О некоторых особенностях диспергирования жидкостей: о разрыве перетяжки и отрывающейся от мениска капле

А. И. Григорьев[a,*], С. О. Ширяева[b,]**

[a]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,*
г. Москва, 119526, Россия
[*]*e-mail: grigorai@mail.ru*
[b]*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,*
г. Ярославль, 150000, Россия
[**]*e-mail: shir@uniyar.ac.ru*

Поступила в редакцию 22.12.2025
После доработки 12.01.2026
Принята к публикации 15.01.2025

Рассмотрены физические закономерности электродиспергирования вязкой несжимаемой электропроводной жидкости: разрыва перетяжки, связывающей мениск с каплей, отрывающейся от мениска при развитии варикозной неустойчивости под действием осесимметричных сил, силы тяжести, силы электрического отталкивания капли от одноименно заряженного мениска и силы давления жидкости в капилляре. Основополагающим является то обстоятельство, что в качестве объекта исследования выступает перетяжка малого поперечного размера, связывающая существенно более крупную отрывающуюся каплю той же жидкости с мениском примерно такого же радиуса, от которого происходит отрыв капли. Так что приходится сталкиваться с физическим объектом, сложным для численного обсчета, состоящим из разномасштабных частей одной и той же жидкости, имеющей различные безразмерные локальные вязкости.

Ключевые слова: капля, мениск, разрыв перетяжки, гравитационное и электрическое поля

УДК 532.6
https://doi.org/10.52577/eom.2026.62.1.52

ВВЕДЕНИЕ

Проблема формирования высокодисперсного водного аэрозоля, как заряженного, так и нейтрального, издавна занимала исследователей (см., например, [1–21] и цитируемую там литературу). В настоящем рассмотрении озадачимся менее глобальной проблемой, а именно постараемся разобраться с физическими закономерностями разрыва перетяжки, связывающей отрывающуюся каплю с мениском (или с более крупной родительской каплей [5–15, 20]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При рассмотрении имеющихся современных фотографий и схем процесса разрыва перетяжки [8–11, 13, 20, 21] невольно встает проблема: классическая картина этого процесса подразумевает некую симметрию по обе стороны места разрыва, но на современных фотографиях о симметрии и речи не идет: перетяжка как бы вытягивается из отрывающейся капли и из мениска, от которого отрывается. Это может быть связано с неординарной геометрией мест стыковки перетяжки, приблизительно цилиндрической, с почти сферическими объектами отрывающейся капли или мениска, от которого отрыв происходит. Возможно, это связано с кривизной разрывающихся поверхностей, а может, с реологией жидкой системы. Это требует дальнейшего исследования и уточнения.

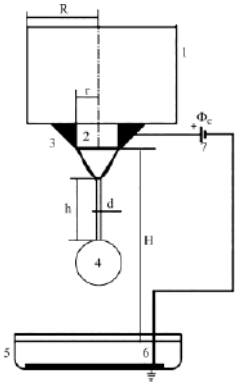


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

Пусть имеется вертикально ориентированный капилляр, по которому поступает электропроводная жидкость, поддерживаемый при электрическом потенциале ϕ, на нижнем срезе которого образовался жидкий мениск, как показано на рис. 1, а с его вершины под действием гравитационных и электрических сил отрываются эмитируемые капельки (как видно на фотографиях высокоскоростной кинокамеры, работающей со скоростью 20 000 кадров в секунду, приведенных на рис. 2). Из рис. 1 и 2

[20, 21] следует, что отрывающаяся капелька связана с мениском жидкой перетяжкой, имеющей почти цилиндрическую форму. Для нижеследующих качественных оценок будем ее моделировать жидким цилиндром, радиус которого равен усредненному по длине перетяжки ее радиусу, что, согласно рис. 2, весьма близко к истине.

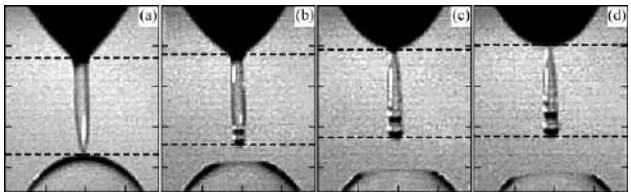


Рис. 2. Микрофотографии процесса отрыва капли от мениска.

При рассмотрении реальной струи, распадающейся на капли, легко заметить, что средний по длине радиус перетяжки изменяется со временем. Если в безразмерных переменных, в которых $R = \sigma = \rho = 1$, ввести безразмерный коэффициент кинематической вязкости $\tilde{\nu}$ [22]:

$$\tilde{\nu} \equiv \nu \sqrt{\frac{\rho}{r\sigma}}, \qquad (1)$$

то он при уменьшении радиуса и неизменных ρ, σ, ν будет увеличиваться по закону (1), и, следовательно, станет увеличивать время разрыва перетяжки. В (1) ν – размерный коэффициент кинематической вязкости; σ – коэффициент поверхностного натяжения; ρ – массовая плотность жидкости; r – средний по длине перетяжки ее радиус.

Согласно экспериментальным данным, для капель и капиллярных струй [1–3, 6, 8, 9, 11–14, 20, 21] поперечный размер перетяжки существенно (на полтора–два порядка величины) меньше радиуса мениска или радиуса отрывающейся капли. Известно, что некоторые свойства жидкости существенно зависят от занимаемого ею объема. Например, если рассчитать капиллярные осцилляции большой и маленькой капель одной и той же жидкости [23, 24], то окажется, что осцилляции большой капли, у которой безразмерная вязкость мала, слабо затухают со временем, в то время как маленькая капелька, безразмерная вязкость которой на порядок больше, совершит только одно–два быстро затухающих колебания, как это видно из рис. 3 и 4.

