix} 5 & 0^* & 1 & 2 & 4 & 5 \\ | & | & | & | & | & | \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ | & | & | & | & | & | \\ 6 & 0 & 3 & 6 & 0^* & 1 \\ | & | & | & | & | & | \\ 6 & 4 & 0^* & 6 & 0 & 8 \\ | & | & | & | & | & | \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 9 & 0^* \\ | & | & | & | & | & | \\ 0^* & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to M_5=\left(\begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 1 & \tilde{0}^* & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0^* & 1 & \tilde{0} & 4 \\ 4 & \tilde{0}^* & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & \tilde{0} & 4 & 0^* & 8 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 9 & \tilde{0}^* \\ \tilde{0}^* & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$X^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \tilde{X}^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O variantă optimă poate fi repartiţia: $(D_1,\ I_4) \to 9$; $(D_2,\ I_3) \to 13$; $(D_3,\ I_2) \to 14$; $(D_4,\ I_5) \to 15$; $(D_5,\ I_6) \to 16$
sau repartiţia: $(D_1,\ I_4) \to 9$; $(D_2,\ I_5) \to 13$; $(D_3,\ I_2) \to 14$; $(D_4,\ I_3) \to 15$; $(D_5,\ I_6) \to 16$.
Nivelul total al compatibilităţii optime constituie 67 puncte. În aceste cazuri inginerul I_1 nu va particpa la realizarea lucrărilor. #

Exemplul 3.7. O companie de transport planifică să asigure transportul de pasageri dintre oraşele Chişinău şi Bucureşti, organizând în acest scop cinci rute tur-retur. Conform legislaţiei, fiecare echipă care deserveşte transportul de pasageri la sfârţitul rutei, trebuie să beneficieze de o pauză de odihnă cu durata de cel puţin cinci ore. Totodată compania consideră că această pauză nu poate să dureze mai mult de 24 ore. Orarul rutelor este stabilit de către autorităţile oraşelor. Se cere să se elaboreze o repartiţie a echipelor pentru cazare (Chişinău sau Bucureşti) astfel încât timpul total necesar pentru odihna echipelor să fie minimal.

Orarul rutelor

Plecarea din Chişinău	Numărul rutei	Sosirea la Bucureşti	Plecarea din Bucureşti	Numărul rutei	Sosirea la Chişinău
05,00	1	12,00	05,30	6	12,30
07,30	2	14,30	08,30	7	15,30
10,30	3	17,30	14,00	8	21,00
18,00	4	01,00	17,30	9	00,30
23,00	5	06,00	00,00	10	07,00

Rezolvare. Formăm două tabele: tabelul 3.3 (T1) şi tabelul 3.4 (T2). În T1 vom indica timpii pentru pauzele de odihnă ale echipelor care pleacă din Chişinău, iar în T2 – pentru cele care pleacă din Bucureşti.

Tabelul 3.3 (T1)
Pauzele de odihnă ale echipelor care pleacă din Chişinău

	6	7	8	9	10
1	17,30	20,30	2,00	5,30	12,00
2	15,00	18,00	23,30	3,00	9,30
3	12,00	15,00	20,30	0,00	6,30
4	4,30	7,30	13,00	16,30	23,00
5	23,30	2,30	8,00	11,30	18,00

Tabelul 3.4 (T2)
Pauzele de odihnă ale echipelor care pleacă din Bucureşti

	6	7	8	9	10
1	16,30	13,30	8,00	4,30	22,00
2	19,00	16,00	10,30	7,00	0,30
3	22,00	19,00	13,30	10,00	3,30
4	5,30	2,30	21,00	17,30	11,00
5	10,30	7,30	2,00	22,30	16,00

Pauzele de odihnă ale echipelor care pleacă din Chişinău (T1) se determină astfel: admitem că echipa întâi deserveşte ruta întâi, adică porneşte din Chişinău la ora 5,00 şi soseşte în Bucureşti la 12,00. În cazul în care pentru retur această echipă va deservi ruta 6 ea va pleca din Bucureşti la

ora 5,30 a zilei următoare. Deci pauza ei va începe la ora 12,00 (sosirea la Bucureşti) şi se va termina la ora 5,30 a zilei următoare (plecarea din Bucureşti), adică va avea o durată de 17 ore şi 30 de minute. Dacă, însă, aceeaşi echipă (N.1), care soseşte la Bucureşti la ora 12,00 va deservi pentru retur ruta 7, ea va pleca din Bucureşti la 8,30 a doua zi, adică pauza de odină va dura 20 de ore şi 30 de minute. În mod analog se determină şi duratele celorlalte pauze.

Având tabelele T1 şi T2 formăm tabelul Tabelul 3.5 (T3) în care includem timpii minimali de odihnă pentru fiecare echipă numită să realizeze fiecare rută. Bunăoară, în cazul în care echipa a doua va deservi ruta 6 ea se va putea odihni sau 15 ore la Chişinău, sau 19 ore la Bucureşti. Alegem durata mai mică, adică 15 ore. Dacă aceeastă echipă va trebui să deservească ruta 9 ea ar avea pentru odină sau 3 ore la Chişinău sau 7 ore la Bucureşti. Numărul mai mic este 3, însă nu-l putem scrie în tabelul T3 fiindcă, conform regulamentului, pauza minimală pentru odihnă trebuie să fie nu mai mică de 5 ore. Deci în tabelul T3 vom scrie valoarea 7. În acest mod se determină toate elementele tabelului T3.

Tabelul 3.5 (T3)

	6		7		8		9		10		$\min_j$
1	C	16,30	C	13,30	C	8,00	B	5,30	B	12,00	5,30
2	B	15,00	C	16,00	C	10,30	C	7,00	B	9,30	7,00
3	B	12,00	B	15,00	C	13,30	C	10,00	B	6,30	6,30
4	C	5,30	B	7,30	B	13,00	B	16,30	C	11,00	5,30
5	C	10,30	C	7,30	B	8,00	B	11,30	C	16,00	7,30

Transformăm tabelul T3 aplicând algoritmul ungar: din elementele primei linii scădem 5,30; din elementele liniei a doua scădem 7,00; din linia a treia scădem 6,30; din a patra scădem 5,30; iar din a cincea 7,30. Vom obţine astfel cel puţin câte un zero în fiecare linie, adică tabelul 3.6 (T4).

Tabelul 3.6 (T4)

	6	7	8	9	10
1	11,00	8,00	2,30	0,00	6,30
2	8,00	9,00	3,30	0,00	2,30
3	5,30	8,30	7,00	3,30	0,00
4	0,00	2,00	7,30	11,00	5,30
5	3,00	0,00	0,30	4,00	9,00
$\min_i$	0,00	0,00	0,30	0,00	0,00

Printr-o procedură similară transformăm tabelul T4, asigurând şi fiecare coloană cu cel puţin câte un zero. Venim la tabelul 3.7 (T5).

Tabelul 3.7 (T5)

	6	7	8	9	10
1	11,00	8,00	2,00	0,00	6,30
2	8,00	9,00	3,00	0,00	2,30
3	5,30	8,30	6,30	3,30	0,00
4	0,00	2,00	7,00	11,00	5,30
5	3,00	0,00	0,00	4,00	9,00

Tabelul 3.8 (T6)

	6	7	8	9	10
1	11,00	6,00	[0,00]	0,00	6,30
2	8,00	7,00	1,00	[0,00]	2,30
3	5,30	6,30	4,30	3,30	[0,00]
4	[0,00]	0,00	5,00	11,00	5,30
5	5,00	[0,00]	0,00	6,00	11,00

Tabelul 3.8 (T6) conţine cuplajul maximal de zerouri independente, adică soluţia optimă a problemei.

În baza tabelului 3.8 (T6) şi tabelului 3.5 (T3) obţinem următorul rezultat:

Echipa N.1 se va odihni în Chişinău 8,00 ore şi va deservi (8;1);
Echipa N.2 se va odihni în Chişinău 7,00 ore şi va deservi (9;2);
Echipa N.3 se va odihni în Bucureşti 6,30 ore şi va deservi (3;10);
Echipa N.4 se va odihni în Chişinău 5,30 ore şi va deservi (6;4);
Echipa N.5 se va odihni în Chişinău 7,30 ore şi va deservi (7;5). #

Exemplul 3.8. Şase studenţi ai facultăţii de construcţii cu specializarea "Poduri şi şosele" finisează studiile şi urmează a fi repartizaţi la locurile de muncă. Ei au primit o listă cu ţase posturi vacante disponibile, însă diferite din punct de vedere al atractivităţii (localităţi care diferă prin condiţiile climaterice, prin relieful regiunii, prin distanţele de la locurile natale etc.). Pentru a nu fi repartizaţi în mod brutal, li s-a propus să-ţi exprime preferinţele personale atribuind fiecărui loc din cele şase propuse, un număr de puncte de la zero până la douăzeci (20-cea mai înaltă apreciere). În rezultat s-a obţinut următorul tabel 3.9 (T1). Să se determine repartiţia inginerilor pe posturile vacante astfel încât nivelul integral (suma totală) al preferinţelor să fie maximal.

Tabelul 3.9 (T1)

Ingineri I_i	Posturi P_j					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
I_1	4	8	16	20	12	0
I_2	16	20	8	0	4	12
I_3	0	12	4	16	20	8
I_4	4	0	16	12	20	8
I_5	12	16	0	8	20	4
I_6	20	16	12	0	4	8

Rezolvare. Problema propusă este cu criteriu de maximizare. Prin urmare, tabelul 3.9 (T1) se racordează la algoritmul ungar. Astfel se obţine tabelul 3.10 (T2). În continuare aplicăm succesiv operaţiile algoritmului ungar.

Tabelul 3.10 (T2)

Ingineri I_i	Posturi P_j					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
I_1	16	12	4	0	8	20
I_2	4	0	12	20	16	8
I_3	20	8	16	4	0	12
I_4	16	20	4	8	0	12
I_5	8	4	20	12	0	16
I_6	0	4	8	20	16	12
$\min_i$	0	0	4	0	0	8

Tabelul 3.11 (T3)

Ingineri I_i	Posturi P_j					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
I_1	16	12	0	0	8	12
I_2	4	0	8	20	16	0
I_3	20	8	12	4	0	4
I_4	16	20	0	8	0	4
I_5	8	4	16	12	0	8
I_6	0	4	4	20	16	4

Tabelul 3.12 (T4)

Ingineri I_i	Posturi P_j					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
I_1	20	12	0	$\boxed{0^*}$	12	12
I_2	8	0^*	8	20	20	$\boxed{0}$
I_3	20	4	8	0	$\boxed{0}$	0^*
I_4	20	20	$\boxed{0^*}$	8	4	4
I_5	8	$\boxed{0}$	12	8	0^*	4
I_6	$\boxed{0^*}$	0	0	16	16	0

În rezultat se obţin următoarele două repartiţii optime cu punctajele de preferinţă respective:

- $I_1 \to P_4 - 20$, $I_2 \to P_6 - 12$, $I_3 \to P_5 - 20$,
  $I_4 \to P_3 - 16$, $I_5 \to P_2 - 16$, $I_2 \to P_1 - 20$;
- $I_1 \to P_4 - 20$, $I_2 \to P_2 - 20$, $I_3 \to P_6 - 8$,
  $I_4 \to P_3 - 16$, $I_5 \to P_5 - 20$, $I_6 \to P_1 - 20$.

Punctajul integral de preferinţă este 104. #

4 Elemente de teoria jocurilor

La rezolvarea diferitor probleme de ordin practic apare necesitatea de a analiza situaţii în care se ciocnesc două sau mai multe părţi, urmărind scopuri diferite, iar rezultatul oricărei măsuri care ar asigura succesul uneia din părţi depinde de acţiunile oponenţilor săi. Astfel de circumstanţe se numesc situaţii de conflict sau situaţii competiţionale.

Situaţii de conflict se întâlnesc frecvent şi în domeniul economic unde sunt implicaţi factori cu diferite interese, deseori diametral opuse. Fiecare participant constată că succesele sale depind nu numai de acţiunile proprii, dar şi de faptele celorlalţi participanţi. Astfel, procesul de elaborare a unei anumite decizii în situaţiile de conflict implică două sau mai multe părţi cu interese diferite.

Teoria jocurilor este o filieră a matematicii care se ocupă de studierea situaţiilor de conflict sau competiţionale şi de elaborarea modelelor matematice pentru luarea deciziilor în asemenea situaţii. Pentru a face posibilă aplicarea analizei matematice în studierea unei situaţii de conflict, se cere realizarea unui model matematic simplificat al situaţiei, care să ţină cont de regulile permise pentru partenerii conflictului. Astfel de model se numeşte *joc* (în teoria jocurilor noţiunile "joc" şi "conflict" sunt sinonime). Participanţii conflictului se numesc *jucători*.

Se numeşte joc o situaţie de conflict sau competiţională, definită printr-un set de reguli, în care acţionează doi sau mai mulţi jucători, care succesiv şi independent aleg şi realizează câte o decizie (adică fac câte o "mişcare") dintr-o mulţime disponibilă de alternative.

Setul de reguli prin care se determină alegerea uneia dintre variantele disponibile de acţiune la o mişcare se numeşte *strategie*. În regulile jocului se precizează condiţiile în care jocul se consideră terminat. Jocul se desfăşoară prin partide. Partida constituie realizarea succesivă a unui set de mişcări, respectând regulile jocului care sunt în prealabil cunoscute de către jucători. Pentru fiecare jucător o partidă se termină cu câştig, pierdere sau egalitate. Scopul fiecărui jucător este de a obţine un câştig cât mai mare care se determină prin valorile funcţiei de plată.

Teoria jocurilor urmăreşte elaborarea metodelor de determinare a strategiilor care maximizează (minimizează) o anumită funcţie obiectiv. Astfel de strategii se numesc optime. Scopul teoriei jocurilor este determinarea strategiilor optime ale jucătorilor. O strategie se numeşte optimă dacă la repetarea multiplă a jocului ea asigură jucătorului respectiv un câştig mediu maximal. Jocul se consideră definit dacă:

- se cunoaşte numărul jucătorilor,
- se cunoaşte lista strategiilor disponibile pentru fiecare jucător,
- se cunosc câştigurile fiecărui jucător pentru oricare dintre strategii.

4.1 Jocuri de doi jucători cu sumă nulă

În cele ce urmează vom examina jocuri cu doi jucători A şi B. Această clasă reprezintă un spectru larg de aplicaţii practice. Fiecare dintre jucători doreşte să obţină o plată cât mai mare pe seama celuilalt jucător şi astfel apare conflictul de interese. Admitem că A dispune de m strategii $A_1, A_2, ..., A_m$, iar B de dispune de n strategii $B_1, B_2, ..., B_N$. Fiecărei perechi de strategii $(A_i; B_j)$ i se asociază un număr a_{ij} care exprimă câştigul lui A primit de la jucătorul B (dacă $a_{ij} > 0$) sau pierderea lui A în folosul lui B (dacă $a_{ij} < 0$) în cazul în care A aplică strategia sa A_i, iar B strategia sa B_j. Astfel de jocuri pot fi prezentate integral printr-o matrice de dimensiune $(m \times n)$, care se numeşte *matrice de plată*.

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} B_1 & B_2 & ... & B_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ ... \\ A_m \end{matrix} \tag{4.1}$$

Un caz particular al acestei clase de jocuri îl constitue jocurile cu sumă nulă. În jocurile cu sumă nulă avem $[a_{ij} + (-a_{ij})] = 0$, unde a_{ij} este câştigul jucătorului A, iar $-a_{ij}$ este pierderea jucătorului B. Jocurile de două persoane cu sumă nulă prezentate în forma (4.1) se numesc jocuri matriceale sau jocuri antagoniste.

