ASUPRA DEDUCERII ECUAŢIILOR NAVIER–STOKES PENTRU MIȘCAREA LAMINARĂ A FLUIDELOR VÂSCOASE INCOMPRESIBILE

ON THE DEDUCTION OF THE NAVIER–STOKES EQUATIONS FOR THE LAMINAR MOTION OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUIDS

CZU: 532.5 **https://doi.org/10.59295/spd2025e.112**

Ion M. CERNICA
ORCID: 0009-0006-4776-8211
E-mail: ion.cernica@ifa.usm.md
Universitatea de Stat din Moldova, Chișinău, Republica Moldova

Summary. *Starting from the fundamental laws of classical dynamics and molecular physics, an alternative variant of derivation of the Navier–Stokes equations for the laminar motion of incompressible viscous fluids is presented, focused on the application of d'Alembert's principle to the forces exerted on a volume of fluid limited by a closed surface and Newton's law of linear deformation for unidirectional motion. To transform surface integrals into volume integrals, the gradient integral relation and Green's first integral identity are used. The method stands out for its simplicity and clarity, which can give it a wide applicability among the existing methods in the specialized literature. The demonstration is preceded by a brief analysis of the main methods used today to deduce the fundamental equations of hydrodynamics. It is shown that including the phenomenon of internal friction in the equations of motion was a difficult problem, due to the fact that these equations describe the macroscopic velocity flow of the fluid, while energy dissipation occurs at the microscopic level.*

Keywords: *Navier–Stokes equation, fluid, incompressible, motion, viscous.*

INTRODUCERE

Mişcarea fluidelor vâscoase incompresibile a fost dintotdeauna în atenţia cercetătorilor, datorită caracterului său fundamental şi a importanţei sale practice. După cum se ştie, mişcarea fluidelor vâscoase este guvernată de ecuaţiile Navier–Stokes, formulate, independent unul de altul, de Navier [1, 2], Poisson [3, 4], Saint-Venant [5] şi Stokes [6, 7], în prima jumătate a secolului al XIX-lea, din raţionamente moleculare şi fenomenologice. Ele se aplică pe larg la modelarea matematică a multor fenomene naturale, biologice, fiziologice, cât și la soluționarea unui număr mare de probleme tehnice, precum sunt mișcarea curenților atmosferici și oceanici, mișcarea din interiorul stelelor, mișcarea galaxiilor, curgerea aerului în jurul aripii avionului, curgerea fluidelor prin tuburi și canale, mișcarea fluidelor dielectrice în câmp electric, magnetic și electromagnetic. Pe aceste ecuații este bazată hemodinamica circulației sângelui în sistemul cardiovascular uman, lubrifierea hidrodinamică a articulațiilor, mișcarea flu-

idelor biologice în corpul uman, proiectarea avioanelor, rachetelor, turbinelor eoliene și hidraulice, pompelor hidraulice.