Сплошная кривая построена для вязкой жидкости, а точечная – для идеальной жидкости.

Таким образом, большая и маленькая безразмерные вязкости по-разному влияют на осцилляции капель и на феноменологию процесса осцилляций.

МАСШТАБНЫЙ ФАКТОР

Итак, величина безразмерной вязкости существенно влияет на гидродинамику, а это свидетельствует о существовании масштабного фактора [25] в гидродинамике, а именно зависимости феноменологии некоторых физических свойств или явлений жидкости от размера области, в которой явление происходит. Термин «масштабный фактор» в технике, физике и геофизике используется для обозначения зависимости некоторых физических свойств: твердости, упругости, пластичности и т.п. от размеров предмета.

В общем случае имеется в виду то обстоятельство, что физические свойства объекта или явления реализуются в больших и в малых масштабах различным образом. Конкретно для электрогидродинамических неустойчивостей сказанное подтверждается в [23, 24]. Имеются в виду большие и малые безразмерные вязкости, которые для маленьких размеров капли (мениска) велики, а для больших размеров мениска малы.

Понятие «масштабного фактора» часто используется в инженерии, металлургии, геологии, механике и проявляется в зависимости от механических свойств деталей. Речь идет о прочности, твердости и т.п., зависящих от размеров деталей. При учете масштабного фактора требуется принимать во внимание макро- и микроструктурные особенности материала и то, что масштабный фактор может иметь любой знак. В промышленной практике учет масштабного фактора приводит к изменению технологии обработки.

Но вернемся к гидродинамике: оторвется капля от мениска или нет зависит от предыстории явления. А именно от того, успеет ли отрывающаяся капля набрать достаточно большой заряд за счет электропроводности и массу за счет притока жидкости по капилляру при заданной вязкости, чтобы отрывающие ее силы: гравитационная и электрическая превысили удерживающую каплю капиллярную силу в перетяжке.

Закономерности распада на мелкие капельки крупных капель или менисков жидкости на торце капилляра, по которому жидкость подается в зону диспергирования, исследуются уже около двухсот лет. За это время выполнено много экспериментальных и теоретических работ на различных установках и для различных жидкостей. Основным недостатком всех экспериментов по обсуждаемым вопросам является несовершенство регистрирующей

аппаратуры, современной к моменту проведения эксперимента. Киносъемка проводилась на кинокамеры с частотой смены кадров несколько десятков в секунду (правда, иногда с использованием стробоскопов), что позволяло получить лишь феноменологическую информацию, и многие вопросы остались за рамками проведенных исследований. В частности, сказанное относится к исследованию физических особенностей разрыва жидкой перетяжки, связывающей отрывающуюся каплю с мениском или с более крупной каплей.

В конце 20–начале 21 века стали использовать высокоскоростные кинокамеры со скоростью смены кадров в тысячи раз большей, что позволило получить количественную информацию (см., например, [9–11, 13, 14, 20, 21]) о происходящих физических процессах.

Вопрос о разрыве перетяжки и закономерностях образования так называемых сателлитов (гораздо более мелких капелек, чем отрывающаяся капля, возникающих из той же перетяжки) поднимался в научной периодике неоднократно. В работах, посвященных диспергированию жидкостей, в упомянутых выше обзорах и статьях следы проведенных дискуссий, несомненно, сохранились, однако акценты были расставлены не совсем актуально в плане исследования физики обсуждаемого явления. Чаще всего дискуссии велись в направлении того, как «с пользой для дела» использовать образующиеся при диспергировании «паразитные» капельки – сателлиты, коль скоро они все равно образуются. Например, в обстоятельной работе [15] проведенный анализ касался в основном варьирования технических и технологических параметров явления. В настоящем же рассмотрении предполагается разобраться в физике эволюции перетяжки, завершающейся образованием сателлитов.

Представляется, что все дело в так называемом масштабном факторе, являющемся по определению [25] безразмерным коэффициентом, учитывающим изменение свойств материала (объекта) при изменении его геометрических размеров, – безразмерной величиной, представляющей собой комбинацию характеристик размеров и формы частицы или структурной составляющей.

В контексте настоящего рассмотрения речь идет о безразмерной вязкости, характеризующей различные части участвующего в явлении объема жидкости: мениск, перетяжка, отрывающаяся капля.

Введем безразмерные переменные, в которых $R = \sigma = \rho = 1$, где R – характерный линейный размер объекта. Коэффициент кинематической вязкости жидкости ν будет обезразмериваться на комбинацию $\sqrt{\rho/R\sigma}$, и величина безразмерного коэффициента вязкости $\tilde{\nu} \equiv \nu\sqrt{\rho / R\sigma}$ будет зависеть от характерного линейного размера R. Если рассмотреть мениск, перетяжку и отрывающуюся каплю (см. рис. 1 и 2), то будем иметь три различных физических объекта, связанных в единое целое жидкостью, из которой они состоят. Но характерные для каждого из них безразмерные вязкости будут различны.

Рассмотрим задачу об устойчивости осесимметричной моды колебаний поверхности вертикальной прямой струи и разбиении ее на отдельные капли.

Безразмерная вязкость (а именно с ней приходится иметь дело при численном, компьютерном анализе) одной и той же жидкости в перетяжке и мениске (капле), различающихся линейными поперечными размерами, различна. По величине они отличны друг от друга в несколько раз – пропорционально корню квадратному из отношения характерных линейных поперечных размеров сравниваемых объектов. Из рассмотрения фотографий процесса естественно предположить, что при отрыве перетяжки от капли или от мениска радиус перетяжки не уменьшается до нуля, а перетяжка *сдергивается* с мениска и с отрывающейся капли. В итоге для того чтобы описать все явление единообразно, вследствие влияния масштабного фактора приходится иметь дело с реологически сложной жидкостью (с различающимися физическими свойствами разных частей объекта), что и было продемонстрировано в [3, с. 132].