În cele ce urmează vom examina doar *jocuri finite*, adică jocuri în care fiecare jucător dispune de un număr *finit* de strategii.

Fie dat jocul cu următoarea matrice de plată (tabelă de plată):

Tabelul 4.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	4	5	3	2	3	2
A_2	1	9	3	4	5	1
A_3	10	4	1	8	7	1
A_4	5	6	4	5	9	$\boxed{4}$
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	10	9	$\boxed{4}$	8	9	

În acest joc jucătorul A dispune de patru strategii (prezentate prin liniile matricei), iar B are la dispoziţie cinci strategii (fiecare din ele constitue o coloană a matricei). Jocul începe cu prima mişcare a unuia din jucători. Vom considera în continuare , că prima mişcare o face jucătorul A, după care urmează mişcarea lui B. Amintim: *o mişcare* este alegerea, în conformitate cu regulile jocului, a uneia din acţiunile disponibile (a unei strategii) şi realizarea acesteia cu scopul de a obţine în rezultat un câştig cât mai mare. În matricea de plată a jocului prezentat toate elementele sunt pozitive, iar jucătorii au interese opuse – câştigul unuia este egal cu pierderea celuilalt. Să examinăm modalitatea prin care jucătorul A îşi va alege strategia sa. În matricea de plată este un câştig ademenitor în valoare de 10 unităţi, care poate fi obţinut doar alegând strategia A_3. Însă jucătorul A îşi dă bine seama că oponentul său B, care este tot atât de raţional, nu-i va permite să câştige 10 unităţi şi va acţiona prin strategia sa B_3, oferind astfel lui A cel mai mic câştig posibil de o ("1") unitate. Deci A nu va aplica A_3. Rămâne de stabilit care din cele patru strategii disponibile ale lui A ar fi convenabilă pentru sine. Alegerea acesteia se realizează ţinând cont de *principiul prudenţei* (unul din principiile fundamentale ale teoriei jocurilor). Jucătorul A, alegând strategia A_i, $i = \overline{1,4}$, este conştient de faptul că jucătorul B îi va răspunde cu acea strategie B_j, $j = \overline{1,5}$ pentru care câştigul lui A (notat cu α_i, $i = \overline{1,4}$) să fie cât mai mic, adică $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$. Deci A nu poate miza pe un câştig mai mare decât α_i şi având la dispoziţie patru ($m = 4$) strategii o va alege pe aceea care-i asigură cel mai mare câştig (notat cu α), adică

$$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}.$$

Mărimea α se numeşte *valoarea inferioară* a jocului şi constitue câştigul maxim al jucătorului A (al primului jucător). În exemplul dat $\alpha = 4$. Acesta este *câştigul garantat* al primului jucător, adică orice n-ar întreprinde jucătorul B câştigul jucătorului A v-a fi nu mai decât $\alpha = 4$.

Principiul după care se conduce primul jucător (jucătorul A) se numeşte *maximin* şi se realizează prin următoarele operaţii:

- la matricea de plată se ataşează (în partea dreaptă) o coloană suplimentară formată din mărimile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, determinate prin relaţia $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, adică α_i este câştigul minimal selectat din linia cu numărul i (deci strategia A_i),
- dintre toate elementele α_i ale coloanei suplimentare obţinute se alege

elementul cu valoarea cea mai mare şi se notează cu α. Astfel avem $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

În cazul examinat $\alpha = 4$. Strategia A_4 (în exemplul dat) care asigură jucătorului A, fără nici un risc, un câştig cel puţin egal cu α se numeşte *strategie pură maximin.*

Astfel conchidem că urmând principiul *maximin* primul jucător va obţine un câştig garantat nu mai mic decât α indiferent de acţiunile celui de al doilea jucător.

Examinăm jocul celui de al doilea jucător (jucătorul B) şi determinăm strategia optimă a acestuia. În matricea de plată elementele coloanei cu numărul j constituie pierderile jucătorului B în cazul în care acesta alege strategia B_j. Alegând oricare din strategiile sale, jucătorul B este conştient de faptul, că oponentul său A îi va răspunde cu aşa o strategie A_i, care să-i aducă lui B o pierdere maximală. Ţinând cont de aceste considerente, jucătorul B va selecta din fiecare coloană elementul maximal $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}, j = \overline{1,n}$ şi cu ele va forma o linie suplimentară, care se va ataşa la matricea de plată. În această linie vor fi prezentate pierderile maximal posibile ale jucătorului B selectate din fiecare coloană (adică din fiecare strategie). Scopul lui B constă în alegerea strategiei B_j, $j = \overline{1,n}$, care să-i asigure pierderea cea mai mică (acesta se va nota prin simbolul β) din cele mai mari posibile. Astfel avem:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Principiul de care se conduce jucătorul al doilea (jucătorul B) se numeşte *minimax* , iar *mărimea β se numeşte valoarea superioară a jocului.* În exemplul de mai sus avem $\beta = 4$. Dacă jucătorul al doilea joacă conform principiului *minimax* atunci pierderea lui nu va fi mai mare decât $\beta = 4$ unităţi, şi acest rezultat nu depinde de acţiunile primului jucător. Strategia care-i asigură jucătorului B (adică jucătorului al doilea), fără risc, o pierdere minimală egală cu β *se numeşte strategie pură minimax a acestui jucător.*

Strategiile alese de către fiecare jucător conform pricipiilor sale (expuse mai sus) se numesc *strategii minimax, iar mărimea α (câştigul primului jucător) se numeşte valoarea jocului şi se notează prin simbolul ν.*

Într-un joc matriceal valoarea inferioară α nu depăşeşte valoarea superioară β, adică $\alpha \leq \beta$.

4.2 Jocuri cu puncte de echilibru

Un loc separat în teoria jocurilor aparţine jocurilor în care

$$\alpha = \beta$$

sau

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Această clasă poartă denumirea de jocuri *cu punct de echilibru sau punct "şa"*. În matricea de plată a oricărui joc cu punct şa există element care are cea mai mică valoare în linia sa şi totodată cea mai mare valoare în coloana sa; *acest element se numeşte punct de echilibru sau punct şa.* Valoarea comună a mărimilor α şi β se notează cu ν şi se numeşte *valoare pură* a jocului

$$\alpha = \beta = \nu.$$

Strategiile A_i, B_j care formează punctul de echilibru *se numesc optimale*, ele determină *o situaţie de echilibru.* A rezolva un joc matriceal înseamnă a determina strategiile optime pentru fiecare jucător cât şi valoarea jocului. Prin urmare soluţia jocului în asemenea cazuri poate fi prezentate în forma

$$(A_i;\ B_j;\ \nu),$$

şi se spune că *jocul are soluţii în strategii pure* (acestea fiind A_i şi B_j).

Soluţia jocului posedă următoarea proprietate: *dacă unul dintre jucători nu se abate de la strategia sa optimă, atunci nici pentru celălalt nu poate fi convenabil să devieze de la strategia sa optimă.*

Exemplul 4.1. Să se rezolve jocul cu următoare matrice de plată:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \beta_j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ -8 & -5 & 14 \\ 12 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 12 & 5 & 11 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \alpha_i \\ 5 \\ -8 \\ -3 \end{array}$$

Rezolvare. Determinăm mărimile $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$ (care constituie cele mai mici câştiguri, adică câştigurile garantate ale primului jucător pentru fiecare din strategiile sale).

Avem:

$$\alpha_1 = \min_j \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = \min_j \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 5,$$

$$\alpha_2 = \min_j \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \min_j \begin{pmatrix} -8 & -5 & 14 \end{pmatrix} = -8,$$

$$\alpha_3 = \min_j \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \min_j \begin{pmatrix} 12 & 3 & -3 \end{pmatrix} = -3.$$

Formăm coloana mărimilor α_i, $i = \overline{1,3}$ şi o ataşăm la matricea de plată. Aplicăm principiul *maximin* şi aflăm valoarea inferioară a jocului:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} = 5.$$

Prin urmare valoarea inferioară a jocului este $\alpha = 5$ şi se obţine în cazul în care primul jucător aplică strategia sa A_1.

Jucătorul al doilea dispune de trei strategii prezentate prin coloanele matricei de plată. Elementele coloanelor constitue pierderile eventuale ale jucătorului al doilea. Conform principiului minimax de care se conduce acesta, din fiecare coloană se separă elementul cu cea mai mare valoare şi astfel se formează linia mărimilor $\beta_j = \max_i a_{ij}$. Deci $\beta_1 = 12$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 14$. Acestea sunt pierderile cele mai mari posibile, respective strategiilor jucătorului al doilea. Cu ele se formează o linie suplimentară care se ataşează matricei de plată. Elementul cu cea mai mică valoare din această linie constituie valoarea superioară a jocului, notată cu β:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j (12;\ 5; 14) = 5.$$

Astfel, în problema dată avem $\alpha = \beta = 5$. Prin urmare, *jocul are soluţie în strategii pure şi acestea sunt optime* A_1^* *şi* B_2^*. *Ele formează punctul de echilibru* A_1^*, B_2^* (punctul şa) al jocului. Valoarea jocului este $\nu = 5$, iar soluţia se prezintă prin expresia $(A_1^*;\ B_2^*;\ 5)$. #

Situaţia de echlibru în rezolvarea jocului posedă cea mai bună stabilitate în sensul că în această situaţie nici penrtu unul din jucători nu este raţional să-şi schimbe strategia prezentată.

Remarcă. Un joc cu soluţii în strategii pure poate avea câteva puncte şa înşă valoarea ν a jocului în toate aceste puncte este aceiaşi.

4.3 Jocuri matriceale cu soluţii în strategii mixte

În exemplele rezolvate mai sus jocul se încheie cu determinarea punctului de echilibru $(A_i^*\ B_j^*)$ şi a valorii ν a jocului. Prin aceasta se formează o situaţie de stabilitate a jocului, fiindcă nici pentru unul dintre jucători nu este convenabil să devieze de la strategia sa dacă celălalt urmează strategia sa optimă.

Există jocuri în care $\alpha < \beta$, adică în matricea de plată lipseşte un element a_{ij} care în acelaşi timp ar fi cel mai mic în linia sa şi cel mai mare în coloana sa. Fiecare dintre jucători va încerca să folosească diferenţa $\alpha - \beta$ în favoarea sa, destabilizând astfel jocul. Un exemplu în acest sens este prezentat în tabelul de mai jos, în care $\alpha = 3$, iar $\beta = 6$.

Tabelul 4.2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	4	5	6	2	3	2
A_2	1	9	5	4	4	1
A_3	10	4	1	8	7	1
A_4	5	6	3	5	9	$\boxed{3}$
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	10	9	$\boxed{6}$	8	9	

Jucătorii nu dispun de strategii pure optime şi pe parcursul jocului sunt nevoiţi să utilizeze toate strategiile sale disponibile, alegându-le în mod aleator, adică atribuind fiecăreia din ele careva probabilitate. În asemenea cazuri problema constă în determinarea acestor probabilităţi astfel încât ele să asigure un câştig maximal garantat, care să nu depindă de acţiunile oponentului. Pornind de la ipoteza că jocul constă dintr-un număr de partide suficient de mare şi în toate se joacă cu aceeaşi matrice de plată, iar fiecare partidă aduce anumit câştig, venim la concluzia că jocul aduce un câştig final egal cu media câştigurilor partidelor.

Notăm prin P vectorul $P = (p_1, p_2, ..., p_m)$, unde m este numărul strategiilor pure ale primului jucător şi p_i, $i = \overline{1,m}$ este probabilitatea că primul jucător va aplica strategia sa A_i (strategia cu numărul i).

Dacă într-un joc primul jucător alege strategiile sale A_i cu probabilităţile p_i respectiv, unde $p_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$, vom spune că acesta şi-a determinat strategia sa mixtă $P_A = (p_1, p_2, ..., p_m)$.

În mod analog, *dacă jucătorul al doilea (jucătorul B) într-un joc alege strategiile sale B_j, $j = \overline{1,n}$ cu probabilităţile q_j respectiv, unde $q_j \geq 0$,*

$j = \overline{1,n}$ *şi* $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, *vom spune că jucătorul al doilea şi-a fixat strategia sa mixtă* $Q_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$.

Fiecare strategie pură constituie un caz particular al strategiei mixte în care una din strategiile pure are probabilitatea egală cu unu, iar restul strategiilor pure au probabilităţile egale cu zero.

Strategiile pure-componente ale strategiilor mixte se numesc *active* dacă probabilităţile lor în strategia mixtă sunt diferite de zero; strategiile pure-componente ale strategiilor mixte cu probabilităţi egale cu zero se numesc *pasive*. Spre exemplu, în strategia mixtă a primului jucător $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (0,05;\ 0;\ 0,25;\ 0,7;\ 0)$ strategiile pure A_1, A_3 şi A_4 sunt active, iar strategiile pure A_1 şi A_4 sunt strategii pasive.

Dacă primul jucător alege strategia sa mixtă

$$P_A = (p_1, p_2, ..., p_m), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

iar jucătorul al doilea alege strategia sa pură $B_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ valoarea medie a câştigului primului jucător se determină prin relaţia

$$\nu(P_A; B_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot p_i = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{mj}p_m.$$

Analog, dacă al doilea jucător aplică strategia sa mixtă

$$Q_B = (q_1, q_2, ..., q_n), \quad q_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

iar primul aplică strategia pură $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ valoarea câştigului celui de al doilea jucător se determină prin relaţia

$$\nu(A_i, Q_B) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j = a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n,$$

În cazul strategiilor mixte jocul se caracterizează prin două variabile aleatoare independente

$$A' : \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ... & A_m \\ p_1 & p_2 & ... & p_m \end{pmatrix} \qquad B' : \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & ... & B_n \\ q_1 & q_2 & ... & q_n \end{pmatrix}$$

şi matricea de plată

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Orice situaţie în strategii pure $(A_i;\ B_j)$ constituie un eveniment aleator cu probabilitatea $p_i \cdot q_j$, fiindcă A' şi B' reprezintă două evenimente aleatoare independente. În situaţia $(A_i;\ B_j)$ jucătorul A obţine câştigul a_{ij}. Prin urmare, *câştigul mediu* al primului jucător (jucătorul A) în rezultatul jocului se determină prin relaţia

$$M = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j.$$

Numărul M constituie câştigul mediu al primului jucător în situaţia unui joc fără punct de echilibru (fără punct şa), adică unui joc cu soluţii în strategii mixte.

Strategiile $P_A^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*)$ şi $Q_B^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*)$ se numesc strategii mixte optime ale primului şi celui de al doilea jucător respectiv, dacă se verifică relaţia:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^* \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j \qquad (4.2)$$

sau

$$P_A \cdot S \cdot Q_B^{*T} \le P_A^* \cdot S \cdot Q_B^{*T} \le P_A^* \cdot S \cdot Q_B^T, \qquad (4.3)$$

unde S – matricea de plată a jocului, P_A^* şi Q_B^* – strategiile mixte optime ale primului şi, respectiv, celui de al doilea jucător, iar P_A şi Q_B – strategii mixte arbitrare ale jucătorilor.

Se numeşte soluţie a unui joc matriceal perechea de strategii P_A^* şi Q_B^* mixte în caz general. În situaţiile în care unul dintre jucători aplică pe parcursul jocului strategia lui optimă, câştigul său rămâne constant şi egal cu valoarea ν a jocului, indiferent de acţiunile oponentului său.

În partea stângă a inegalităţii (4.3) avem $P_A \cdot S \cdot Q_B^{*T} \le P_A^* \cdot S \cdot Q_B^{*T}$, unde$P_A$ este careva strategie mixtă a primului jucător diferită de cea optimă ($P_A \ne P_A^*$). Deci, dacă pe parcursul jocului primul jucător va devia de la strategia sa optimă P_A^* iar al doilea va continua să aplice strategia

optimă Q_B^*, atunci câştigul primului ar putea doar să se micşoreze. În mod analog, partea dreaptă a relaţiei (4.3) $P_A^* \cdot S \cdot Q_B^{*T} \leq P_A^* \cdot S \cdot Q_B^T$, arată că dacă al doilea jucător se va abate de la stratejia sa optimă Q_B^*, atunci pierderea sa ar putea doar să se mărească.