Dar în ultimii două sute de ani de cercetare în domeniul hidrodinamicii, eforturile cercetătorilor s-au orientat nu atât asupra elaborării unor metode simple şi clare de deducere a ecuaţiilor Navier–Stokes, cât asupra rezolvării lor. Se explică acest lucru prin faptul că spre sfârşitul secolului al XIX-lea tratarea teoretică a mişcării celor mai importante fluide din punct de vedere practic, apa și aerul, deveniseră o problemă de mare actualitate pentru ştiinţă, iar aceasta putea fi soluţionată numai printr-o tratare directă a ecuaţiilor Navier–Stokes. Drept urmare, în această perioadă, au fost stabilite soluţii exacte pentru un şir de cazuri particulare, în care termenul neliniar, corespunzător acceleraţiei convective sau advective (după unii autori), este nul sau neglijabil în comparație cu alți termeni [8]. Prin prisma acestei ipoteze s-a soluționat mișcarea Hagen–Poiseuille într-o conductă circulară (1840), mișcarea Couette între doi pereți plani paraleli și doi cilindri coaxiali rotitori (1890), mișcarea Hiemenz–Howarth în apropierea punctului critic (1911, respectiv 1934) și mișcarea Rayleigh într-un mediu semi-infinit delimitat de un plan care se deplasează paralel cu el însuși (1911). Mai târziu s-au obținut soluții exacte și pentru cazul în care termenul neliniar este diferit de zero [8], cele mai cunoscute și mai relevante soluții fiind vârtejul Taylor–Green (1937), utilizat pentru testarea metodelor numerice de soluționare, vârtejul Lamb–Oseen (1912), vârtejul Kerr–Dold (1994) și vârtejul Burgers (1948). Cât priveşte elaborarea unor metode de deducere a ecuaţiilor mişcării fluidelor vâscoase, bazate pe raţionamente argumentate din punct de vedere fizic şi matematic, lucrurile au avansat extrem de lent. Din aceste motive, în prezenta lucrare, se propune o metodă alternativă de deducere a ecuaţiilor Navier–Stokes, axată pe transpunerea principiului lui d'Alembert şi a legii deformării liniare a lui Newton pentru mişcarea unidirecţională şi aplicarea analizei vectoriale, fără a se recurge, însă, la calculul tensorial. Pentru o înţelegere mai profundă a problematicii abordate demonstrația este precedată de o analiză succintă a principalelor metode aplicate astăzi la deducerea acestor ecuaţii.

STAREA ACTUALĂ ÎN DOMENIU

La moment, deducerea ecuaţiilor clasice ale dinamicii fluidelor vâscoase se face printr-un număr relativ restrâns de metode. Sunt, astfel, cunoscute metoda Saint-Venant–Stokes [5-7], metoda Milne-Thomson [9, 10], metoda Motulevici [11] și metoda Grosu–Bologa [12]. Cititorul dornic de a cunoaște geneza şi metodologia deducerii ecuaţiilor Navier–Stokes la etapa inițială, în special, metoda Saint-Venant–Stokes, poate consulta tratatul de mecanică a fluidelor [13], în care aceste probleme sunt expuse pe larg.

O metodă relativ nouă, aplicată la deducerea ecuaţiilor fundamentale de mişcare a fluidelor vâscoase, este metoda cunoscutului profesor american L.M. Milne-Thomson [9], care are la bază legea a doua a lui Newton. Pentru deducerea acestor ecuații, el a considerat un volum de fluid, care în momentul de timp t ocupă un domeniu delimitat de o suprafaţă de control închisă S. Potrivit legii a doua a dinamicii clasice, asupra vo-

lumului de fluid considerat acţionează o forţă egală cu viteza de variaţie a cantităţii de mişcare $\int_{\vartheta} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\vartheta$. Mişcarea fluidului conţinut în acest volum se produce sub acţiunea forţei masice exterioare $\int_{\vartheta} \rho \vec{f} d\vartheta$ şi a forţei de rezistenţă $\int_{S} \vec{n}\Phi dS$, în care tensiunea $\vec{n}\Phi$ exercitată pe un element de suprafaţă *dS* are expresia

$$\vec{n}\Phi = -p\vec{n} - \frac{2}{3}\vec{n}\mu(\nabla\vec{v}) + (\vec{n}2\mu\nabla)\vec{v} + \vec{n}\times\mu\xi\,, \tag{1}$$

$\vec{\xi} = \nabla\times\vec{v}$ fiind rotorul vitezei, $\Phi -$ tensorul tensiunilor şi $\vec{n} -$ vectorul unitar al normalei pe elementul de suprafaţă, dirijat către exterior.

Egalând viteza de variaţie a cantităţii de mişcare cu forţa totală exercitată asupra volumului de fluid considerat și apelând la teorema Gauss–Ostrogradski, Milne-Thomson obţine ecuaţia de mişcare în caz general sub forma

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{f} - \nabla p - \frac{2}{3}\nabla[\mu(\nabla\vec{v})] + [\nabla(2\mu\nabla)]\vec{v} + \nabla\times(\mu\xi), \tag{2}$$

care pentru fluide incompresibile cu viscozitatea $\mu = \text{const}$ devine

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{f} - \nabla p - \mu\nabla\times\vec{\xi} \tag{3}$$

sau

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{f} - \nabla p + \mu\nabla^2\vec{v}, \tag{4}$$

după aplicarea regulii dublului produs vectorial [9, 13] $\nabla^2\vec{v} = \nabla(\nabla\vec{v}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{v})$.