В [25] (см. рис. 3 и 4) показано, что осцилляции капель одной и той же вязкой несжимаемой электропроводной жидкости с безразмерными вязкостями, различающимися в несколько раз, затухают со временем с разными скоростями. По оси ординат отложена амплитуда капиллярной волны.

Но разберемся в вопросе об освобождении отрывающейся от перетяжки капли подробнее. Начнем с выяснения ответа на вопрос о характерном времени разрыва перетяжки, моделируя этот процесс увеличением амплитуд капиллярных волн на струе (см., например, фотографию на рис. 2) [20]. Для чего сформулируем задачу об устойчивости осесимметричной моды струи и разбиении ее на капли.

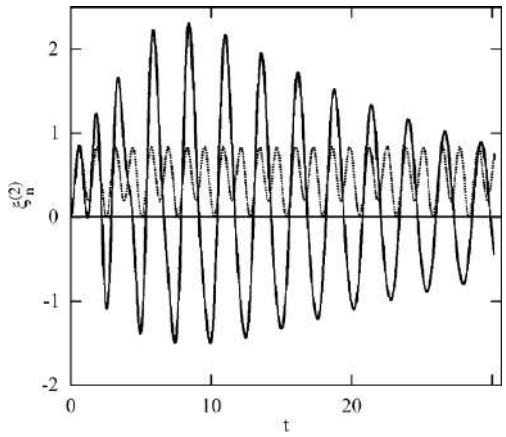


Рис. 3. Зависимости безразмерной амплитуды $\xi_n^{(2)}$ сферической капли от безразмерного времени t, построенные в [24] при волновом и азимутальном числах $k = m = 2$, номере моды $n = 2$, зарядовом параметре $W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} = 1$ и маленькой безразмерной вязкости $\tilde{\nu} = 0,01$.

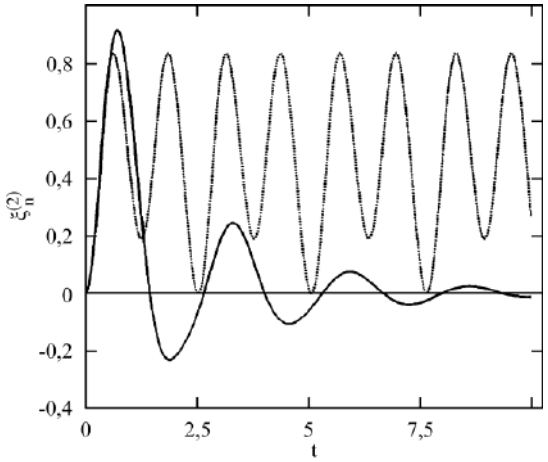


Рис. 4. Зависимости безразмерной амплитуды $\xi_n^{(2)}$ от безразмерного времени t, построенные при $k = m = 2$, $n = 2$, $W = 1$ и на порядок большей безразмерной вязкости $\tilde{\nu} = 0,1$.

Сформулируем задачу о разрыве перетяжки между отрывающейся каплей и мениском, от которого она отрывается. Отталкиваться будем от фотографий этого процесса, приведенных на рис. 2, и схемы явления отрыва, приведенной на рис. 1. Примененная идеализация использована для упрощения математической постановки задачи.

Для отрыва капли от перетяжки необходимо, чтобы сила поверхностного натяжения в перетяжке (перемычке) $\vec{F}_\sigma = -2\pi\sigma r\frac{\vec{g}}{g}$, удерживающая каплю, стала меньше суммы сил тяжести $\vec{F}_g = \frac{4R^3\rho}{3\pi}\vec{g}$, силы кулоновского отталкивания $\vec{F}_q = \frac{q_1 q_2}{(h+R)^2}\frac{\vec{g}}{g}$ капли от заряженного мениска и силы давления, под которым жидкость подается в капилляр $\vec{F}_p = \pi R^2 P\frac{\vec{g}}{g}$, отрывающих каплю; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения; r – радиус перетяжки; R – радиус отрывающейся сферической капли; q_1 и q_2 – заряды мениска и отрывающейся капли; h – длина перетяжки; P – давление жидкости в капилляре (имеется в виду, что все упомянутые силы, изменяются со временем). Переводя сказанное в математический вид получим:

$$\frac{4R^3\rho g}{3\pi} + \frac{q_1 q_2}{(h+R)^2} + \pi R^2 P \geq 2\pi\sigma r.$$

ФИЗИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КАПИЛЛЯРНОМ РАСПАДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТРУИ

Примем, что струя радиуса R электропроводной несжимаемой жидкости движется вдоль оси OZ с неизменной скоростью $\vec{U}_0$. На струю подадим электрический потенциал Φ_0, а заряд распределится по поверхности струи с плотностью χ. Жидкость будем считать вязкой с коэффициентом кинематической вязкости ν,

массовой плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ.

Полагая, что струя бесконечно протяженна, для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся вместе со струей с той же скоростью. Поле скоростей течения жидкости в струе $\vec{U}(\vec{r},t)$ полностью определится капиллярным волновым движением на ее поверхности.

Во введенных ранее безразмерных переменных (в которых $R = \sigma = \rho = 1$) поле скоростей $\vec{U}(\vec{r},t)$ будет величиной того же порядка малости, что и амплитуда волн, поскольку ими и порождается. Найдем условия возникновения неустойчивости таких капиллярных волн.

Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат, орт $\vec{n}_z$ которой будет ориентирован вдоль оси симметрии невозмущенной струи. Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишем в виде:

$$r(\varphi,z,t) = R + \xi(\varphi,z,t),\ |\xi| << R,$$

где $\xi(\varphi,z,t)$ – возмущение поверхности струи. Капиллярные волны, возникающие в струе в естественных условиях будем считать имеющими весьма малую амплитуду $\sim\sqrt{\kappa T/\sigma}$, так как они могут порождаться уже тепловым движением молекул жидкости [19], где κ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура.

Математическая формулировка задачи о расчете осесимметричного капиллярного волнового движения в струе вязкой жидкости в размерном виде и линеаризованной форме имеет вид:

$$\frac{d\vec{U}(\vec{r},t)}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\times\Delta\vec{U}(\vec{r},t),\quad \nabla\times\vec{U}(\vec{r},t) = 0,$$
$$\Delta\Phi(\vec{r},t) = 0 \qquad (1)$$

с граничными условиями на оси струи и на бесконечном удалении по радиальной координате:

$$r\to 0:\ \left|\vec{U}(\vec{r},t)\right| < \infty,$$
$$r\to\infty:\ \left|\nabla\Phi(\vec{r},t)\right|\to 0,$$

а также с граничными условиями на поверхности струи $r = R + \xi$:

кинематическим:

$$-\frac{\partial\xi(\varphi,z,t)}{\partial t} + \vec{U}(\vec{r},t)\times$$
$$\times\nabla\left[r - \left(R + \xi(\varphi,z,t)\right)\right] = 0; \qquad (2)$$

динамическим:

для касательной:

$$\vec{\tau}(\varphi,z,t)\times\left(\vec{n}(\varphi,z,t)\times\nabla\right)\vec{U} +$$
$$+\vec{n}(\varphi,z,t)\times\left(\vec{\tau}(\varphi,z,t)\times\nabla\right)\vec{U} = 0; \qquad (3)$$

и нормальным компонентом тензора напряжений:

$$-P(\vec{r},t) + 2\nu\times\vec{n}(\varphi,z,t)\times$$
$$\times\left(\vec{n}(\varphi,z,t)\times\nabla\right)\vec{U} - P_\chi + P_\sigma = 0. \qquad (4)$$

Дополним задачу условием эквипотенциальности поверхности струи:

$$\Phi = \Phi_0. \qquad (5)$$

В (1)–(5) приняты обозначения:

$$P_\chi = (-\nabla\Phi)^2/8\pi;\ P_\sigma = \sigma\times\nabla\times\vec{n}(\varphi,z,t);$$

$\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – орты нормали и касательной к возмущенной капиллярным волновым движением свободной поверхности струи; $P(\vec{r},t)$ – гидродинамическое давление; P_χ – давление электрического поля; P_σ – давление сил поверхностного натяжения; $\Phi(\vec{r},t)$ – электрический потенциал в окрестности струи; Φ_0 – потенциал поверхности струи.

СКАЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Задачу об электрогидродинамической устойчивости струи можно решать различными методами [13, 17, 26–28]. В настоящем рассмотрении систему уравнений (1)–(5) будем решать методом операторной скаляризации (наиболее общим, детально изложенным в [28]). Вернемся к безразмерным переменным $R = \sigma = \rho = 1$, разложим поле скоростей $\vec{U}(\vec{r},t)$ на сумму трех ортогональных векторных полей при помощи векторных дифференциальных операторов-проекторов $\hat{\vec{N}}_i$:

$$\vec{U}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{3}\hat{\vec{N}}_i\psi_i(\vec{r},t);\ \ (i = 1,2,3), \qquad (6)$$

удовлетворяющих условиям ортогональности:

$$\hat{\vec{N}}_j^{+}\bullet\hat{\vec{N}}_i = 0,\ (\text{при } i\neq j;\ \ i,j = 1,2,3) \qquad (7)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа:

$$\Delta\hat{\vec{N}}_i = \hat{\vec{N}}_i\Delta. \qquad (8)$$

В выражении (6) $\psi_i(\vec{r},t)$ – неизвестные скалярные функции; в (7) $\hat{\vec{N}}_j^+$ – операторы, эрмитово сопряженные к операторам $\hat{\vec{N}}_j$.

Поскольку равновесная форма струи обладает осевой симметрией, то операторы $\hat{\vec{N}}_i$ удобно выбрать в виде:

$$\hat{\vec{N}}_1 \equiv \nabla,\ \hat{\vec{N}}_2 \equiv \nabla\times\vec{e}_z,\ \hat{\vec{N}}_3 \equiv \nabla\times(\nabla\times\vec{e}_z),$$

где ∇ – оператор Гамильтона.

Поле скоростей $\vec{U}(\vec{r},t)$ в цилиндрической системе координат будет иметь следующие компоненты, выраженные через скалярные функции $\psi_i(\vec{r},t)$:

$$U_r = \frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\phi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial\phi},$$

$$U_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\phi} - \frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial\phi},$$

$$U_z = \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_3}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial\phi^2}\right]. \quad (9)$$

Подставляя разложение (6) в решаемую систему и используя свойства операторов (7)–(8), получим систему скалярных уравнений:

$$\nabla\psi_1 = 0,\ \Delta\psi_i - \frac{1}{\tilde{\nu}}\frac{\partial\psi_i}{\partial t} = 0,\ (i = 2; 3), \quad (10)$$

$$p = -\frac{\partial\psi_1}{\partial t}. \quad (11)$$

Выпишем граничные условия для функций ψ_i и ξ:

$$r=1:\ \frac{\partial\xi}{\partial t} - \left[\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial r}\right] = 0,$$

$$2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1\right\} -$$

$$-\left\{\frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial\varphi^2}\right\} + 2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\varphi}\left\{\frac{\partial\psi_3}{\partial r} - \psi_3\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_3}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial\varphi^2}\right]\right\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial\varphi^2}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + 2\tilde{\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial r}\right\} + \quad (12)$$

$$+4\pi\chi^2\xi + \chi_0\frac{\partial\phi}{\partial r} - \left\{\xi + \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right\} = 0.$$

Поскольку функции ξ, ϕ, и ψ_i описывают малые отклонения от равновесного состояния, то для того чтобы проследить их эволюцию, примем, что временная зависимость всех малых величин экспоненциальна:

$$\xi, \phi, \psi_i \sim \exp(st),$$

где s – комплексная частота.

ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Решения приведенной задачи в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие условиям ограниченности, будем искать в виде разложений по капиллярным волнам, бегущим вдоль оси OZ,

$$\psi_1 = \int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} C_m^1 \times I_m(kr)\times\exp(im\varphi)\times\exp(ikz)\times\exp(st)dk,$$

$$\psi_i = \int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} C_m^i \times I_m(lr)\times\exp(im\varphi)\times\exp(ikz)\times\exp(st)\times dk,$$

$$(i = 2;3); \quad (13)$$

$$\phi = \int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} C_m^4 \times I_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)\exp(st)dk. \quad (14)$$

где $I_m(kr)$ – функции Бесселя [29, 30].

В виде аналогичного разложения представим и функцию возмущения поверхности $\xi(z,\varphi,t)$:

$$\xi(z,\varphi,t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^{\infty} D_m \exp(im\varphi)\exp(ikz)\exp(st)dk. \quad (15)$$

В (13)–(15) k – волновое число; $l^2 \equiv k^2 + s/\tilde{\nu}$; m – азимутальные числа, то есть целые числа, указывающие степень осесимметричности решений – степень «закрученности» капиллярных волн вокруг оси струи; $I_m(x)$ и $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода (модифицированные функции Бесселя второго рода также называются функциями Макдональда [29, 30]). C_m^i, i = 1, 2, 3, 4 и D – коэффициенты разложений (13)–(15), зависящие от азимутального m и волнового k чисел.

Используя условие эквипотенциальности поверхности струи, учитывая вид проектов решений и свойства ортонормированности функций $\exp(im\varphi)$ и $\exp(ikz)$,

$$\int_0^{2\pi} \exp\left[i(m_1 - m_2)\varphi\right] d\varphi = \delta_{m_1, m_2},$$

$$\int_0^{2\pi} \exp\left[i(k_1-k_2)z\right]dz = \delta(k_1-k_2), \qquad (16)$$

из системы граничных условий получим систему алгебраических уравнений, связывающих коэффициенты C_m^4 и D_m.

Система однородных линейных уравнений имеет нетривиальное решение только в случае, когда ее определитель равен нулю $\det\left[a_{ij}\right]=0$, где элементы a_{ij} для случая осесимметричных ($m = 0$) волн определяются соотношениями:

$$a_{11}=s,\ a_{21}=a_{31}=0,$$

$$a_{41}=k^2-1+4\pi\chi^2\left\{1-k\frac{K_1(k)}{K_0(k)}\right\},$$

$$a_{12}=-kI_1(k),\ a_{22}=0,\ a_{32}=2ik^2I_1(k),$$

$$a_{42}=\left[s+2\tilde{\nu}k^2\right]I_0(k)-2\tilde{\nu}kI_1(k),$$

$$a_{13}=0,\ a_{23}=2lI_1(l)-l^2,\ a_{33}=0,\ a_{43}=0,$$

$$a_{14}=-iklI_1(l),\ a_{24}=0,\ a_{34}=-\left(l^2+k^2\right)lI_1(l),$$

$$a_{44}=2\tilde{\nu}ik\left(l^2I_0(l)-lI_1(l)\right). \qquad (17)$$

Раскрывая определитель с элементами (17), получим дисперсионное уравнение:

$$s^2-\frac{2\tilde{\nu}k^2s}{I_0(k)}\left\{sI_1'(k)-\frac{2kl}{l^2+k^2}\frac{I_1(k)}{I_1(l)}I_1'(l)\right\}=\omega_0^2(k); \qquad (18)$$

$$\omega_0^2(k)\equiv G(k)\left(1-k^2-w(1-H(k))\right)\frac{l^2-k^2}{l^2+k^2};$$

$$G(k)\equiv k\frac{I_1(k)}{I_0(k)};\ H(k)\equiv k\frac{K_1(k)}{K_0(k)};\ w\equiv 4\pi\chi_0^2.$$

Графики функций $G(k)$ и $H(k)$ приведены на рис. 5 и 6.

$$w\equiv 4\pi\chi^2\equiv\frac{\mu^2}{\pi};\ \mu\equiv 2\pi\chi.$$

В проводимом качественном анализе целесообразно рассмотреть случаи малых и больших значений безразмерных волновых чисел по отдельности: 1) $k < 1$; 2) $k > 1$.