Mărimea câştigului primului jucătotor obţinută prin relaţia $P_A^* \cdot S \cdot Q_B^{*T}$ se nuşte valoarea jocului şi se notează prin ν, adică

$$\nu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*. \tag{4.4}$$

Sau în formă vectorială

$$\nu = P_A^* \cdot S \cdot Q_B^{*T}. \tag{4.5}$$

Aplicând doar strategiile pure, primul jucător (care urmează principiul maximin) se asigură cu câştigul minimal garantat egal cu α – valoarea inferioară a jocului. În cazul în care primul jucător aplică strategiile mixte câştigul său va fi *nu mai mic decât* α, *adică* $\nu \geq \alpha$.

Dacă ne vom referi la al doilea jucător, vom constata că în cazul în care jocul se realizează în strategii mixte pierderea β – valoarea superioară a acestuia, *va fi nu mai mică decât* ν, *adică* $\beta \geq \nu$.

Prin urmare, pentru orice joc matriceal are loc relaţia:

$$\alpha \leq \nu \leq \beta, \tag{4.6}$$

unde α – valoarea inferioară a jocului, β – valoarea superioară a jocului, iar ν – valoarea jocului.

În baza inegalităţii (4.6) vom distinge două situaţii:

a. $\alpha = \beta = \nu$. În acest caz jocul are soluţii în strategii pure $(A_i^*; B_j^*)$ şi perechea (perechile) acestora formează punctul (punctele) de echilibru (punctele şa) al jocului. Soluţia jocului se scrie: $(A_i^*; B_j^*; \nu)$.

b. $\alpha < \beta$. În acest caz jocul nu dispune de soluţii în strategii pure, jucătorii vor utiliza, cu anumite probabilităţi, toate strategiile pure disponibile formându-si din ele strategii mixte $P_A = (p_1, p_2, ..., p_m)$ şi $Q_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$. Aplicând strategiile mixte optimale S_A^* şi S_B^* vom obţine soluţia optimă în strategii mixte $(P_A^*; Q_B^*; \nu)$. *Perechea* $(P_A^*; Q_B^*)$ *se numeşte punct de echilibru (punct şa) in strategii mixte.*

Se demonstrează (teorema J.von Neumann şi O. Morgerstern):
Orice joc matriceal admite cel puţin un punct de echilibru în strategii mixte.

4.4 Modalităţi de simplificare a matricei de plată

Jocul matriceal se rezolvă fără prea mari eforturi doar în cazurile în care matricea de plată S este de dimensiuni mici, adică fiecare dintre jucători dispune de un număr mic de strategii. În situaţiile jocurilor cu matrice de plată masive rezolvarea cere eforturi considerabile şi de aceea reducerea dimensiunilor matricei de plată constituie o problemă importantă în rezolvarea jocurilor.

Prima metodă de micşorare a dimensiunilor matricei de plată are la bază principiul dominării între strategii. Se spune că strategia A_k a primului jucător domină strategia A_l a aceluiaşi jucător dacă elementele acestor două strategii verifică relaţia $a_{kj} \geq a_{lj}$, $j = \overline{1,n}$. Strategia A_k se numeşte dominantă, iar A_l dominată. *Se notează:* $A_k \succ A_l$. Situaţia $A_k \succ A_l$ denotă faptul că, dacă primul jucător va aplica strategia A_l câştigul lui va fi mai mic (sau, în cel mai bun caz, nu mai mare) decât dacă va aplica strategia A_k. Prin urmare, având la dipoziţie strategiile A_k şi A_l legate prin relaţia de dominare $A_k \succ A_l$, primul jucător nu va alege niciodată strategia dominată A_l, fiindcă ea este una neconvenabilă pentru el şi poate fi omisă din matricea de plată. Dacă matricea de plată conţine mai multe strategii dominate ale primului jucător ele toate trebue eliminate din matrice. În rezultat se obţine o matrice de dimensiuni mai mici.

În mod analog se examinează şi strategiile jucătorului al doilea. Dacă în matricea de plată elementele strategiilor B_j şi B_r ale jucătorului al doilea verifică relaşia $a_{ij} \geq a_{ir}, i = \overline{1;m}$, atunci B_r domină B_j, adică strategia B_r este dominantă, iar B_j este dominată. Prin urmare, avem relaţia $B_r \succ B_j$, care are următoarea semnificaţie: Strategiile jucătorului al doilea (coloanele matricei de plată) constituie pierderile sale şi, pe parcursul jocului, tinde ca acestea să fie cât mai mici. Deci, având de ales una din strategiile B_j şi B_r el va alege B_r care conţine pierderi mai mici decât pierderile respective din strategia B_j. Strategia dominată B_j se elimină din matricea de plată. Astfel, aplicarea principiului de dominare dintre strategii, conduce la reducerea dimensiunilor matricei de plată.

Fie jocul se prezintă prin matricea de plată S, iar S' este matricea aceluiaşi joc obţinută prin eliminarea din S a strategiilor dominate. Se demonstrează că soluţia optimă a jocului cu matricea de plată S' este soluţie optimă şi pentru jocul dat prin matricea iniţială S, egalând cu zero în această soluţie probabilităţile strategiilor eliminate. Deci, principiul dominării dintre strategiile jucătorului constă în eliminarea din matricea de plată a tuturor strategiilor dominate (inclusiv şi a celor care se dublează, păstrând din acestea doar una) astfel încât matricea de plată

transformată să conţină doar strategii convenabile.

Exemplul 4.2. Se dă jocul cu matricea de plată

$$S = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow A_1 \succ A_4 \rightarrow \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow B_4 \succ B_3 \rightarrow \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow A_1 \succ A_2 \rightarrow \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Jocul cu matricea redusă $S' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ se rezolvă mai simplu decât cu matricea S. Soluţia optimă a jocului cu matricea S' este soluţie optimă şi pentru jocul iniţial cu matricea S. #

Remarcă Fie dat un joc cu matricea de plată $S_{m\times n}$. Dacă careva linie A_i, $i = \overline{1,m}$ *este dominată* de combinaţia liniară convexă a celorlalte linii ale matricei S, atunci linia A_i va avea probabilitatea zero în strategia mixtă optimală a primului jucător (adică ea poate fi eliminată din matricea iniţială S).

Dacă fiecare element din coloană B_j, $j = \overline{1,n}$ este mai mare sau egal decât combinaţia liniară convexă a elementelor corespunzătoare din alte coloane, atunci coloana B_j poate fi eliminată din matricea de plată (va avea probabilitatea zero în strategia mixtă optimală a jucătorului al doilea).

Altă metodă de modificare a matricei de plată are la bază o proprietate demonstrată în teoria jocurilor conform căreia soluţia jocului nu se schimbă dacă elementele a_{ij} ale matricei de plată se modifică prin relaţia

$$a'_{ij} = \lambda a_{ij} + \kappa,$$

unde $\lambda \neq 0$ şi κ – *const*. În acest caz valoarea jocului modificat este $\nu' = \lambda\nu + \kappa$

Această transformare conduce la concluzia că elementele matricei de plată a unui joc pot fi prezentate în orice unităţi (euro, lei, dolari), soluţia jocului rămâne aceiaşi, adică soluţia jocului nu depinde de unităţile în care se măsoară câştigurile jucătorilor (elementele matricei de plată).

Proprietatea examinată se aplică şi în situaţiile în care matricea de plată S poate fi adusă la o formă S' mai confortabilă în lucru.

Exemplul 4.3. Se dă jocul cu matricea de plată

$$S = \begin{pmatrix} 200 & -300 & 100 \\ -100 & 400 & 300 \end{pmatrix}.$$

Putem simplifica matricea S , înmulţind elementele ei cu 0,01. Obţinem $S' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. La fiecare element al matricei S' adăugăm numărul 4 şi obţinem astfel matricea $S'' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Deci elementele matricei S'' se obţin prin relaţia $a''_{ij} = \lambda a_{ij} + \kappa = 0,01a_{ij} + 4$. Matricea S'' este mai comodă în lucru decât matricea S. După rezolvarea jocului cu matricea S'', din valoarea jocului vom scădea $\kappa = 4$. #

4.5 Metode de rezolvare ale jocurilor matriceale

Vom examina câteva din metodele de rezolvare ale jocurilor matriceale pentru cazurile în care acestea nu dispun de puncte şa, adică nu au soluţii în strategii pure. În asemenea situaţii, conform teoremei fundamentale J. von Neumann, jocurile au soluţii în strategii mixte

4.5.1 Jocuri matriceale (2×2)

Cele mai simple cazuri de jocuri matriceale sunt jocurile cu matricea de plată (2×2), adică

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} q_1 & q_2 \\ B_1 & B_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ A_1\ p_1 \\ A_2\ p_1 \end{matrix}$$

După cum se ştie, a rezolva un joc matriceal înseamnă a determina strategiile optime pentru fiecare jucător, cât şi a calcula valoarea jocului. În cazul dat strategia optimă a primului jucător (jucătorul A) este

$$P^* = (p_1^*, p_2^*);\ p_1^* \geq 0,\ p_2^* \geq 0;\ p_1^* + p_2^* = 1,$$

iar pentru al doilea (jucătorul B)

$$Q^* = (q_1^*, q_2^*);\ q_1^* \geq 0,\ q_2^* \geq 0;\ q_1^* + q_2^* = 1.$$

Rezolvăm mai întâi jocul pentru jucătorul A. Pe parcursul jocului jucătorul A se conduce de strategia sa mixtă $(p_1^*;\ p_2^*)$, iar jucătorul B îi răspunde succesiv cu una din strategiile sale pure B_1 sau B_2. Câştigul mediu al jucătorului A se determină prin speranţa matematică a variabilei aleatoare discrete care poate fi prezentată prin tabelul:

$$\begin{array}{ccc} B_j & c_{1j} & c_{2j} \\ P & p_1^* & p_2^* \end{array}, \quad j = 1, 2.$$

În acest caz se obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$\left\{\begin{array}{l} c_{11}p_1^* + c_{21}p_2^* = \nu, \\ c_{12}p_1^* + c_{22}p_2^* = \nu, \\ p_1^* + p_2^* = 1, \end{array}\right. \quad \text{sau} \quad \left\{\begin{array}{l} c_{11}p_1^* + c_{21}\,(1 - p_1^*) = \nu, \\ c_{12}p_1^* + c_{22}\,(1 - p_1^*) = \nu, \\ p_2^* = 1 - p_1^*. \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Deci

$$\left\{\begin{array}{l} \nu = c_{21} + (c_{11} - c_{21})\,p_1^*, \\ \nu = c_{22} + (c_{12} - c_{22})\,p_1^*, \\ p_2^* = 1 - p_1^*. \end{array}\right. \tag{4.8}$$

Rezolvarea jocului pentru jucătorul B conduce la sistemul:

$$\left\{\begin{array}{l} c_{11}q_1^* + c_{12}q_2^* = \nu, \\ c_{21}q_1^* + c_{22}q_2^* = \nu, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Din sistemul (4.8) se obţine soluţia $P^* = (p_1^*;\ p_2^*)$, ν_A pentru jucătorul A, iar din sistemul (4.9) – soluţia $Q^* = (q_1^*;\ q_2^*)$, ν_B pentru jucătorul B.

Rezolvarea jocurilor cu matricea de plată (2×2) permite o interpretare geometrică elocventă. Într-adevăr, primele două ecuaţii ale sistemului (4.8) reprezintă geometric respectiv două drepte d_1 şi d_2 în sistemul cartezian $p_1 O \nu$. Prima ecuaţie $\nu = c_{21} + (c_{11} - c_{21})\,p_1$ se referă la cazul în care jucătorul A aplică strategia sa mixtă $(p_1;\ p_2)$, iar jucătorul B îi răspunde cu strategia sa pură B_1. Dreapta d_1 va uni punctele $(p_1 = 0;\ \nu = c_{21})$ şi $(p_1 = 1;\ \nu = c_{11})$. Ecuaţia a doua din sistem $\nu = c_{22} + (c_{12} - c_{22})\,p_1$ reprezintă geometric dreapta d_2 trasată prin punctele $(p_1 = 0;\ \nu = c_{22})$ şi $(p_1 = 1;\ \nu = c_{12})$ (figura 4.1).

Conform principiului maximin jucătorul A determină mai întâi mulţimea tuturor celor mai mici câştiguri posibile (câştiguri garantate, care nu depind de strategiile aplicate de către jucătorul B) şi din această mulţime selectează câştigul maximal. Strategia mixtă care-i asigură $\max \nu$ este strategia optimă a jucătorului A. În figura 4.1 cele mai mici câştiguri ale

jucătorului A sunt ordonatele tuturor punctelor frântei haşurate. Câştigul maximal din această mulţime se află în punctul M care dispune de cea mai mare ordonată. Abscisa punctului M este p_1^*, iar $p_2^* = 1 - p_1^*$. Ordonata lui M este câştigul optim sau valoarea ν a jocului. Astfel se rezolvă prin metoda geometrică jocul (2×2) pentru jucătorul A.

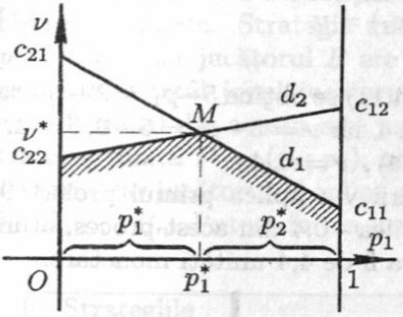


Figura 4.1

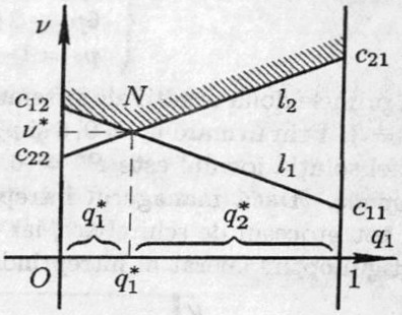


Figura 4.2

Metoda geometrică se aplică în mod analog şi la rezolvarea jocului pentru jucătorul B (figura 4.2).

Exemplul 4.4. La o întreprindere se planifică înlocuirea a două tipuri de utilaje cu altele noi. Specialiştii au propus două proiecte de înzestrare cu utilaje noi. Se cunosc câştigurile pe care le asigură fiecare proiect după schimbarea planificată. Care va fi strategia optimă şi câştigul ei mediu garantat, dacă matricea câştigurilor este următoarea

$$C = \begin{matrix} \\ Pr.1 \\ Pr.2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \end{matrix}$$

Rezolvare. Problema propusă poate fi modelată printr-un joc matriceal în care primul jucător (jucătorul A) este întreprinderea. Valoarea inferioară a jocului este $\alpha = 4$, iar cea superioară $\beta = 5$. Deoarece $\alpha < \beta$ jocul nu dispune de soluţii în strategii pure şi are soluţii doar în strategii mixte. Strategia mixtă a jucătorului A este $P = (p_1; p_2)$. Determinăm soluţia pentru A. Pe parcursul jocului A utilizează toate strategiile sale pure (adică cele două disponibile), alegându-le la întâmplare cu probabilităţile p_1 şi p_2. Jucătorul B îi răspunde succesiv cu câte una din strategiile sale pure. În cazul în care B aplică strategia pură B_1 valoarea sperată a câştigului pentru A se exprimă prin relaţia $\nu = 4p_1 + 5p_2$, iar dacă aplică B_2 avem $\nu = 6p_1 + 2p_2$. Formăm sistemul:

$$\begin{cases} 4p_1 + 5p_2 = \nu, \\ 6p_1 + 2p_2 = \nu, \quad p_1 \geq 0, \ p_2 \geq 0. \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \tag{4.10}$$

sau

$$\begin{cases} 4p_1 + 5(1 - p_1) = \nu, \\ 6p_1 + 2(1 - p_1) = \nu, \\ p_2 = 1 - p_1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Din primele două ecuaţii ale sistemului (4.11) se obţine $5 - p_1 = 2 + 4p_1$ sau $5p_1 = 3$. Prin urmare $p_1 = 0,6$ şi $p_2 = 0,4$, iar $\nu = 5 - p_1 = 5 - 0,6 = 4,4$. Astfel soluţia jocului este $P^* = (0,6;\ 0,4)$, $\nu = 4,4$.