Această metodă oferă posibilitatea deducerii rapide a ecuaţiilor Navier–Stokes. În acelaşi timp, stabilirea relaţiei tensiunii (1) şi determinarea formei funcţiei Φ prezintă probleme matematice extrem de dificile [10], care fac ca metoda să aibă o aplicabilitate limitată. Mai mult, scrierea ecuaţiilor clasice ale dinamicii fluidelor vâscoase numai în formă compactă, adică vectorial, nu pare să fie suficient de transparentă pentru analiză.

O metodă mult simplificată de deducere a ecuaţiilor fundamentale de mişcare a fluidelor vâscoase a fost propusă de profesorul rus V.P. Motulevici de la Institutul Energetic din Moscova, în anul 2000 [11]. Metoda are la bază legile fundamentale ale dinamicii clasice şi fizicii moleculare, pe care autorul le aplică cu discernământ forţelor exercitate asupra unui volum de fluid incompresibil în mişcare laminară. El stabileşte mai întâi relaţia de calcul a forţei de rezistenţă vâscoasă – partea vulnerabilă a ecuaţiilor. Apoi arată că coeficientul de viscozitate dinamică nu depinde de orientarea reciprocă a vectorului de viteză şi a elementului de fluid. Aplicând legea a doua a dinamicii lui Newton, obţine ecuaţiile Navier–Stokes pentru fluide cu proprietăţi constante, fără a apela, însă, la un

aparat matematic sofisticat, cum este bunăoară analiza vectorială sau calculul tensorial.

Profesorul T. Grosu şi academicianul M. Bologa de la Institutul de Fizică Aplicată al Universităţii de Stat din Moldova sugerează aplicarea metodei Π a analizei dimensionale la deducerea ecuaţiilor continuităţii, difuziei, conducţiei termice şi de mişcare a fluidului perfect şi vâscos [12]. Metoda are la bază observaţia că ecuaţiile fundamentale ale hidrodinamicii şi transferului de căldură şi de masă conţin derivata substanţială DF/Dt a unei funcţii scalare sau vectoriale, pe care autorii o prezintă sub forma

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)F = \mu \cdot f(\nabla, F, \vec{v}, \gamma, p, ...), \tag{5}$$

în care μ este o constantă adimensională, γ – densitatea sau masa specifică, p – presiunea, iar ∇ – operatorul nabla definit cu relaţia

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Deoarece, în conformitate cu prima teoremă de aproximaţie a lui Weierstrass [14], orice mărime derivată poate fi exprimată printr-un produs dintre o constantă adimensională şi puteri ale mărimilor fundamentale, ecuaţia (5) se scrie sub forma generală

$$\mu \cdot f(\nabla, F, \vec{v}, \gamma, p, ...) = \mu \cdot \nabla^k \cdot F^l \cdot \vec{v}^m \cdot ... \text{ sau } [(\vec{v}, \nabla F)] = \mu \cdot [\nabla]^k \cdot [F]^l \cdot [\vec{v}]^m \cdot ... \tag{6}$$

Egalând exponenţii din membrii stânga şi dreapta ai ultimei egalităţi, se obţine un sistem de ecuaţii algebrice, care conduce la explicitarea membrului dreapta al relaţiei (5). După cum susţin autorii [12], relaţiile (5) şi (6) constituie nucleul metodei. Prin metoda analizei dimensionale a fost soluţionată, totodată, problema existenţei celor două forţe de rezistenţă vâscoasă, de alunecare şi de deformaţie, care apar la „comprimarea–întinderea" fluidului compresibil, şi stabilite relaţiile de calcul ale acestor forţe.