Когда $\omega_0^2(k)<0$, решения дисперсионного уравнения описывают частоты бегущих по струе капиллярных волн при $s_1=\sqrt{\omega_0^2(k)}>0$, они определяют инкременты нарастания амплитуды γ и декременты η.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие $l >> k$ (напомним, что $l^2\equiv k^2+s/\tilde{\nu}$, а значит, что в этом случае $(s/\tilde{\nu})>>k^2$), тогда для длинных волн на струе, длина которых много больше ее радиуса ($k << 1$), выполняются соотношения [27, с. 636]:

$$I_0(k)\approx 1;\ I_1(k)\approx\frac{k}{2};\ I_1(l)\approx\frac{l}{2};\ I_1'(l)=I_1'(k)\approx\frac{1}{2};$$

$$K_0(z)\sim-\ln(z);$$

$$K_\nu(z)\sim\frac{1}{2}\Gamma(\tilde{\nu})\left(\frac{2}{z}\right)^{\tilde{\nu}}; \qquad (19)$$

$$K_1(z)\sim\frac{1}{z}\Gamma(1)=\frac{1}{z};\quad H\sim\frac{1}{\ln(z)},$$

уравнение (18) в линейном по $\tilde{\nu}$ приближении принимает вид:

$$s^2+3\tilde{\nu}k^2s-G(k)\frac{k^2(1-k^2-w(1-H(k)))}{2}=0;$$

с решениями в том же приближении:

$$\left(s_{1,2}\right)_{s\nu}\approx-\frac{3\tilde{\nu}k^2}{2}\pm\sqrt{G(k)\frac{k^2(1-k^2-w(1-H(k)))}{2}}.$$

Легко видеть, что величины безразмерных инкрементов и при малых, и при больших значениях безразмерных волновых чисел k стремятся к нулю. Поэтому в проводимом качественном анализе целесообразно рассмотреть случаи малых и больших значений безразмерных волновых чисел по отдельности: 1) $k<1$; 2) $k>1$.

1) При малых значениях k (случай длинных волн и/или большой вязкости) k, $l << 1$.

$$\frac{K_{m+1}(z)}{K_m(z)}=\frac{2m}{z}, \qquad (20)$$

$$I_m(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^m\frac{1}{m!}\left(1+\frac{z^2/4}{m+1}\right),$$

$$I_{m+1}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{m+1}\frac{1}{(m+1)!}. \qquad (21)$$

Графики зависимостей величин безразмерных инкрементов неустойчивости капиллярных волн на струе от безразмерного волнового числа для различных малых значений коэффициента безразмерной кинематической вязкости жидкости (0,1; 0,2; 0,3), рассчитанные численно по (18), приведены на рис. 7 (кривые расположены сверху вниз по мере увеличения вязкости). Несложно видеть, что увеличение вязкости приводит к снижению инкрементов и смещению положения максимального инкремента в сторону более длинных волн.

Отметим, что значение безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\tilde{\nu}$ = 0,125 соответствует воде [31].

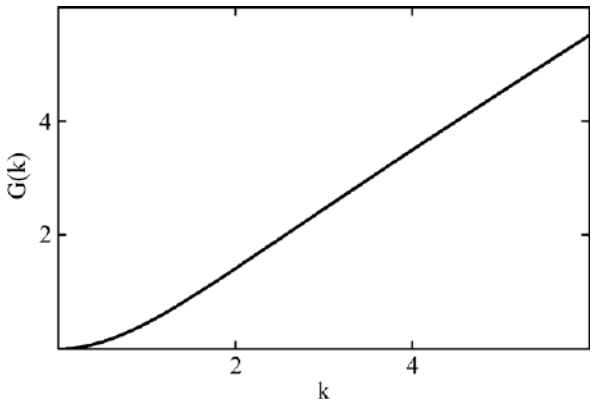


Рис. 5. Зависимость коэффициента *G* от безразмерного волнового числа.

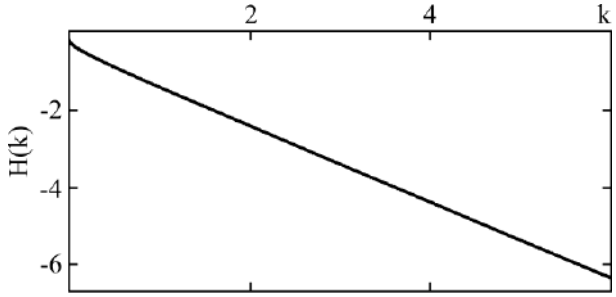


Рис. 6. Зависимость коэффициента *H* от безразмерного волнового числа.

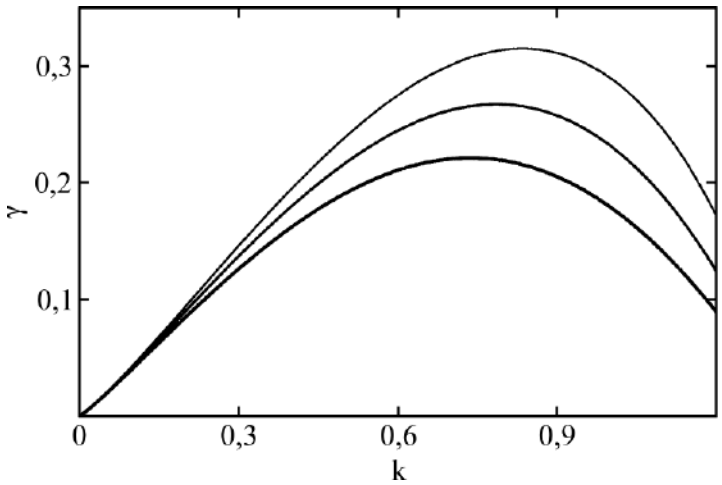


Рис. 7. Зависимости величины безразмерного инкремента осесимметричных волн на струе маловязкой жидкости $\gamma(k)$ от безразмерного волнового числа k, рассчитанные при $w = 1$ и различных значениях безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\tilde{\nu} = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3$. Кривые разной толщины расположены сверху вниз по мере увеличения вязкости.

Несложно видеть, что увеличение вязкости приводит к снижению инкрементов и смещению положения максимального инкремента в сторону более длинных волн.