Răspuns. Dacă managerul întreprinderii v-a aplica primul proiect 0,6 din tot procesul de schimbare, iar al doilea - 0,4 din acest proces, atunci câştigul optim sperat al întreprinderii va fi de 4,4 unităţi monetare.

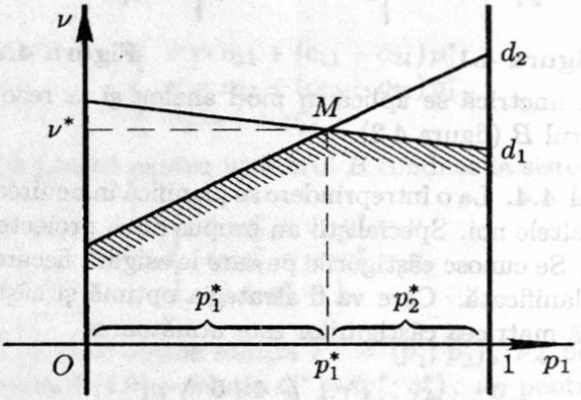


Figura 4.3

Figura 4.3 reprezintă şi rezolvarea geometrică a jocului propus. #

4.5.2 Rezolvarea grafică a jocurilor cu matricea de tip $(2 \times n)$ şi $(m \times 2)$

Metoda grafică (geometrică) de rezolvare a jocurilor examinată mai sus poate fi aplicată şi pentru jocurile cu matrice de dimensiuni $(2 \times n)$ şi $(m \times 2)$. Examinăm un joc cu matricea

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \ p_1 \\ A_2 \ p_2. \end{array} \end{array}$$

Aici jucătorul A dispune de două strategii pure A_1 şi A_2, iar jucătorul B de n strategii pure B_1, B_2, ..., B_n. Totodată se va ţine cont de faptul că $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ şi $q_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, iar $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Vom admite că jocul nu dispune de puncte şa (nu are soluţii în strategii pure), iar matricea C nu conţine strategii dominate, adică are soluţii doar în strategii mixte. Strategia mixtă a jucătorului A este $P = (p_1; p_2) = (p_1; 1 - p_1)$, iar jucătorul B are strategia mixtă $Q = (q_1; q_2; ...; q_n)$. Se rezolvă mai întâi jocul jucătorului care dispune doar de două strategii pure. În cazul dat acesta este jucătorul A. Pe parcursul jocului A aplică strategia mixtă $P = (p_1; p_2)$, alegând strategiile pure A_1 şi A_2 în mod aleatoriu, iar jucătorul B aplică succesiv câte una din strategiile sale pure B_1, B_2, ..., B_n. Putem forma următorul tabel:

Tabelul 4.3

Strategiile pure ale jucătorului B	Valoarea medie a câştigului jucătorului A
B_1	$\nu = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 =$ $= a_{11}p_1 + a_{21}(1 - p_1) = a_{21} + (a_{11} - a_{21})p_1$
B_2	$\nu = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 =$ $= a_{12}p_1 + a_{22}(1 - p_1) = a_{22} + (a_{12} - a_{22})p_1$
...	.....
B_n	$\nu = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 =$ $= a_{1n}p_1 + a_{2n}(1 - p_1) = a_{2n} + (a_{1n} - a_{2n})p_1$

Din tabel observăm că câştigul ν depinde liniar de p_1 $(0 \leq p_1 \leq 1)$ pentru oricare strategie pură a jucătorului B. Prin urmare, geometric vom avea n drepte fiecare trasată prin perechea de puncte $(p_1 = 0; \nu = a_{2j})$, $(p_1 = 1; \nu = a_{1j})$, $j = \overline{1,n}$. Cele mai mici câştiguri ale jucătorului A se vor situa pe o linie frântă formată de intersecţia dreptelor trasate. Din această mulţime se alege câştigul cel mai mare (a se vedea exemplul de mai jos, figura 4.4).

Exemplul 4.5. Să se rezolve jocul cu matricea de plată

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. În problema propusă primul jucător dispune de două strategii A_1 şi A_2 reprezentate prin liniile matricei. Cel de al doilea jucător are

la dispoziţie patru strategii B_1, B_2, B_3 şi B_4 reprezentate prin coloanele matricei. Jocul începe cu mişcarea primului jucător, adică acesta alege primul strategia sa (una din cele două linii ale matricei), după ce al doilea răspunde, alegând una din strategiile sale (una din coloanele matricei). Jocul continue prin alegeri succesive şi se încheie conform regulamentului, cunoscut din start de către fiecare jucător. Astfel, dacă primul jucător alege strategia A_1 (prima linie din matrice), iar al doilea răspunde cu strategia B_2 (coloana a doua a matricei) atunci primul va avea un câştig în valoare de trei unităţi, iar al doilea – o pierdere egală cu trei unităţi.

Având matricea de plată, fiecare jucător, înainte de a începe jocul, va examina strategiile sale, ţinând cont de principiul de dominare între strategii cu scopul de a elimina strategiile neconvenabile

Uşor stabilim că primul jucător nu dispune de strategii dominate, adică din matricea de plată nu se va elimina careva din linii. Examinând strategiile celui de al doilea jucător, observăm că strategia B_4 conţine pierderi mai mari decât pierderile respective din strategia B_2. Prin urmare B_2 domină B_4 ($B_2 \succ B_4$) şi B_4 se elimină din matricea de plată. Rămâne matricea $C' = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, care nu mai conţine strategii dominate, şi, prin urmare, nu poate deveni mai simplă. Acum rezolvăm jocul primului jucător. Acesta pe tot parcursul jocului aplică strategia sa mixtă $P = (p_1, p_2) = (p_1, 1 - p_1)$, iar al doilea îi răspunde succesiv cu câte una din strategiile sale pure. Valorile medii ale câştigurilor primului jucător vor fi:

$$\begin{aligned} \nu &= 5p_1 + 2p_2 = 5p_1 + 2(1 - p_1) = 2 + 3p_1, & d_1 &: \nu = 2 + 3p_1, \\ \nu &= 3p_1 + 6p_2 = 3p_1 + 6(1 - p_1) = 6 - 3p_1, & d_2 &: \nu = 6 - 3p_1, \\ \nu &= 7p_1 + p_2 = 7p_1 + 1 - p_1 = 1 + 6p_1, & d_3 &: \nu = 1 + 6p_1. \end{aligned}$$

Avem trei ecuaţii liniare cu două necunoscute p_1 şi ν. Fiecare din ecuaţii reprezintă geometric (grafic) o dreaptă d_1, d_2 şi d_3, respectiv, în sistemul cartezian $p_1 O \nu$. Vom ţine cont de faptul că p_1 poate lua valori doar pe domeniul $[0; 1]$ şi vom trasa doar segmentele dreptelor respective, unde $p_1 \in [0; 1]$. Astfel venim la figura 4.4 (în punctul $p_1 = 1$, pentru comoditate, este trasată o dreaptă auxiliară perpendiculară axei absciselor). Pe parcursul jocului primul jucător se conduce de principiul *maximin*, adică selectează mai întâi toate câştigurile garantate (acestea fiind cele mai mici) pentru orice $p_1 \in [0; 1]$. În figura 4.4 ele se află pe linia frântă haşurată, după ce, din mulţimea obţinută, alege câştigul maxim. În cazul dat câştigul maximal al primului jucător este determinat de punctul

$M\,(p_1^*;\ \nu^*)$, format de intersecţia dreptelor d_1 şi d_2.

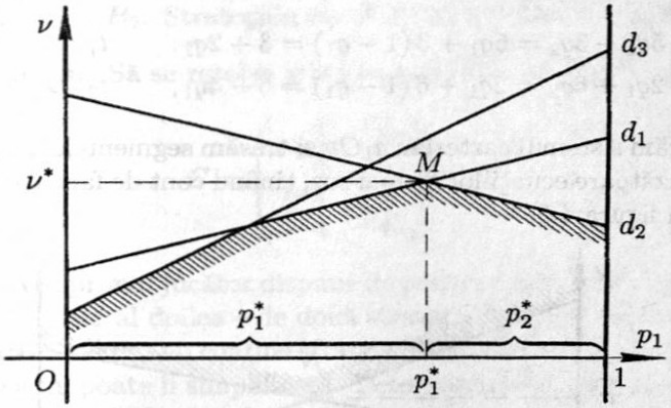


Figura 4.4

Determinăm coordonatele punctului M rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \nu = 2 + 3p_1, \\ \nu = 6 - 3p_1. \end{cases}$$

Obţinem $p_1 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ şi $\nu = 4$. Astfel, strategia mixtă optimă a primului jucător este

$$P^* = \left(p_1^* = \frac{2}{3};\ p_2^* = 1 - p_1^* = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\right),\ \nu = 4.$$

Soluţia obţinută arată că pe parcursul jocului în 2/3 din numărul total de partide primul jucător alege strategia A_1 şi în 1/3 din toate partidele aplică strategia A_2. Câştigul mediu ν constituie 4 unităţi.

Rezolvăm acum jocul pentru al doilea jucător. Începem acest lucru cu examinarea schemei din figura 4.4. Observăm că punctul M în care primul jucător obţine soluţie optimă este intersecţia dreptelor d_1 şi d_2 care reprezintă strategiile pure B_1 şi B_2 ale jucătorului al doilea. Strategiile jucătorului al doilea care formează punctul optim M (soluţia optimă) în jocul primului jucător se vor numi strategii active ale jucătorului al doilea, iar celelalte – strategii pasive ale acestuia. Jucătorul al doilea nu va utiliza strategiile sale pasive pe parcursul jocului, deci probabilităţile acestora vor fi egale cu zero. Astfel, în problema propusă, strategia mixtă a jucătorului al doilea are componentele $(q_1;\ q_2;\ 0;\ 0)$, unde $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$

şi $q_1 + q_2 = 1$, iar pierderile medii se vor determina prin relaţiile

$$\nu = 5q_1 + 3q_2 = 5q_1 + 3(1 - q_1) = 3 + 2q_1, \qquad l_1 : \nu = 3 + 2q_1,$$
$$\nu = 2q_1 + 6q_2 = 2q_1 + 6(1 - q_1) = 6 - 4q_1, \qquad l_2 : \nu = 6 - 4q_1.$$

Considerăm sistemul cartezian $q_1 O\nu$ si trasăm segmentele dreptelor l_1 si l_2 corespunzătoare ecuaţiilor de mai sus, ţinând cont de faptul că $0 \leq q_1 \leq 1$. Obţinem figura 4.5.

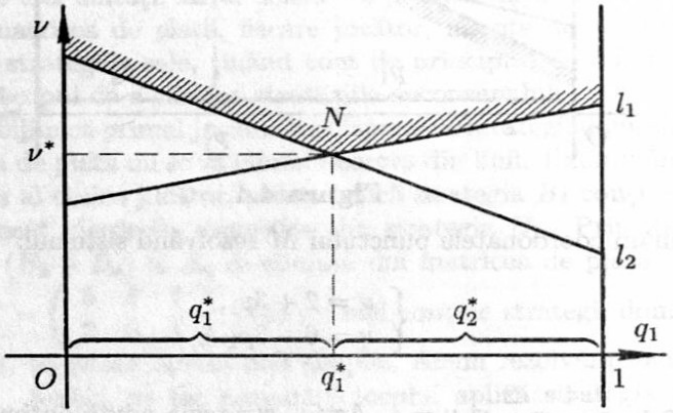


Figura 4.5

Pe parcursul jocului al doilea jucător acţionează conform principiului *minimax*, adică selectează mai întâi toate pierderile *maximale posibile* (în figura 4.5 acestea sunt situate pe linia frântă haţurată), după ce, din mulţimea obţinută, selectează *cea mai mică* pierdere. În cazul dat aceasta se află în punctul N – intersecţia dreptelor l_1 şi l_2. Rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \nu = 3 + 2q_1, \\ \nu = 6 - 4q_1, \end{cases}$$

şi stabilim că coordonatele punctului N sunt: $N\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ ţi $q_2^* = 1 - q_1^* = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Astfel, strategia mixtă a jucătorului al doilea este:

$$Q^* = \left(q_1^* = \frac{1}{2}; q_2^* = \frac{1}{2}; q_3^* = 0; q_3^* = 0\right)$$

ţi pierderea medie minimală $\nu = 4$.

Prin urmare, o jumătate din numărul total de partide jucătorul al doilea operează (nu neapărat consecutiv) cu strategia sa pură B_1, iar a doua jumătate – cu B_2. Strategiile B_3 şi B_4 nu se aplică. #

Exemplul 4.6. Să se rezolve jocul cu matricea de plată

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -1 \\ -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Aici primul jucător dispune de patru strategii A_1, A_2, A_3, A_4 (liniile matricei), iar al doilea – de două strategii B_1 şi B_2 (coloanele matricei). Matricea jocului nu conţine strategii dominate nici pentru unul din jucători, adică nu poate fi simplificată. Determinăm valoarea inferioară α şi valoarea superioară β a jocului dat:

$$\alpha = \max(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4) = \max(-3; -1; -2; -4) = -1.$$

$$\beta = \min(\beta_1; \beta_2) = \min(4; 4) = 4$$

Constatăm că $-1 < 4$. Deci $\alpha < \beta$ şi, prin urmare, jocul nu are soluţii în strategii pure şi poate fi rezolvat doar în strategii mixte.

Mai întâi vom rezolva jocul pentru jucătorul al doilea, deoarece el dispune doar de două strategii. Rezultatele calculelor le prezentăm în tabelul 4.4.

Tabelul 4.4

Strategiile pure ale jucătorului A	Valorea medie a pierderii jucătorului B	
A_1	$\nu = 4q_1 - 3q_2 = 4q_1 - 3(1-q_1) = -3 + 7q_1$	$: (l_1)$
A_2	$\nu = 3q_1 - q_2 = 3q_1 - (1-q_1) = -1 + 4q_1$	$: (l_2)$
A_3	$\nu = -2q_1 + 3q_2 = -2q_1 + 3(1-q_1) = 3 - 5q_1$	$: (l_3)$
A_4	$\nu = -4q_1 + 4q_2 = -4q_1 + 4(1-q_1) = 4 - 8q_1$	$: (l_4)$

Fiecărei strategii pure A_i a jucătorului A îi corespende, respectiv, ecuaţia unei drepte l_i, $i = \overline{1,4}$ în planul $q_1 O \nu$. Reprezentăm în fâşiea cuprinsă între dreptele de ecuaţiile $q_1 = 0$ şi $q_1 = 1$ segmentele respective ale dreptelor l_i. Se obţine figura 4.6.

Deoarece al doilea jucător se conduce de principiul *minimax*, vom considera partea superioară a fâşiei, adică domeniul mărginit inferior de segmentele haşurate. Punctul $N(q_1^*; \nu^*)$ al acestui domeniu, care are cea mai

mică ordonată determină soluţia optimă a problemei pentru jucătorul al doilea.