Metodele de deducere a ecuaţiilor generale de mişcare a fluidelor vâscoase descrise mai sus recurg la variabilele lui Euler. În mod natural, ecuaţiile Navier–Stokes pot fi scrise şi în variabilele lui Lagrange. Deducerea acestor ecuaţii în sistemul Lagrange este dată în lucrările [9, 15, 16], care aici nu se analizează.

FORMULAREA PROBLEMEI

După cum s-a văzut, literatura de specialitate oferă puţine metode alternative de deducere a ecuaţiilor clasice ale dinamicii fluidelor vâscoase. Deducerea acestor ecuaţii chiar şi pentru fluidul incompresibil, cazul mai simplu, întâmpină dificultăţi mari, mai ales de ordin matematic. Metodele existente presupun aplicarea unor raţionamente matematice artificiale, care au o semnificaţie fizică aparentă. Pentru elaborarea unei metode simple şi clare de deducere a ecuaţiilor Navier–Stokes, în condiţiile menţionate, s-a impus elaborarea unei metode fenomenologice, bazate pe transpunerea principiului lui

d'Alembert şi a legii deformării liniare a lui Newton pentru mişcarea unidirecţională şi aplicarea analizei vectoriale, evitând calculul tensorial.

DEDUCEREA PROPRIU-ZISĂ

Pentru determinarea formei generale a ecuaţiilor de mişcare a fluidelor vâscoase incompresibile se consideră un fluid în mişcare laminară, din care se separă un element oarecare de fluid cu volumul ϑ limitat de suprafaţa închisă σ (vezi figura 1). Studiul echilibrului dinamic al acestuia poate fi făcut prin solidificarea lui şi aplicarea principiului lui d'Alembert forţelor care acţionează asupra volumului ϑ

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{ext} + \vec{F}_s + \vec{F}_\mu = 0, \tag{7}$$

care poate fi scris şi sub forma legii a doua a dinamicii clasice

$$m\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_s + \vec{F}_\mu, \tag{8}$$

unde $\vec{F}_i$, $\vec{F}_{ext}$, $\vec{F}_s$ şi $\vec{F}_\mu$ sunt respectiv forţa de inerţie, forţa exterioară, forţa superficială (de presiune) şi forţa de rezistenţă cauzată de viscozitate, *m* – masa fluidului conţinut în elementul considerat, iar $D\vec{v}/Dt -$ derivata substanţială sau totală a vitezei în raport cu timpul prin care se pune în evidenţă vectorul acceleraţiei centrului de masă al acestui element. Se presupune că cele două ecuaţii vectoriale se respectă în orice punct al domeniului tridimensional ocupat de fluidul în mişcare.

Prin suprimarea fluidului din exteriorul suprafeţei σ este necesar să se înlocuiască acţiunea acestuia cu un sistem echivalent de forţe. Fie un element de suprafaţă de arie $d\sigma$, ca în figura 1. Pe acest element se exercită forţa de suprafaţă $d\vec{F}_s = \vec{p}_n d\sigma = -p\vec{n}d\sigma$, în care $\vec{p}_n$ este vectorul tensiune, $p -$ presiunea hidrostatică, iar $\vec{n} -$ versorul normalei exterioare la elementul de suprafaţă. Se poate considera că această forţă elementară este aplicată în centrul de masă *C* al elementului de suprafaţă $d\sigma$. Pentru întreaga suprafaţă închisă σ rezultanta forţelor de suprafaţă $\vec{F}_s$ are expresia

$$\vec{F}_s = \oiint_\sigma \vec{p}_n d\sigma = -\oiint_\sigma p\vec{n}d\sigma\,. \tag{9}$$

Întrucât fluidul este vâscos, asupra elementului de suprafaţă considerat se mai exercită şi forţa de rezistenţă $d\vec{F}_\mu$ cauzată de viscozitate. În ipoteza mişcării laminare, pentru calculul acestei forţe se poate admite legea deformării liniare a lui Newton pentru mişcarea unidirecţională, potrivit căreia forţa de rezistenţă care se exercită în planele de contact ale straturilor de fluid este direct proporţională cu derivatele vitezei în raport cu direcţiile normale la aceste plane şi cu ariile suprafeţelor de contact, adică $d\vec{F}_\mu = \vec{n}\cdot\mu\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$. Pentru întreaga suprafaţă închisă forţa de rezistenţă vâscoasă are expresia

$$\vec{F}_{\mu} = \oiint_{\sigma} \vec{n} \cdot \mu \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \tag{10}$$