1) При большой вязкости жидкости, когда $l^2 = k^2 + \left(s/\tilde{\nu}\right) \approx k^2\,(\left(s/\tilde{\nu}\right) \to 0$ при увеличении ν), дисперсионное уравнение сводится к:

$$s^2 + 3\tilde{\nu}k^2 s - G(k)\frac{k^2(1-k^2-w(1-H(k)))}{2} = 0;$$

$$s = \frac{G(k)}{4\tilde{\nu}}(1-k^2-w(1-H(k))). \qquad (22)$$

При больших значениях аргумента используем следующие выражения функций Бесселя первого и второго рода (во втором порядке по m):

$$I_m(z) = e^z\left[2\pi z\right]^{-1/2}\left(1-\frac{4m^2-1}{8z}\right),$$

$$I_{m+1}(z) = e^z\left[2\pi z\right]^{-1/2}\left(1-\frac{4(m+1)^2-1}{8z}\right),$$

$$K_m(z) = e^{-z}\left[\frac{\pi}{2z}\right]^{1/2}\left(1+\frac{4m^2-1}{8z}\right),$$

$$K_{m+1}(z) = e^{-z}\left[\frac{\pi}{2z}\right]^{1/2}\left(1+\frac{4(m+1)^2-1}{8z}\right),$$

тогда

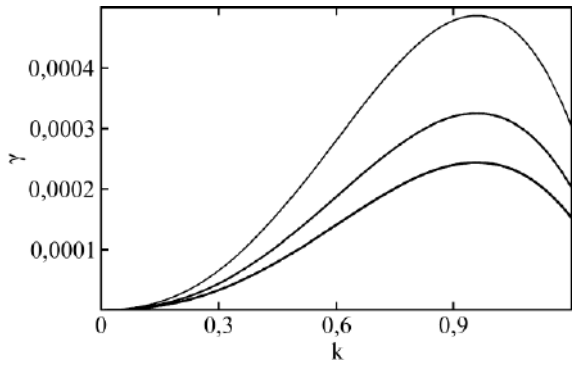


Рис. 8. Зависимости безразмерного инкремента осесимметричных волн на струе сильновязкой жидкости $\gamma(k)$ от безразмерного волнового числа k, рассчитанные при $w = 1$ и значениях безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\tilde{\nu} = 100; 150; 200$. Кривые разной толщины расположены сверху вниз по мере увеличения вязкости.

$$\frac{K_{m+1}(z)}{K_m(z)} = 1 + \frac{2m+1}{2z}, \quad \frac{I_{m+1}(z)}{I_m(z)} = 1 - \frac{2m+1}{2z}.$$

Графики зависимостей безразмерного инкремента неустойчивости капиллярных волн на струе от безразмерного волнового числа для различных больших значений безразмерной кинематической вязкости жидкости (100; 150; 200), рассчитанные численно в [32] по (18), приведены на рис. 8 (кривые расположены сверху вниз по мере увеличения вязкости). Значение коэффициента кинематической вязкости $\nu = 100$ соответствует глицерину. Несложно видеть, что увеличение вязкости приводит к снижению инкрементов. Положение максимального инкремента в выписанном диапазоне значений коэффициентов вязкости практически не меняется.

Видно, что изменение вязкости жидкости примерно в тысячу раз (как для перехода от воды к глицерину) приводит к снижению безразмерного инкремента неустойчивости также примерно в тысячу раз, что и объясняет различие в феноменологиях электростатического распада мало- и сильновязких жидкостей.

Волновое число волны с максимальным значением инкремента $k = k_{\max}$ найдется из условия:

$$\left(d\gamma(k,m)/dk\right) = 0. \qquad (23)$$

Отыскивая $k_{\max}$, можно найти и значение параметра $w = w_{\max}$, то есть то значение поверхностной плотности электрического заряда, при котором инкремент неустойчивости волны с $k = k_{\max}$ максимален.

Можно также найти величину самого инкремента, соответствующего волне, наиболее быстро растущей со временем. Описанная процедура отыскания экстремальных значений $k_{\max}$ и $w_{\max}$ подобна процедуре поиска критических условий реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля – неустойчивости капиллярно-гравитационных волн на плоской заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости Волновое число наиболее неустойчивой волны, а также величину инкремента ее неустойчивости [19, 27] можно найти и из графиков зависимости величин инкрементов от волнового числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Незаряженная струя жидкости распадается на отдельные капли уже под действием сил поверхностного натяжения. Наиболее быстро это происходит при волновом возмущении с безразмерным волновым числом $k = k_{\max} \approx 0{,}7$ [27]. Появление на электропроводной струе электрического заряда приводит к возбуждению неосесимметричных волн, к увеличению волнового числа наиболее неустойчивой моды и инкремента неустойчивости осесимметричной волны. В итоге при реализации варикозной неустойчивости на заряженной струе размеры капелек, на которые распадается струя, уменьшаются с ростом поверхностной плотности заряда на струе.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в ИПМ РАН в рамках государственного задания, № госрегистрации 124012500442-3.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zeleny, J., On the conditions of instability of electrified drops, with application to the electrical discharge from liquid points, *Proc. Cambridge Philosoph. Soc.*, 1914, vol. 18, part 1, p. 71.
2. Коженков, В.И., Фукс, Н.А., *Успехи химии*, 1976, т. 45, № 12, с. 2274.