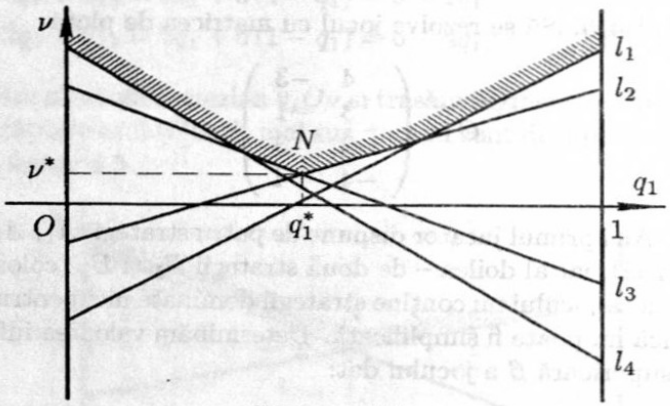


Figura 4.6

Din figura 4.6 observăm că punctul N se află la intersecţia dreptelor (l_2) şi (l_3). Deci strategiile A_2 şi A_3 sunt strategii active, iar strategiile A_1 şi A_4 sunt strategii pasive. Cu ecuaţiile dreptelor l_2 şi l_3 formăm sistemul:

$$\begin{cases} \nu = -1 + 4q_1, \\ \nu = 3 - 5q_1. \end{cases}$$

Din acest sistem determinăm coordonatele punctului N, adică $q_1^* = \frac{4}{9}$ şi $\nu^* = \frac{7}{9}$, iar $q_2^* = 1 - q_1^* = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Astfel, soluţia optimă a jucătorului al doilea (în strategii mixte) este:

$$Q^* = \left(q_1^* = \frac{4}{9};\ q_2^* = \frac{5}{9}\right), \quad \nu^* = \frac{7}{9}.$$

Acum vom rezolva jocul pentru primul jucător. Strategiile pasive ale primului jucător la rezolvarea jocului nu participă, adică $p_1^* = 0$ şi $p_4^* = 0$. Rezultatele calculelor le prezentăm în tabelul 4.5.

Tabelul 4.5

Strategiile pure ale jucătorului B	Valoarea medie a câştigului jucătorului A
B_1	$\nu = 3p_2 - 2p_3 = 3p_2 - 2(1 - p_2) = -2 + 5p_2 \quad : (d_1)$
B_2	$\nu = -p_2 + 3p_3 = -p_2 + 3(1 - p_2) = 3 - 4p_2 \quad : (d_2)$

Fiecărei strategii pure B_j a jucătorului B îi corespende, respectiv, ecuaţia unei drepte d_j, $j = \overline{1,2}$ în planul $p_2 O\nu$. Reprezentăm în făşiea cuprinsă între dreptele de ecuaţiile $p_2 = 0$ şi $p_2 = 1$ segmentele respective ale dreptelor d_j. Se obţine figura 4.7.

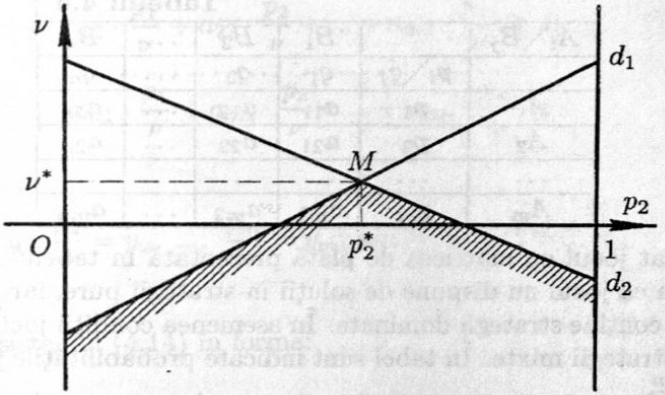


Figura 4.7

Deoarece primul jucător se conduce de principiul *maximin*, vom considera partea inferioară a făşiei, adică domeniul mărginit superior de segmentele haşurate. Punctul $M(p_2^*; \nu^*)$ al acestui domeniu, care are cea mai mare ordonată determină soluţia optimă a problemei pentru primul jucător. Din figura 4.7 observăm că punctul M se află la intersecţia dreptelor d_1 şi d_2. Cu ecuaţiile dreptelor d_1 şi d_2 formăm sistemul:

$$\begin{cases} \nu = -2 + 5p_2, \\ \nu = 3 - 4p_2. \end{cases}$$

Din acest sistem determinăm coordonatele punctului M, adică $p_2^* = \dfrac{5}{9}$ şi $\nu^* = \dfrac{7}{9}$, iar $p_3^* = 1 - p_2^* = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$. Astfel, soluţia optimă a primului jucător (în strategii mixte) este:

$$P^* = \left(p_1^* = 0; p_2^* = \frac{5}{9}; p_3^* = \frac{4}{9}; p_4^* = 0\right), \quad \nu^* = \frac{7}{9}. \qquad \#$$

4.6 Rezolvarea jocurilor matriceale prin programarea liniară

Există mai multe metode de rezolvare a jocurilor matriceale: metodele aljebrică şi grafică pentru jocurile de dimensiuni 2×2, metoda grafică

pentru jocuri de dimensiuni $2 \times n$ şi $m \times 2$, metoda Lagranj şi metoda Cramer pentru jocuri de dimensiuni $n \times n$ etc.

Metoda universală de rezolvare a jocurilor matriceale este programarea liniară.

Tabelul 4.6

$A_i \backslash B_j$		B_1	B_2	...	B_n
	$p_i \backslash q_j$	q_1	q_2	...	q_n
A_1	p_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	p_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_m	p_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Fie dat jocul cu matricea de plată prezentată în tabelul de mai sus. Admitem că jocul nu dispune de soluţii în strategii pure, iar matricea de plată nu conţine strategii dominate. În asemenea condiţii jocul are soluţii doar în strategii mixte. În tabel sunt indicate probabilităţile p_i, $i = \overline{1, m}$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ prin care primul jucător va alege strategiile A_i respectiv, formând astfel strategiile sale mixte $(p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_m)$. Jucătorul al doilea, în mod analog, îşi formează strategiile mixte $(q_1, q_2, ..., q_j, ..., q_n)$, $q_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Vom determina soluţia problemei, adică vom afla strategiile optime $P^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ şi $Q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ ale jucătorilor, cât şi valoarea ν a jocului.

Admitem că primul jucător aplică strategia sa optimă P^*, iar al doilea răspunde succesiv cu câte una din strategiile sale pure. Strategia optimă P^* asigură primului jucător un câştig nu mai mic decât valoarea ν a jocului, indiferent de acţiunile jucătorului al doilea. Acest fapt se poate prezenta prin următoarele relaţii:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + ... + a_{m1} \cdot p_m \geq \nu, \\ a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 + ... + a_{m2} \cdot p_m \geq \nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot p_1 + a_{m2} \cdot p_2 + ... + a_{mn} p_m \geq \nu, \end{cases} \tag{4.12}$$

unde

$$p_i \geq 0, \; i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1. \tag{4.13}$$

Realizăm cu relaţiile (4.12) câteva operaţii. Împărţim inecuaţiile sistemului (4.12) la $\nu > 0$ (ţinând de proprietăţile jocurilor matriceale exa-

minate mai sus putem modifica matricea de plată astfel încât ν să devină mărime strict pozitivă). Obţinem:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \dfrac{p_1}{\nu} + a_{21} \cdot \dfrac{p_2}{\nu} + \ldots + a_{m1} \cdot \dfrac{p_m}{\nu} \geq 1, \\ a_{12} \cdot \dfrac{p_1}{\nu} + a_{22} \cdot \dfrac{p_2}{\nu} + \ldots + a_{m2} \cdot \dfrac{p_m}{\nu} \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot \dfrac{p_1}{\nu} + a_{m2} \cdot \dfrac{p_2}{\nu} + \ldots + a_{mn} \cdot \dfrac{p_m}{\nu} \geq 1. \end{cases} \tag{4.14}$$

Notăm:

$$\frac{p_1}{\nu} = y_1, \ \frac{p_2}{\nu} = y_2, \ \ldots, \ \frac{p_m}{\nu} = y_m. \text{ sau } \frac{p_i}{\nu} = y_i, \ i = \overline{1, m}, \tag{4.15}$$

unde $y_i \geq 0$.
Prezentăm sistemul (4.14) în forma:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + a_{21} \cdot y_2 + \ldots + a_{m1} \cdot y_m \geq 1, \\ a_{12} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + \ldots + a_{m2} \cdot y_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot y_1 + a_{m2} \cdot y_2 + \ldots + a_{mn} \cdot y_m \geq 1, \end{cases} \quad y_i \geq 0, \ i = \overline{1, m}. \tag{4.16}$$

Adunând fracţiile (4.15) obţinem

$$\frac{p_1}{\nu} + \frac{p_2}{\nu} + \ldots + \frac{p_m}{\nu} = y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_m}{\nu} = \frac{1}{\nu},$$

adică

$$S(Y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_m = \frac{1}{\nu}. \tag{4.17}$$

Primul jucător tinde să obţină pe parcursul jocului un câştig ν cât mai mare, adică mărimea ν tinde să crească şi, prin urmare, funcţia $S(Y)$ este descrescătoare şi tinde către minimum. Deci avem

$$S(Y) \to \min. \tag{4.18}$$

Setul de relaţii (4.16)-(4.18) constituie o problemă de programare liniară cu criteriu de minimizare şi poate fi rezolvată prin metoda simplex.

Concluzie. Pentru a determina strategia mixtă optimală a primului jucător, adică vectorul $P^* = (p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*)$ trebuie de rezolvat o problemă tipică de programare liniară:

Să se afle valoarea minimală a funcţiei

$$S(Y) = y_1 + y_2 + ... + y_m = \frac{1}{\nu}, \tag{4.19}$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + a_{21} \cdot y_2 + ... + a_{m1} \cdot y_m \geq 1, \\ a_{12} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + ... + a_{m2} \cdot y_m \geq 1, \\ ..... \\ a_{m1} \cdot y_1 + a_{m2} \cdot y_2 + ... + a_{mn} \cdot y_m \geq 1, \end{cases} \quad y_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}, \tag{4.20}$$

unde $y_i = \frac{p_i}{\nu}$, iar ν – valoarea jocului.

Strategia $Q^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ optimă pentru jucătorul al doilea se obţine prin raţionamente similare, dar în acest caz se va ţine cont de faptul că aici mărimea ν constituie pierderea jucătorului al doilea şi el, jucând, tinde să-şi minimizeze pierderea, adică să maximizeze valoarea mărimii $\frac{1}{\nu}$. Strategia optimă Q^* trebuie să-i asigure jucătorului al doilea pierdere, care să nu depăşească valoarea ν a jocului, indiferent de acţiunile primului jucător, şi doar în cazul în cere acesta aplică strategia sa optimă, pierderea jucătorului al doilea este egală cu valoarea ν a jocului. Prin urmare, restricţiile problemei în acest caz vor fi de forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq 1$.

Astfel, rezolvarea jocului pentru cel de al doilea jucător conduce de asemenea la rezolvarea unei probleme de programare liniară

$$F(X) = x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{1}{\nu} \to \max, \tag{4.21}$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n \leq 1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n \leq 1, \\ ..... \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n \leq 1, \end{cases} \quad x_j \geq 0,\ j = \overline{1; n}, \tag{4.22}$$

unde $x_j = \frac{p_j}{\nu}$. Comparând problemele (4.19)-(4.20) şi (4.21)-(4.22) constatăm că împreună ele formează un cuplu de probleme în dualitate.

Din cele relatate mai sus constatăm că orice joc matriceal $(m \times n)$ se modelează printr-un cuplu de probleme de programare liniară şi se rezolvă prin metoda simplex. Ţinând cont de proprietăţile soluţiilor optime ale cuplului, rezolvăm doar una din ele şi în tabelul final al rezolvării acesteia

găsim soluţiile optime ale ambelor probleme din cuplu. De regulă se rezolvă problema pentru jucătorul al doilea, fiindcă astfel se evită implicarea variabilelor artificiale.

Exemplul 4.7. Revenim la jocul cu următoarea matrice de plată:

Tabelul 4.7

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	4	5	6	2	3	2
A_2	1	9	5	4	4	1
A_3	10	4	1	8	7	1
A_4	5	6	3	5	9	$\boxed{3}$
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	10	9	$\boxed{6}$	8	9	

Am stabilit că acest joc nu are soluţii în strategii pure (nu are puncte şa) fiindcă $\alpha < \beta$ $(3 < 6)$. Deci jocul are soluţii în strategii mixte. Strategia mixtă a primului jucător constitue vectorul $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, iar pentru al doilea – vectorul $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$. Formăm modelul liniar al problemei pentru jucătorul al doilea. Obţinem:

$$F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{1}{\nu} \to \max,$$

Cu restriţiile

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 \le 1, \\ x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 \le 1, \\ 10x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 + 7x_5 \le 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 9x_5 \le 1, \end{cases}$$

unde

$$x_1 = \frac{q_1}{\nu},\ x_2 = \frac{q_2}{\nu},\ x_3 = \frac{q_3}{\nu},\ x_4 = \frac{q_4}{\nu},\ x_5 = \frac{q_5}{\nu},$$

$$\nu > 0,\ q_j \ge 0,\ j = \overline{1,5},\ \sum_{j=1}^{5} q_j = 1.$$

Rezolvând problema prin metoda simplex, obţinem:

$$X^* = \left(\frac{2}{119}; 0; \frac{15}{119}; \frac{3}{34}; 0; 0; 0; 0; \frac{23}{238}\right), \quad F(X^*) = \frac{55}{238}.$$

$$Y^* = \left(\frac{19}{238}; \frac{11}{119}; \frac{1}{17}; 0; 0; \frac{111}{238}; 0; 0; \frac{5}{238}\right).$$

Tinem cont de fatul că $F(X^*) = \frac{1}{\nu}$, unde ν este valoarea jocului şi, prin urmare, $\nu = \frac{238}{55}$. Totodată avem $y_i = \frac{p_i}{\nu}$ sau $p_i = y_i \cdot \nu$, $i = \overline{1;4}$. Deci

$$p_1 = y_1 \cdot \nu = \frac{19}{238} \cdot \frac{238}{55} = \frac{19}{55}; \qquad p_2 = y_2 \cdot \nu = \frac{11}{119} \cdot \frac{238}{55} = \frac{22}{55};$$
$$p_3 = y_3 \cdot \nu = \frac{1}{17} \cdot \frac{238}{55} = \frac{14}{55}; \qquad p_4 = y_4 \cdot \nu = 0 \cdot \frac{238}{55} = 0.$$

Astfel, strategia mixtă optimală a primului jucător este

$$P^* = (p_1^*; p_2^*; p_3^*; p_4^*) = \left(\frac{19}{55}; \frac{14}{55}; \frac{22}{55}; 0\right), \quad \sum_{i=1}^{4} p_i = 1,$$

iar valoarea jocului este $\nu = \frac{238}{55}$.