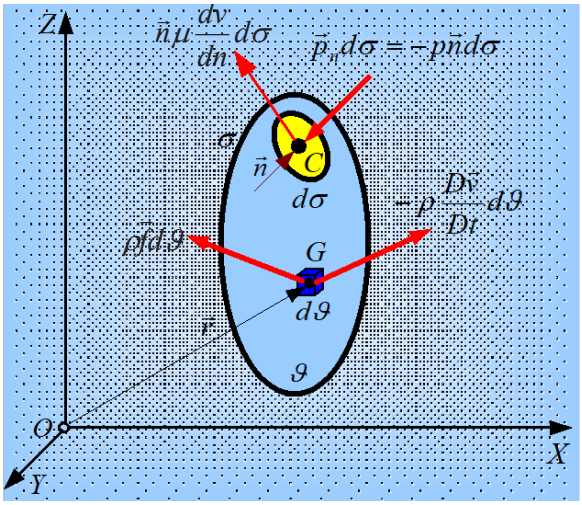


Figura 1. Element de fluid în mișcare, solicitat de forțe exterioare, superficiale, inerțiale și de rezistență.

Fie acum un element de volum $d\vartheta$ și de masă $dm = \rho d\vartheta$ (figura 1). Această masă de fluid se deplasează cu viteza $\vec{v}$ și este supusă acțiunii unei forțe exterioare elementare $d\vec{F}_{ext} = \rho\vec{f}d\vartheta$, unde $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$ este vectorul de densitate al forțelor exterioare. Pentru întregul volum ϑ forța exterioară este

$$\vec{F}_{ext} = \iiint_{\vartheta} \rho\vec{f}d\vartheta \ . \tag{11}$$

Tot asupra elementului de volum $d\vartheta$ acționează și forța de inerție $d\vec{F}_i = -\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}d\vartheta$. Pentru întregul volum ϑ forța de inerție $\vec{F}_i$ este

$$\vec{F}_i = -\iiint_{\vartheta} \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}d\vartheta \ . \tag{12}$$

Între cele patru forțe care se exercită asupra elementului de fluid considerat se poate scrie, în baza principiului lui d'Alembert, relația vectorială

$$-\iiint_{\vartheta} \rho\frac{D\vec{v}}{Dt}d\vartheta + \iiint_{\vartheta} \rho\vec{f}d\vartheta - \oiint_{\sigma} p\vec{n}d\sigma + \oiint_{\sigma} \vec{n} \cdot \mu\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = 0 \ , \tag{13}$$

care reprezintă ***forma integrală a ecuației de mișcare a fluidelor vâscoase***.

Pentru a se obţine şi forma diferenţială, este necesară transformarea integralelor pe suprafaţa închisă σ, $\oiint_{\sigma} p\vec{n}d\sigma$ şi $\iint_{\sigma} \vec{n}\cdot\mu\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$ în integrale de volum, aplicând formula integrală a gradientului, respectiv prima identitate integrală a lui Green [9]:

$$\oiint_{\sigma} p\vec{n}d\sigma = \iiint_{\vartheta} \nabla p d\vartheta \ ; \tag{14}$$

$$\iint_{\sigma} \vec{n}\cdot\mu\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma = \iiint_{\vartheta}\left(\nabla\mu\cdot\nabla v + \mu\nabla^2 v\right)d\vartheta = \iiint_{\vartheta}\nabla\mu\cdot\nabla v\, d\vartheta + \iiint_{\vartheta}\mu\nabla^2\vec{v}\, d\vartheta, \tag{15}$$

deoarece

$$\nabla^2 v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z\right) =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \nabla^2 v_x\vec{i} + \nabla^2 v_y\vec{j} + \nabla^2 v_x\vec{k} = \nabla^2\vec{v},$$