3. Ентов, В.М., Ярин, А.Л., Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей, *Итоги науки и техники. Сер. «Механика жидкости и газа»*. М.: ВИНИТИ, 1984. т. 18, с. 112–197.
4. Пажи, Д.Г., Галустов, В.С., *Основы техники распыливания жидкостей.* М.: Химия, 1984. 254 с.
5. Bailey, A.G., *Atomiz. Spray Technol*., 1986, vol. 2., p. 95.
6. Fenn, J.B., Mann, M., Meng, C.K., Wong, C.F., et al., Electrospray ionization for mass spectrometry of large biomolecules, *Science*, 1989, vol. 246, no. 4926, p. 64**.**
   https://doi.org/10.1126/science.2675315
7. Мазин, И.П., Хргиан, А.Х., Имянитов, И.М., *Облака и облачная атмосфера.* Справочник. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
8. Cloupeau, M. and Prunetfoch, B., Electrohydrodynamic spraying functioning modes - a critical review, *J. Aerosol Sci.*, 1994, vol. 25, no. 6, p. 1021.
   https:doi.org/10.1016/0021-8502(94)90199-6
9. Zhang, X. and Basaran, O.A., Dynamics of drop formation from a capillary in the presence of an electric field, *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 326, p. 239.
10. Колпаков, А.В., *Слияние и дробление капель в атмосфере*. Одесса: Изд. КП ОГТ, 2003. 164 с.
11. Lopez-Herrera, J.M. and Ganan-Calvo, A.M., A note on charged capillary jet breakup of conducting liquids: experimental validation of a viscous one-dimensional model, *J. Fluid Mech.*, 2004, vol. 501, p. 303.
    https://doi.org/10.1017/S0022112003007560
12. Jaworek, A. and Krupa, A., Classification of the modes of EHD spraying, *J. Aerosol Sci.*, 1999, vol. 30, no. 7, p. 873.
13. Eggers, J. and Viellermaux, E., Physics of liquid jets, *Rep. Progr. Phys.*, 2008, vol. 71, art. ID 036601.
    https://doi.org/10.1088/0034-4885/71/3/036601
14. Eggers, J., Ch. A brief history of drop formation. https://people.maths.bris.ac.uk/~majge/brief_history.pdf
15. Безруков, В.И., *Научно-технические основы и аппаратное обеспечение автоматизированной электрокаплеструйной маркировки изделий*. Автореф. дисс… докт. технич. наук. 2003. СПб.: СПб. гос. политехнич. унив. 34 с.
16. Пискунов, В.Н., *Динамика аэрозолей.* М: Физматлит, 2010. 296 с.
17. Shiryaeva, S.O. and Grigor'ev, A.I., On instability and spontaneous capillary disintegration of charged jets. Part I: Linear analytical investigations, *Surf. Eng. Appl. Electrochem.*, 2014, vol. 50, no. 5, p. 395.
    https://doi.org/10.3103/S1068375514050093
18. Френкель, Я.И., *Теория явлений атмосферного электричества*. Л.-М.: Гостехтеориздат, 1949. 155 с.
19. Френкель, Я.И., К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме, *ЖЭТФ*, 1936, т. 6, № 4, с. 348.
20. Чашечкин, Ю.Д., Прохоров, В.Е., Высокоразрешающая визуализация гравитационного отрыва капли воды в электростатическом поле, *ЖТФ*, 2023, т. 93, № 11, с. 1539.
    https://doi.org/10.21883/JTF.2023.11.56485.151-23
21. Чашечкин, Ю.Д., Прохоров, В.Е., Влияние электрического поля на динамику структурных компонентов течения при гравитационном отрыве капли воды, *Изв РАН. МЖГ*, 2024, № 3, с. 30.
    https://doi.org/10.31857/S1024708424030039
22. Григорьев, А.И., О некоторых закономерностях реализации неустойчивости сильно заряженной вязкой капли, *ЖТФ*, 2001, т. 71, № 10, с. 1.
23. Жаров, А.Н., Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Нелинейные движения свободной поверхности заряженной капли сильно вязкой жидкости, Письма в ЖТФ, 2005, т. 31, № 15, с. 12.
24. Жаров, А.Н., Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Аналитическое исследование нелинейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости, *ЖТФ*, 2005, т. 75, № 12, с. 33.
25. *Энциклопедический словарь по металлургии*. Справочное издание в 2 т. М.: Изд. «Интермет Инжиниринг», 2000. 821 с.
26. Петрушов, Н., Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Об устойчивости поверхности короткой заряженной струи, движущейся относительно внешней материальной среды, *ЖТФ*, 2017, т. 87, вып.12, с. 1794**.**
    https://doi.org/10.21883/0000000000
27. Левич, В.Г., *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
28. Лазарянц, А.Э., Ширяева, С.О., Григорьев, А.И., *Скаляризация векторных краевых задач.* М.: Изд. Русайнс, 2020. 140 с.
29. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.* М.: Наука. 832 с.
30. Никифоров, А.Ф., Уваров, В.Б., *Специальные функции математической физики.* М.: Наука, 1984. 344 с.
31. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука. 1992. 662 с.
32. Grigor'ev, A.I. and Shiryaeva, S.O., Liquid viscosity effect on drop formation regularities under electrohydrodynamic instability realization, *Surf. Eng. Appl. Electrochem*., 2022, no. 6, p. 604.
    https://doi.org/10.3103/S1068375522060072

Summary

The article considers the physical patterns of electrodispersion of a viscous, incompressible, and electrically conductive liquid: the breaking of the constriction that connects the meniscus to the droplet that detaches from the meniscus during the development of "varicose" instability under the influence of axisymmetric forces: gravity, the force of electric repulsion between the droplet and the like charged meniscus, and the force of liquid pressure in the capillary. The fundamental fact is that the object of study is a small-cross-section constriction that connects a much larger detached droplet of the same liquid to a meniscus of approximately the same radius from which the droplet detaches. Thus, we are faced with a physical object that, in its dimensionless form, is difficult to calculate numerically, as it consists of different-scale parts of the same liquid with different dimensionless local viscosities.

Keywords: drop, meniscus, constriction break, gravitational field, electric field