În mod analog determinăm strategia mixtă optimală pentru al doilea jucător, adică

$$q_1 = x_1 \cdot \nu = \frac{2}{119} \cdot \frac{238}{55} = \frac{4}{55}; \qquad q_2 = x_2 \cdot \nu = 0 \cdot \frac{238}{55} = 0;$$
$$q_3 = x_3 \cdot \nu = \frac{15}{119} \cdot \frac{238}{55} = \frac{30}{55}; \qquad q_4 = x_4 \cdot \nu = \frac{3}{34} \cdot \frac{238}{55} = \frac{21}{55};$$
$$q_5 = x_5 \cdot \nu = 0 \cdot \frac{238}{55} = 0.$$

Prin urmare

$$Q^* = (q_1^*; q_2^*; q_3^*; q_4^*; q_5^*) = \left(\frac{4}{55}; 0; \frac{30}{55}; \frac{21}{55}; 0\right), \quad \sum_{j=1}^{5} q_j = 1, \quad \nu = \frac{238}{55}. \#$$

Exemplul 4.8. O firmă comercială a elaborat câteva variante de plan pentru vânzarea mărfurilor sale la un iarmaroc în funcţie de conjunctura pieţei şi a cererei cumpărătorilor. În rezultatul combinărilor acestor indicatori s-a obţinut următorul tabel pentru venitul firmei:

Tabelul 4.8

Planul de vânzări	Valoarea venitului, un. monetare				
	C_1	C_2	C_3	C_4	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
P_1	8	4	2	2	2
P_2	2	8	4	6	2
P_3	1	2	8	5	1
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	8	8	8	6	

Rezolvare. Modelăm problema printr-un joc matriceal în care primul jucător este firma, iar al doilea esta piaţa cu conjuncturile sale. Constatăm că jocul nu are soluţii în strategii pure (nu are puncte şa, fiindcă valoarea inferioară $\alpha = 2$, iar valoarea superioară $\beta = 6$, adică $\alpha < \beta$) şi, totodată matricea de plată nu conţine strategii dominate, deci nu poate fi simplificată. Prin urmare jocul dispune doar de soluţii în strategii mixte. Notăm prin p_1 probabilitatea că firma aplică planul P_1, prin p_2 – probabilitatea că aplicâ planul P_2 şi prin p_3 – probabilitatea că aplică planul P_3. Prin q_1, q_2, q_3 şi q_4 notăm probabilităţile conjuncturilor posibile ale pieţi. Astfel, strategia mixtă a primului jucător este $P = (p_1, p_2, p_3)$, iar a celui de al doilea – $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$. Rezolvăm jocul prin metoda simplex, utilizând modelul liniar pentru jucătorul al doilea. Avem:

$$F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{\nu} \to \max,$$

cu restricţiile

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 1, \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 6x_4 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 \le 1, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Prezentăm doar tabelul siplex final al rezolvării problemei

Tabelul 4.7

			1	1	1	1	0	0	0
B	C_b	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1	3/16	1	7/4	0	0	7/24	-1/16	-1/24
x_2	1	1/16	0	5/4	0	1	-1/8	5/16	-1/8
x_3	1	1/16	0	-3/4	1	0	1/24	-3/16	5/24
Δ_j		5/16	0	5/4	0	0	5/24	1/16	1/24
			y_4^*	y_5^*	y_6^*	y_7^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

Din tabelul obţinut constatăm

$$X^* = \left(x_1^* = \frac{3}{16};\ x_2^* = 0;\ x_3^* = \frac{1}{16};\ x_4^* = \frac{1}{16};\ x_5^* = 0;\ x_6^* = 0;\ x_7^* = 0\right)$$

şi $F(X^*) = \dfrac{5}{16} = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = \dfrac{16}{5}$.

Această soluţie se referă la al doilea jucător (asociat cu conjunctura pieţei). Soluţia optimă a modelului linar care se referă la firma comercială

(primul jucător) este:

$$Y^* = \left(y_1^* = \frac{5}{24};\ y_2^* = \frac{1}{16};\ y_3^* = \frac{1}{24};\ y_4^* = 0;\ y_5^* = \frac{5}{4};\ y_6^* = 0;\ y_7^* = 0\right)$$

Ţinând cont de faptul că $y_i = \dfrac{p_i}{\nu}$, $i = \overline{1;3}$ obţinem:

$$p_1 = y_1 \cdot \nu = \frac{5}{24} \cdot \frac{16}{5} = \frac{2}{3}; \qquad p_2 = y_2 \cdot \nu = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{5} = \frac{1}{5};$$

$$p_3 = y_3 \cdot \nu = \frac{1}{24} \cdot \frac{16}{5} = \frac{2}{15},$$

adică

$$P^* = \left(p_1^* = \frac{2}{3};\ p_2^* = \frac{1}{5};\ p_3^* = \frac{2}{15}\right),\ \nu = \frac{16}{5}.$$

Prin urmare, dacă pe parcursul iarmarocului firma se va conduce de strategia P^* ea va obţine un venit nu mai mic de $\dfrac{16}{5}$ unităţi monetare. #

5 Luarea deciziilor în condiţii de risc şi incertitudine

Situaţiile examinate mai sus constitue clasele de probleme de luare a deciziilor în condiţii de certitudine şi de conflict, adică se examinează cazuri în care decidentul dispune de toată informaţia necesară pentru a alege varianta optimă de decizie din mai multe variante disponibile. Astfel de situaşii deseori se pot exprima atât prin modele liniare cât şi neliniare.

În condiţii economice reale situaţiile de certitudine pot fi întâlnite mai frecvent în cazurile în care se examinează probleme pentru intervale limitate de timp. Este bine cunoscut faptul că pe parcursul unei durate mai mari de timp starea în economie se schimbă, şi în asemenea situaţii deciziile se adoptă fără a dispune de toată informaţia necesară. Spre exemlu, nu se ştie cu certitudine, care va fi cererea pieţei pentru un anumit produs în următoarea perioadă de timp, care va fi volumul transporturilor pe căile ferate, ce decizii va adopta guvernul într-un anumit domeniu, care vor fi condiţiile climaterice într-o anumită regiune peste câteva luni etc. Acest gen de condiţii (evenimente, fenomene, etc.) în care decidentul trebue să aleagă decizia optimă, în cele ce urmează, se vor numi "stări ale naturii". Problemele deciziţionale în situaţiile în care informaţia cu privire la stările naturii este incompletă sau total lipseşte se împart în două clase:

- luarea deciziilor în condiţii de risc,
- luarea deciziilor în condiţii de incertitudine.

5.1 Luarea deciziilor în condiţii de risc

În cele ce urmează (ca şi până acum) în calitate de criteriu de optimalitate a unei decizii vom utiliza speranţa matematică a câştigului (pierderii).

Aşadar, ce înseamnă "risc"? O definiţie generală şi concludentă pentru această noţiune nu există. *În economie, de regulă, prin noţiunea "risc" se exprimă situaţia în care în cadrul unei anumite operaţii nu se va înregistra (nu se va obţine) rezultatul scontat (aşteptat) ca urmare a evoluţiei factorilor de care depinde acest rezultat.* Or, rezultatul real al operaţiei poate fi diferit (mai mare sau mai mic) de cel aşteptat. Prin urmare, există o abatere (o deviere) de la rezultatul scontat. În multe situaţii din domeniul economiei anume această abatere constitue sensul noţiunei de risc. Astfel,

apare necesitatea de a măsura abaterea, adică de a măsura riscul posibil, care poate apărea în reziltatul realizării anumitei acţiuni.

Problemele de decizie în condiţii de risc se caracterizează prin următoarele:

a. decidentul cunoaşte variantele sale de decizie;

b. decidentul cunoaşte stările posibile ale naturii;

c. cunoaşte rezultatele alegerii fiecărei variante de decizie pentru fiecare stare a naturii;

d. cunoaşte (sau poate calcula) probabilitatea cu care poate apărea fiecare stare a naturii.

Prezenţa probabilităţilor de apariţie a stărilor naturii permit să se calculeze nu doar speranţa matematică a câştigului (acesta este "câştigul scontat"), dar şi a abaterilor de la speranţa matematică. Astfel criteriul prin care se alege decizia optimă poate deven unul complex, care să se exprime prin combinaţia dintre valoarea sperată (speranţa matematică) a câştigului (pierderii) şi dispersia acestei valori. Vom examina următoarea situaţie

Problemă. Firma A planifică să lanseze pe piaţă, în sezonul de vară care urmează, una din mărfurile sale A_1 şi A_2, iar firma B intenţionează să lanseze unul din produsele sale B_1, B_2, B_3 sau B_4. Produsele A_1 şi B_1 sunt concurente (spre exemplu, apă minerală şi bere), iar A_1 şi B_4 sunt complementare (smântână şi brânză de vaci). Celelalte perechi de produse sunt neutre. Venitul firmei A depinde de combinaţia de produse lansate pe piaţă de către ambele firme şi se determină conform tabelului prezentat. A şi B sunt firme concurente pe piaţă, dar se ştie că B scoate pe piaţă produsul B_4 de trei ori mai rar decât B_1, de două ori mai rar decât B_2 şi de patru ori mai rar decât B_3. Care marfă (din cele două disponibile) trebue să lanseze pe piaţă firma A.

Tabelul 5.1

	0,3	0,2	0,4	0,1
$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	11	21	30	43
A_2	23	18	25	26

Rezolvare. Considerăm situaţia formulată ca o problemă de luare a deciziei în care decidentul este firma A. Situaţia poate fi modelată printr-un

joc matriceal, asfel că primul jucător este decidentul (firma A), iar al doilea este natura (firma B) cu patru stări posibile - mărfurile firmei B care pot apărea pe piaţă. Tabelul prezentat poate fi considerat matrice de plată a jocului. Ţinând cont de raporturile de apariţie pe piaţă a mărfurilor firmei B pot fi determinate probabilităţile acestor apariţii, adică probabilităţile stărilor naturii. Fie x – cota apariţiei pe piaţă a produsului B_4. Atunci cota apariţiei produsului B_1 este $3x$, a produsului B_2 este $2x$, iar a produsului B_3 este $4x$, asfel încât $3x + 2x + 4x + x = 1$, adică $x = 0,1$. Prin urmare probabilităţile de apariţie pe piaţă a mărfurilor firmei B vor fi respectiv $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,4$; şi $p_4 = 0,1$. Asfel venim la o problemă de decizii în condiţii de risc. Rezolvarea unor asemenea probleme se reduce la compararea variabilelor aleatoare. În cazul dat trebue comparate variabila A_1 cu A_2, având repartiţiile acestora.

Tabelul 5.2 (T1)

A_1	11	21	30	43
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Tabelul 5.3 (T2)

A_2	23	18	25	28
P	0,3	0,2	0,4	0,1

Variabilele aleatoare se compară utilizând caracteristicele lor numerice. Prima caracteristică numerică a unei variabile aleatoare X este valoarea medie (sau speranţa matematică) a acesteia.

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n.$$

În cazul problemei examinate vom nota speranţele matematice prin $E(A_1)$ şi $E(A_2)$. Obţinem:

$$E(A_1) = 11 \cdot 0,3 + 21 \cdot 0,2 + 30 \cdot 0,4 + 43 \cdot 0,1 = 23,8,$$
$$E(A_2) = 23 \cdot 0,3 + 18 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,4 + 28 \cdot 0,1 = 23,3.$$

Deci, dacă în problema dată (care este o problemă de decizii în codiţii de risc) vom utiliza în calitate de criteriu de optimalitate speranţa matematică a venitului firmei A, atunci firma A trebue să lanseze pe piaţă marfa sa A_1, cu speranţa că va obţine un venit de 23,8 unităţi monetare. Dacă firma A ar lansa pe piaţă marfa A_2 s-ar putea aştepta la un venit de 23,3 unităţi monetare, adică doar cu 0,5 u.m. mai puţin. De menţionat, că valorile sperate ale veniturilor $E(A_1) = 23,8$ şi $E(A_2) = 23,3$ se vor realiza doar în cazul în care evenimentul studiat (lansările) se vor repeta în aceleaşi condiţii de un număr de ori suficient de mare. Numai în astfel de condiţii criteriul de optimalitate "speranţa matematică" (valoare aşteptată) poate fi justificat. În problema examinată avem două variante

de decizie A_1 şi A_2 cu valori aşteptate aproximativ egale. Prin urmare, dacă în calitate de variantă optimă de decizie vom alege varianta A_1 (care are speranţă matematică doar puţin mai mare decât A_2) această alegere nu va fi una suficient de concludentă. Dacă revenim la variabilele aleatoare A_1 şi A_2 (repartiţiile cărora sunt prezentate mai sus) conchidem că la nivel de speranţe matematice ele sunt greu de comparat. Deci pentru a obţine o viziune mai clară cu privire la deosebirea dintre A_1 şi A_2 sunt necesare informaţii suplimentare referitoare la aceste variabile pentru a le diferenţia mai clar. În calitate de astfel de informaţii pot servi abaterile valorilor variabilelor de la speranţele matematice respective (valoarea aşteptată). În tabelul 5.4 sunt prezentate abaterile posibile ale veniturilor firmei A de la venitul aşteptat pentru ambele variante de acţiune (de decizie) ale firmei.

Tabelul 5.4

	0,3	0,2	0,4	0,1
A_1	-12,8	-2,8	6,2	19,2
A_2	-0,3	-5,3	1,7	4,7

În teoria probabilităţilor în calitate de măsură a abaterilor valorilor unei variabile aleatoare X de la speranţa matematică a acesteia $E(X)$ (măsura împrăştierei valorilor în raport cu "centrul") se aplică abaterea medie pătratică $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, unde $D(X)$ este dispersia variabilei X definită prin relaţia

$$D(X) = M[X - E(X)]^2. \tag{5.1}$$

Aici $X - E(X)$ constitue abaterile valorilor variabilei X de la speranţa matematică$E(X)$. Dispersia $D(X)$ mai poate fi calculată şi prin relaţia

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{5.2}$$

Pentru problemele de decizie în condiţii de risc în calitate de indicator al riscului se poatei aplică abaterea medie pătratică σ.

Aşadar, calculăm abaterile medii pătratice $\sigma(A_1)$ şi $\sigma(A_2)$ pentru fiecare variantă disponibilă de decizie a firmei A, aplicând relaţia (5.1) şi abaterile de la speranţa matematică prezentate în tabelul5.4:

$$\sigma(A_1) = \sqrt{D(A_1)} =$$
$$= \sqrt{(-12,8)^2 \cdot 0,3 + (-2,8)^2 \cdot 0,2 + (6,2)^2 \cdot 0,4 + (19,2)^2 \cdot 0,1} =$$
$$= \sqrt{49,152 + 1,158 + 15,376 + 36,864} = \sqrt{102,96} \approx 10,15.$$

Astfel $\sigma(A_1) = 10,15$. În mod analog determinăm că $\sigma(A_2) = 2,74$. Deci, dacă acceptăm în calitate de măsură a riscului abaterea medie pătratică σ, venim la concluzia, că în cazul în care firma A va decide să lanseze pe piaţă marfa sa A_1, ea va avea un venit în valoare de $23,8 \pm 10,15$ unităţi monetare, iar dacă va decide să lanseze marfa A_2, venitul va constitui $23,3 \pm 2,74$ unităţi monetare.

Un indicator mai frecvent utilizat, dar şi mai semnificativ în estimarea riscului este *coeficientul de variaţie al variabilei aleatoare*, care în problemele de decizie în condiţii de risc se mai numeşte *coeficient de risc şi se notează prin* r. Valoarea lui r se calculează în procente prin relaţia

$$r(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)} \cdot 100\%, \tag{5.3}$$

unde $E(X)$ este speranţa matematică a variabilei aleatoare X, iar $\sigma(X)$ – abaterea medie pătratică a acesteia. *Coeficientul de risc constitue mărimea riscului calculat pentru o unitate monetară obţinută din venit.* Pentru variantele de decizie A_1 şi A_2 avem respectiv:

$$r(A_1) = \frac{\sigma(A_1)}{E(A_1)} \cdot 100\% = \frac{10,15}{23,8} \cdot 100\% \approx 42,6\%,$$

$$r(A_2) = \frac{\sigma(A_2)}{E(A_2)} \cdot 100\% = \frac{2,74}{23,3} \cdot 100\% \approx 11,8\%.$$

Prezentăm informaţia obţinută din rezolvarea problemei în tabelul 5.5.

Tabelul 5.5

	0,3	0,2	0,4	0,1			
$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	$E(A_i)$	$\sigma(A_i)$	$r(A_i)\%$
A_1	11	21	30	43	23,8	10,15	42,6
A_2	23	18	25	26	23,3	2,74	11,8

În tabelul 5.5 se conţine o informaţie mai amplă şi mai clară pentru a observa distincţia dintre cele două variante disponibile de decizie. În caz că decidentul va alege în calitate de decizie optimă varianta A_1 venitul aşteptat va fi puţin mai mare decât în varianta A_2 $(23,8 > 23,3)$, dar riscul că acest venit nu se va realiza va fi cu mult mai mare pentru A_1 decât pentru A_2 $(42,6 > 11,8)$. În astfel de situaţii alegerea deciziei optime în careva măsură depinde şi de particularităţile de caracter (psihologice) ale decidentului. Dacă acesta este o persoană mai conservativă şi mai prudentă, nepredispusă spre risc, atunci va decide să aleagă varianta A_2,

mizând la un venit mai mic dar mai sigur. În cazul în care decidentul este înclinat spre risc, el ar putea considera prioritar venitul mai mare şi ar putea alege varianta A_1. Deci în problemele de decizii în condiţii de risc decidentul are la dispoziţie doi factori pe care poate să-i utilizeze la alegerea deciziei optime – câştigul sperat $E(X)$ şi măsura riscului $\sigma(X)$ (sau $r(X)$ de a avea un câştig diferit de cel sperat.

Concluzie. *Decizia aparţine decidentului.*

Criteriile de decizie $E(X)$ şi $\sigma(X)$ pot fi combinate astfel ca ele să formeze un singur criteriu complex. În acest context o variantă simplă a unei asemenea combinaţii poate fi relaţia:

$$R(X,\lambda) = E(X) - \lambda\sigma(X). \tag{5.4}$$

În condiţiile de risc criteriul principal de optimalitate al deciziei este speranţa matematică $E(X)$ a câştigului (pierderii). Deci în relaţia (5.4) ponderea principală o are prima componentă $E(X)$, iar a doua $\lambda\sigma(X)$ are un rol auxiliar şi se aplică, de regulă, în situaţiile în care mărimea $E(X)$ nu este suficient de convingătoare pentru alegerea deciziei optime. Mărimea λ este o constantă valoarea căreia este menită să exprime "importanţa" componentei $\sigma(X)$ (abaterii medii pătratice), adică atitudinea decidentului faţă de risc. Astfel, dacă $\lambda > 0$ rezultanta câştigului $R(X,\lambda)$ este mai mică decât speranţa matematică $E(X)$. Asemenea situaţii se întâlnesc în cazurile în care decidentul este o persoană prudentă, nepredispusă spre risc. Se demonstrează, spre exzemplu, că pentru $\lambda = 3$ probabilitatea că valoarea câştigului nu se va "coborâ" mai jos de $E(X) - 3\sigma(X)$ este nu mai mică de $\frac{8}{9}$, adică 90%. Totodată, valorile λ caracterizează persoanele (decidenţii) predispuse spre risc.

O analiză mai detaliată pentru utilizarea parametrului λ nu se încadrează în limitele acestei lucrări.

5.2 Decizii în conditii de incertitudine

Problemele de decizie în condiţii de incertitudine (se mai numesc şi probleme de decizie în condiţii de incertitudine totală) se caracterizează prin următoarele:

- Decidentul cunoaşte mulţimea X ale tuturor alternativelor sale de acţiune;
- Decidentul cunoaşte mulţimea Y ale stărilor posibile ale naturii, dar nu

cunoaşte şi nici nu dispune de careva informaţie care i-ar permite să determine probabilităţile de apariţie ale acestor stări;

- Decidentul cunoaşte sau poate determina valorile rezultatelor care se vor obţine după aplicarea oricărei variante de acţiune şi pentru orice stare a naturii (valorile funcţiei de plată sau matricei de plată; se mai numeşte şi matrice decizională).

În asemenea condiţii decizia optimă se determină prin următoarea schemă: se porneşte de la o anumită ipoteză privind starea naturii, ipoteză care permite să se obţină o anumită estimaţie numerică pentru fiecare acţiune posibilă. Cunoscând estimaţiile tuturor alternativelor se poate alege alternativa cu cea mai preferată estimaţie. Aceasta va fi varianta optimă de decizie. Pentru alegerea deciziei optime în condiţii de incertitudine sunt elaborate mai multe criterii (reguli) cu caracter empiric. Alegerea unui anumit criteriu depinde de conţinutul concret al problemei propuse spre rezolvare, de particularităţile psihologice ale decidentului etc. Vom examina modalitatea de aplicare a câtorva criterii de decizie în condiţii de incertitudine mai frecvent utilizate.

Problemă. Un investitor a cumpărat un lot de pământ în apropierea drumului naţional şi doreşte să construiască pe el un motel pentru turişti. Investitorul are la dispoziţie patru variante de proiect pentru motel – cu 20, 30, 40, şi 50 de odăi. Evaluarea anticipată a cheltuielilor anuale pentru întreţinerea motelului constă din trei compartimente:

1. Cheltuieli care nu depind de numărul de odăi ale motelului (amenajarea teritoriului, lucrări de reparaţii în exterior, paza complexului etc.) 25500 u.m.

2. Cheltuieli anuale proporţionale cu numărul S de odăi ale motelului.(Tabelul 5.6).

Tabelul 5.6 (T1)

Numărul de odăi S	20	30	40	50
Cheltuieli u. m.	95500	143250	91000	238750

3. Cheltuieli anuale proporţionale numărului mediu R de odăi ocupate de către clienţi (Tabelul 5.7).

Tabelul 5.7 (T2)

Numărul de odăi ocupate R	0	10	20	30	40	50
Cheltuieli u. m.	0	36000	72000	108000	144000	180000

Câştigul investitorului este funcţie de numărul de odăi ocupate şi se prezintă în tabelul 5.8.

Tabelul 5.8 (T3)

Numărul de odăi ocupate R	0	10	20	30	40	50
Cîştig u. m.	0	219000	438000	657000	876000	1095000

Utilizând informaţia prezentată obţinem următoarea matrice decizională, elementele căreia constitue câştigul investitorului (mii unităţi monetare).

Tabelul 5.9

$S_i \backslash R_i$	0	10	20	30	40	50
20	-121	62	245	245	245	245
30	-168,75	14,25	197,25	380,25	380,25	380,25
40	-216,5	-33,5	149,5	332,5	515,5	515,5
50	-264,25	-81,25	101,75	284,75	467,75	650,75

5.2.1 Criteriul Vald sau maximin

Criteriului Vald i se mai spune "criteriul pesimistului" sau maximin $\max_i \left[\min_j a_{ij}\right]$. Prin acest criteriu se încearcă să se obţină un câştig garantat pentru fiecare stare a naturii. Decidentul consideră că natura este orietată contra lui şi-i permite să obţină doar cel mai mic câştig pentru fiecare variantă de decizie. Cel mai mic câştig este totodată şi câştigul garantat. *Principiul maximin are ca scop maximizarea câştigului garantat* (câştigului minimal) şi se realizează prin următoarele operaţii:

- Pentru fiecare variantă de decizie se alege şi se fixează valoarea minimă a câştigului (acesta este câştigul garantat în cadrul deciziei examinate);

- Din totalitatea de câştiguri minime obţinute după examinarea tuturor variantelor de decizie se alege câştigul maximal, iar varianta de decizie asociată acestui câştig este decizia optimă.

De regulă, principiul maximin se aplică de către persoanele cu un nivel sporit de prudenţă, persoane conservatoare sau cu înclinaţii spre pesimism. Partea slabă a criteriului Vald constă în faptul că la alegerea deciziei optime se ţine cont doar de variantele minime ale câştigurilor.

În cazul problemei propuse criteriul Vald conduce la următoarele:
Pentru prima variantă de decizie $(S_1 = 20)$ $\min\limits_j a_{1j} = -121$,
Pentru varianta a doua de decizie $(S_2 = 30)$ $\min\limits_j a_{2j} = -168,75$,
Pentru varianta a treia de decizie $(S_3 = 30)$ $\min\limits_j a_{3j} = -216,5$,
Pentru varianta a patra de decizie $(S_4 = 30)$ $\min\limits_j a_{4j} = -264,25$.
Prin urmare, în cazul în care proprietarul terenului va decide să accepte proiectul **motelului cu 20 de odăi** el ar putea avea pierdere, dar aceasta ar fi garantat nu mai mare de 121000 unităţi monetare.

5.2.2 Criteriul Laplace

În calitate de suport pentru criteriul Laplace serveşte postulatul Bayes prin care se afirmă: în cazul în care probabilităţile cărorva fenomene (evenimente) nu sunt cunoscute aceste probabilităţi trebuie considerate egale între ele. Postulatul Bayes se aplică la calcularea speranţei matematice a câştigului (pierderii) pentru fiecare variantă disponibilă de decizie. Din rezultatele obţinute se alege strategia care oferă câştigul sperat maximal. De regulă, criteriul Laplace se consideră mai potrivit pentru a elabora pronosticuri de lungă durată necesare unităţilor economice mari.

Pentru problema de mai sus natura are şase stări posibile şi probabilităţile tuturor au aceeaşi valoare egală cu $\frac{1}{6}$. Astfel, pentru prima variantă de decizie câştigul sperat este:

$$E(S_1) = \frac{1}{6}\cdot(-121) + \frac{1}{6}\cdot(62) + \frac{1}{6}\cdot(245) + \frac{1}{6}\cdot(245) + \frac{1}{6}\cdot(245) + \frac{1}{6}\cdot(245) = 153,5.$$

În mod analog determinăm

$$E(S_2) = 197,25, \quad E(S_3) = 210,5, \quad E(S_4) = 193,5.$$

În acest caz varianta optimă de decizie este S_3 conform căreia trebuie să se accepte **proiectul de motel cu 40 de odăi.**

Aici poate apărea anumită îndoială cu privire la ipoteza că probabilităţile tuturor stărilor naturii sunt aceleaşi.

5.2.3 Criteriul Hurwicz

Pentru fiecare variantă de decizie V_i, $i = \overline{1,m}$ se calculează perametrul h_i care constitue media ponderată a valorilor extreme M_i (valoarea cea

mai mare) şi m_i (valoarea cea mai mică) ale câştigului. Ponderea acestor mărimi se măsoară prin coeficientul de optimism notat prin α, care poate lua orice valoare pe domeniul [0; 1]. Astfel,

$$h_i = \alpha \cdot M_i + (1 - \alpha) \cdot m_i, \ i = \overline{1, m}.$$

Prin coeficientul de optimism α decidentul exprimă atitudinea sa subiectivă faţă de risc printr-un anumit nivel de optimism. Dacă decidentul este total pesimist atunci $\alpha = 0$ (nivelul de optimism este nul) şi criteriul Hurwicz se echivalează cu criteriul Vald. În cazul în care decidentul este persoană total optimistă $\alpha = 1$ şi criteriul Hurwicz conduce la rezultate identice cu rezultatele criteriului maximax.

În cazul problemei propuse mărimile h_i s-au calculat pentru două variante ale coeficientului de optimism, şi anume $\alpha = 0,2$ (decidentul este o persoană, care nu acceptă careva riscuri în perocesul de luare a deciziilor) şi $\alpha = 0,8$ (în majoritatea cazurilor decidentul alege decizia consiterată de el că ar fi una optimă fără a ocoli riscurile eventuale). Se obţin următoarele rezultate: Pentru $\alpha = 0,2$

$$h_1(S_1 = 20) = 0,2 \cdot 245 + 0,8 \cdot (-121) = -47,8,$$
$$h_1(S_2 = 30) = 0,2 \cdot 380,25 + 0,8 \cdot (-168,75) = -58,95,$$
$$h_1(S_3 = 40) = 0,2 \cdot 515,5 + 0,8 \cdot (-216,5) = -70,10,$$
$$h_1(S_4 = 50) = 0,2 \cdot 350,75 + 0,8 \cdot (-264,25) = -81,25.$$

Pentru $\alpha = 0,8$

$$h_1(S_1 = 20) = 0,8 \cdot 245 + 0,2 \cdot (-121) = 171,8,$$
$$h_1(S_2 = 30) = 0,8 \cdot 380,25 + 0,2 \cdot (-168,75) = 240,75,$$
$$h_1(S_3 = 40) = 0,8 \cdot 515,5 + 0,2 \cdot (-216,5) = 369,10,$$
$$h_1(S_4 = 50) = 0,8 \cdot 350,75 + 0,2 \cdot (-264,25) = 467,75.$$

Este simplu de stabilit, că în cazul în care decidentul ar fi o persoană conservativă şi pesimistă decizia optimă ar fi să aleagă varianta S_1 a **proiecului de motel cu 20 de odăi**, fiind sigur că va suporta o pierdere nu mai mare decât 47,8 mii u.m. Însă dacă decidentul ar fi o persoană cu înclinaţie accentuată spre optimism care nu ia în considerare riscurile posibil, ar alege în calitate de **decizie optimă varianta S_4 a proiectului cu 50 de odăi, sperând la un câştig de 467,75 u.m.**.

5.2.4 Criteriul Savage

Criteriul Savage mai este numit şi criteriul regretelor. Criteriul Savage recomandă următoarele operaţii. Fie dată matricea decizională (admitem că se examinează cazul în care elementele matricei constitue câştigurile posibile ale decidentului). De la ea se trece la o nouă matrice *numită matricea regretelor (sau matricea riscurilor).* Admitem că decidentul examinează toate variantele posibile de decizie în cazul în care natura se află în starea j_0, adică examinează coloana cu numărul j_0 din matricea decizională. Alege din coloana j_0 cel mai mare element şi scade din el toate celelalte elemente ale acestei coloane. În rezultat se obţine o nouă coloană numită coloană a regretelor. Se calculează toate coloanele regretelor şi cu ele se formează matricea regretelor notate cu r_{ij}, care poate fi prezentată prin relaţia

$$r_{ij} = \max_{i=1,\,m} a_{ij} - a_{ij}, \; j = \overline{1,n}.$$

Prin urmare, r_{ij} este diferenţa dintre cel mai bun câştig prezent în coloana j şi celelalte câştiguri din aceeaşi coloană, adică r_{ij} exptimă regretul decidentului (câştigul pierdut) cauzat de faptul că n-a ales cea mai bună decizie pentru starea respectivă a naturii. Având matricea regretelor decidentul poate identifica regretul maximal posibil pentru fiecare variantă de decizie şi din totalitatea de regrete maxmale va alege decizia cu cel mai mic regret, acceptâd-o în calitate de decizie optimă.

Revenim la poblema de mai sus şi aplicăm criteriul Savage pentru a determina decizia optimă. În primul rând formăm matricea regretelor, utilizând matricea decizională (matricea câştigurilor). Examinăm succesiv fiecare stare a naturii (deci fiecare coloană a matricei câştigurilor) şi calculăm câştigurile pierdute prin neacceptarea celei mai bune variante disponibile de decizie. Spre exemplu, admitem că se examinează starea naturii $R_4 = 30$. În acest caz cea mai bună variantă de decizie este $S_2 = 30$, care asigură cel mai mare câştig în valoare de 380,25 u.m. Însă dacă varianta S_2 se va respinge, iar în calitate de variantă optimă ce va acceptă oricare alta $S_i \neq S_2$, decidentul va suporta pierderi respective (sau regrete):

$$r_{13} = 380,25 - 245 = 135,25; \qquad r_{23} = 380,25 - 380,25 = 0;$$
$$r_{33} = 380,25 - 332,5 = 47,75; \qquad r_{43} = 380,25 - 284,75 = 95,50.$$

În mod analog se calculează regretele şi pentru celelalte stări ale naturii (celelalte coloane ale matricei decizionale). Totalitatea regretelo

formează matricea:

Tabelul 5.10

$S_i \backslash R_j$	$R_1 = 0$	$R_2 = 10$	$R_3 = 20$	$R_4 = 30$	$R_5 = 40$	$R_6 = 50$	$\max\limits_j r_{ij}$
$S_1 = 20$	0	0	0	135,25	270,5	405,75	405,5
$S_2 = 30$	47,75	47,75	47,75	0	135,25	270,5	270,5
$S_3 = 40$	95,5	95,5	95,5	47,75	0	135,25	**135,25**
$S_4 = 50$	143,25	143,25	143,75	95,5	47,75	0	143,75

Din fiecare variantă de decizie se selectează regretul maximal şi cu ele se formează coloana $\max\limits_j r_{ij}$. În coloana formată se alege regretul cel mai mic. În cazul dat $\min\limits_i \left[\max\limits_j r_{ij}\right] = r_{35} = 135,25$. Decizia asociată acestui regret, adică **decizia $S_3 = 40$ este optimă.** Prin urmare, conform criteriului Savage, decidentul va alege proiectul de motel cu 40 de odăi considerând că în acest caz regretul său nu va depăşi 135,25 mii u.m.

Analizînd rezultatele obţinute constatăm, că cele patru criterii de decizie aplicate la una şi aceeaşi matrice decizională (adică la rezolvarea aceleiaşi probleme) conduc la patru strategii optime diferite (patru răspunsuri diferite). Apare întrebarea firească: care din cele patru criterii este mai credibil (sau mai potrivit, mai convenabil)? În condiţii de incertitudine nu există un răspuns universal şi corect la această întrebare. Procesul decizional constă din două etape – mai întâi se alege criteriul care se va utiliza, după care urmează etapa de realizare a calculelor necesare pentru determinarea variantei optime de decizie conform criteriului ales. Alegerea criteriului decizional depinde de situaţia concretă care se examinează cât şi de particularităţile de caracter ale decidentului.

Exemplul 5.1. Un fermier se ocupă de cultuvarea şi comercializarea ciupercilor. Costul de producţie a unui chilogram de ciuperci este 16 lei, iar se vând cu 36 de lei pe chilogram. Dacă ciupercile nu se vând într-o săptămână de la ziua recoltării, ele îşi pierd valoarea. Ciupercile se vând în cutii a câte 500 de grame. Cererea se estimează a fi de 1500, 2000, 2500 sau 3000 de cutii pe săptămână. Dacă cererea este mai mare decât cantitatea produsă atunci, pentru a-şi păstra clienţii, fermierul cumpără ciuperci de la alt producător cu 38 de lei pe chilogram, iar preţul de vânzare rămâne acelaşi. Câte cutii trebue să pregătească fermierul pe săptămână pentru vânzare ca profitul să fie maximal?

Rezolvare. Vom considera că avem o problemă de luare a deciziei în condiţii de incertitudine în care decident este fermierul, iar cererile pieţei

formează stările naturii. Formăm matricea decizională. Decidentul are la dispoziţie patru variante disponibile de decizie, iar natura are patru stări posibile.

Tabelul 5.11

$V_i \backslash N_j$	N_1 1500	N_2 2000	N_3 2500	N_4 3000
$V_1 = 1500$	15,0	14,5	14,0	13,5
$V_2 = 2000$	11,0	20,0	19,5	19,0
$V_3 = 2500$	7,0	16,0	25,0	24,5
$V_4 = 3000$	3,0	12,0	21,0	30,0

Tabelul 5.12

Vald	Laplace	Hurwicz	Savage
13,5*	14,25	14,55	11
11,0	17,375	17,3	11
7,0	18,125*	19,6	8*
3,0	16,5	21,9*	12

Calculăm elementele a_{ij}, $i, j = \overline{1,4}$ ale matricei decizionale prezentate în tabelulu 5.11. Notăm cu x_i numărul de cutii pregătite pentru vănzare şi cu y_j numărul de cutii cerute de piaţă. Atunci

$$\begin{cases} a_{ij} = 18y_j - 8x_i, \text{ dacă } x_i \geq y_j, \\ a_{ij} = 18y_j - 8x_i - 19(y_j - x_i) = 11x_i - y_j, \text{ dacă } x_i < y_j. \end{cases}$$

În continuare la matricea decizională aplicăm consecutiv criterile Vald, Laplace, Hurwicz şi Savage. Rezultatele obţinute sunt prezentata în tabelulu 5.12. #

Exemplul 5.2. Un magazin de încălţăminte pregăteşte pentru anul viitor o comandă pentru un anumit tip de ghete care se bucură de popularitate. Magazinul cumpără de la producător fiecare pereche de încălţăminte cu 30 $ şi o vinde cu 60 $. Dacă încălţămintea nu se v-a vinde pînă la sfărşitul anului, atunci ea se va scoate la licitaţie cu preţul de 15 $ perechea. Comanda poate fi prezentată în şapte variante: 20, 25, 30, 35, 40 45, 50 perechi. În tabelul 5.11 sunt prezentate nivelurile cererii şi probabilităţile acestora.

Tabelul 5.13

Cererea	20	25	30	35	40	45	50
Probabilitatea	0,20	0,25	0,20	0,15	0,10	0,01	0,01

Se cere:

1. Să se determine matricea profiturilor magazinului şi matricea regretelor acestuia. Câte perechi de ghete trebuie să comande magazinul astfel încât profitul sperat să fie maximal.

2. Să se afle valoarea maximală a profitului sperat şi valoarea minimală a regretului

Rezolvare. Formăm un tabel în care în linia titulară prezentăm valorile posibile ale cererii, iar în coloana titulară – mărimile comenzilor.

Tabelul 5.14

Comanda	Cererea							$E(Y_i)$
	20 0,20	25 0,25	30 0,20	35 0,15	40 0,10	45 0,05	50 0,05	
20	600	600	600	600	600	600	600	600
25	525	750	750	750	750	750	750	705
30	450	675	900	900	900	900	900	753,7
35	375	600	825	1050	1050	1050	1050	757,5
40	300	525	750	975	1200	1200	1200	727,5
45	225	450	675	900	1125	1350	1350	695
50	150	375	600	825	1050	1275	1500	611,25

Pentru a calcula valorile elementelor a_{ij}, $i, j = \overline{1,7}$, ale matricei notăm prin X_j, $j = \overline{1,7}$ variantele cererii şi prin Y_i, $i = \overline{1,7}$ variantele comenzii. Examinăm două situaţii posibile:

- Comanda Y_i este mai mică sau egală cu cererea X_j, adică $Y_i \leq X_j$. În acest caz valorile elementelor a_{ij} se determină conform relaţiei $a_{ij} = 60Y_i - 30Y_i = 30Y_i$. Spre exemplu, fie $Y_i = Y_4 = 35$, iar $X_j = X_5 = 40$. Elementul a_{45} obţine valoarea $a_{45} = 30Y_4 = 30 \cdot 35 = 1050$.

- Comanda Y_i este mai mare decât cererea X_j, adică $Y_i > X_j$. În cazul dat valorile elementelor a_{ij} se determină prin relaţia $a_{ij} = 60X_j + 15(Y_i - X_j) - 30Y_i$. Spre exemplu, admitem că $Y_i = Y_5 = 40$ şi $X_j = X_3 = 30$. Prin urmare, magazinul a comandat 40 perechi de ghete şi din acestea doar 30 s-au vândut cu 60 \$ perechea. Restul 10 perechi, adică $Y_i - X_j = Y_5 - X_3 = 40 - 30 = 10$ s-au vândut cu 15 \$ perechea. Astfel venitul magazinului este $60X_j + 15(Y_i - X_j) = 60X_3 + 15(Y_5 - X_3) = 60 \cdot 30 + 15(40 - 30) = 1950$. Din această sumă trebuie scăzute cheltuielile pentru comandă, adică $30Y_i = 30 \cdot 40 = 1200$. Deci câştigul magazinului este $a_{ij} = a_{53} = 1950$ \$ $- 1200$ \$ $= 750$ \$.

Examinând tabelul observăm, spre exemplu, că în cazul în care magazinul va comanda 40 de perechi de ghete, cu probabilitatea 0,25 va avea un

câştig de 525 $, cu probabilitatea 0,2 – câştig de 750 $, cu probabilitatea 0,1 – câştig de 1200$ şi a. m. d.

Datele tabelului oferă posibilitatea de a determina speranţa matematică a câştigului magazinului pentru fiecare variantă a comenzii (inclusiv şi variante nespecificate în condiţiile problemei), utilizând relaţia

$$E(Y_i) = \sum_{j=1}^{7} a_{ij} \cdot p_j, \ j = \overline{1,7}.$$

Se obţine:

$$\begin{aligned}
E(Y_1) =& 600 \cdot 0,2 + 600 \cdot 0,25 + 600 \cdot 0,2 + \\
&+ 600 \cdot 0,15 + 600 \cdot 0,1 + 600 \cdot 0,05 + 600 \cdot 0,05 = 600, \\
E(Y_2) =& 525 \cdot 0,2 + 750 \cdot 0,25 + 750 \cdot 0,2 + \\
&+ 750 \cdot 0,15 + 750 \cdot 0,1 + 750 \cdot 0,05 + 750 \cdot 0,05 = 600, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
E(Y_7) =& 150 \cdot 0,2 + 375 \cdot 0,25 + 600 \cdot 0,2 + \\
&+ 825 \cdot 0,15 + 1050 \cdot 0,1 + 1275 \cdot 0,05 + 1500 \cdot 0,05 = 600.
\end{aligned}$$

Speranţele matematice $E(Y_i)$ sunt prezentate în ultima coloană a tabelului 5.14. Examinând tabelul constatăm că valoarea maximă a câştigului sperat constituie 757,5 $ şi se va obţine dacă comanda va fi de 35 perechi de ghete. #

Bibliografie

[1] Calin Iu., Cojuhari E., Garştea A., Grigor R., Platon V., Prodan N. *Matematici pentru economişti: Ghid metodic.* Chişinău: CEP USM, 2016.

[2] Ciobanu G.H., Ţigănescu E. *Cercetări operaţionale cu aplicaţii în economie. Optimizări liniare.* Bucureşti: ASE, 2002.

[3] Ghic G. *Matematici aplicate în economie.* Bucureşti: Editura universitară, 2015.

[4] Otiman P.I., Creţ F. *Elemente de matematici aplicate în economia agroalimentară.* Timişoara: Agroprint, 2002.

[5] Purcaru I. *Matematici generale şi elemente de optimizare. Teorie şi aplicaţii.* Bucureşti: Editura economică, 1997.

[6] Desbazeille G. *Exercices et problèmes de recherche opérationnelle.* Deuxième édition, Paris: DUNOD, 1987.

[7] Faure R., Lemaire B., Picouleau C. *Precis de recherche operationnelle.* Paris: DUNOD, 2009.

[8] Гладких Б.А. *Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики.* Томск, 2012.

[9] Колобашкина Л.В., Алюшин М.В. *Информационные технологии принятия решений в условиях конфликта.* Москва: НИЯУ МИФИ, 2010.

[10] Красс М.С., Чупрынов Б.П. *Основы математики и её приложения в экономическом образовании.* Москва: Дело, 2002.

[11] *Исследование операций в экономике.* Под редакцией Н.Ш.Кремера. Москва: ЮРАЙТ, 2011.

[12] Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. *Высшая математика.* Москва: Лань, 2013.

[13] Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. *Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование.* Москва: Лань, 2010.

[14] Малыхин В.И., Моисеев С.И. *Математические методы принятия решений.* Воронеж, 2009.

[15] Невежин В.П., Кружилов С.И., Невежин Ю.В. *Исследование операций и принятие решений в экономике. Сборник задач и упражнений.* Москва: Форум, 2012.

[16] Розен В.В.Кузнецов А.В. *Математические модели принятия решений в экономике.* Москва: Высшая школа, 2002.

[17] Урубков А.Р., Федотов И.В. *Методы и модели управленческих решений.* Москва: Дело, 2009.

[18] *Экономико-математические методы и прикладные модели. Учебное пособие для вузов.* Под редакцией В.В.Федосеева. Москва: ЮНИТИ, 1999.

[19] Юрьева А.А. *Математическое программирование.* Москва: Лань, 2014.

Cuprins

Prefaţă 3

1 Elemente de programare liniară 7
1.1 Forme de prezentare ale problemelor de programare liniară . . . 7
1.2 Câteva exemple de probleme de programare liniară 9
1.2.1 Problema de utilizare optimă a resurselor disponibile (Probleme de producţie) 9
1.2.2 Probleme de nutriţie 11
1.2.3 Probleme de tip transport 11
1.3 Noţiuni de bază referitoare la mulţimi de puncte în spaţiul euclidian n-dimensional 13
1.4 Soluţiile problemei de programare liniară 14
1.5 Metoda grafică de rezolvare a problemelor de programare liniară 17
1.6 Metoda simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară 20
1.6.1 Soluţia admisibilă de bază iniţială 21
1.6.2 Îmbunătăţirea soluţiei. Criteriile de optimalitate ale soluţiilor 23
1.6.3 Algoritmul metodei simplex 23
1.7 Metoda bazei artificiale 29
1.8 Probleme propuse 35

2 Dualitatea în programarea liniară 36
2.1 Noţiuni privind dualitatea în programarea liniară 36
2.2 Reguli de formare a problemei duale 38
2.3 Teoreme ale dualităţii 41
2.4 Rezolvarea simultană a unui cuplu de probleme în dualitate . . . 45
2.5 Sensul economic al variabilelor duale 47
2.5.1 Resurse deficitare şi nedeficitare. Preţuri umbră 50
2.5.2 Costuri reduse 52
2.6 Analiza senzitivităţii în programarea liniară 60
2.6.1 Stabilitatea soluţiilor optime în raport cu variaţia termenilor liberi ai sistemului de restricţii 61
2.6.2 Stabilitatea soluţiilor optime în raport cu coeficienţii funcţiei obiectiv 69

3 Probleme de afectare (repartiţie) 75
3.1 Probleme de afectare. Algoritmul ungar 75
3.2 Probleme de repartiţie neechilibrate. 80
3.3 Probleme de repartiţie cu criteriu de maximizare 83

4 Elemente de teoria jocurilor **93**
4.1 Jocuri de doi jucători cu sumă nulă 94
4.2 Jocuri cu puncte de echilibru 97
4.3 Jocuri matriceale cu soluţii în strategii mixte 99
4.4 Modalităţi de simplificare a matricei de plată 103
4.5 Metode de rezolvare ale jocurilor matriceale 105
4.5.1 Jocuri matriceale (2×2) 105
4.5.2 Rezolvarea grafică a jocurilor cu matricea de tip $(2 \times n)$ şi $(m \times 2)$ 108
4.6 Rezolvarea jocurilor matriceale prin programarea liniară 115

5 Luarea deciziilor în condiţii de risc şi incertitudine **123**
5.1 Luarea deciziilor în condiţii de risc 123
5.2 Decizii în conditii de incertitudine 128
5.2.1 Criteriul Vald sau maximin 130
5.2.2 Criteriul Laplace 131
5.2.3 Criteriul Hurwicz 131
5.2.4 Criteriul Savage 133

Bibliografie **138**

Valeriu Platon, Iurie Calin

METODE CANTITATIVE ÎN LUAREA DECIZIILOR

Suport de curs

Asistență computerizată: Iurie Calin

Bun de tipar 25.02.2021. Formatul 60x84 $^{1}/_{16}$.
Coli de tipar 9,0. Coli editoriale 10,6.
Comanda 65. Tirajul 50 ex.

Centrul Editorial-Poligrafic al USM
str. Al. Mateevici, 60, Chișinău, MD 2009

38-70