datorită faptului că $\left(\nabla^2\vec{v}\right)_x = \nabla^2 v_x,\ \left(\nabla^2\vec{v}\right)_y = \nabla^2 v_y,\ \left(\nabla^2\vec{v}\right)_z = \nabla^2 v_z$, unde $\nabla^2\vec{v}$ este operatorul lui Laplace în trei dimensiuni, aplicat funcţiei vectoriale $\vec{v}\left(v_x,\ v_y, v_z\ \right)$, iar $\nabla^2 v_x$, $\nabla^2 v_y$ şi $\nabla^2 v_z$ – operatorii monodimensionali ai lui Laplace.

Cu acestea, relaţia (13) devine

$$\iiint_{\vartheta}\left(\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho\vec{f} + \nabla p - \nabla\mu\cdot\nabla v - \mu\nabla^2\vec{v}\right)d\vartheta = 0. \tag{16}$$

În relaţiile (13) şi (16) nu intervine nici un operator diferenţial înaintea integralelor de volum sau de suprafaţă. În aceste condiţii, volumul σ poate fi oarecare, coincizând la timpul t cu volumul considerat iniţial. Deoarece nu s-a făcut nici o ipoteză cu privire la mărimea volumului σ, se poate deci considera şi cazul când volumul σ tinde către zero. Astfel, din (16) rezultă

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} - \rho\vec{f} + \nabla p - \nabla\mu\cdot\nabla v - \mu\nabla^2\vec{v} = 0, \tag{17}$$

care reprezintă ecuaţia generală de mişcare a fluidelor vâscoase incompresibile sau ecuaţia completă Navier–Stokes.

Dacă viscozitatea este invariabilă, deci $\mu = \text{const}$ şi $\nabla\mu = 0$, atunci ecuaţia (17) se simplifică şi ia forma (4), specifică fluidelor vâscoase incompresibile în mişcare laminară.

La demonstraţia ecuaţiei Navier–Stokes s-a presupus că toate funcţiile care determină şi caracterizează mişcarea laminară a fluidelor vâscoase reprezintă funcţii continue de coordonate şi timp şi sunt deci derivabile.

CONCLUZII

În baza celor expuse mai sus, au fost trasate următoarele concluzii:

1. În ultimii două sute de ani de cercetare în domeniul dinamicii fluidelor vâscoase, atenţia cercetătorilor s-a orientat nu atât asupra elaborării unor metode simple și clare de deducere a ecuaţiilor Navier–Stokes, cât asupra rezolvării lor. Acesta a şi fost motivul elaborării unei metode noi de demonstraţie, succedată de o analiză succintă a principalelor metode de deducere a ecuaţiilor clasice ale dinamicii fluidelor vâscoase.

2. În literatura de specialitate contemporană, deducerea ecuaţiilor dinamicii fluidelor vâscoase se face printr-un număr relativ mic de metode, cele mai cunoscute fiind: metoda Saint-Venant–Stokes, metoda Milne-Thomson şi metoda Motulevici. În ultimul timp, se vehiculează ideea aplicării metodei Π a analizei dimensionale la deducerea ecuaţiilor de mişcare a fluidelor perfecte şi vâscoase, precum şi a ecuaţiilor continuităţii, difuziei şi conducţiei termice.

3. Metoda alternativă de deducere a ecuaţiilor Navier–Stokes propusă prin prezentul studiu are la bază principiul lui d'Alembert şi legea deformării liniare a lui Newton pentru mişcarea unidirecţională. Pentru transformarea integralelor de suprafaţă în integrale de volum, se aplică relaţia integrală a gradientului şi prima identitate integrală a lui Green. Demonstrația matematică este axată pe presupunerea că toate funcţiile care determină mişcarea laminară a fluidelor vâscoase reprezintă funcţii continue de coordonate şi timp.

4. Datorită simplității, originalității și rigurozității, metoda elaborată poate fi aplicată în procesul de predare a mecanicii fluidelor.

REFERINȚE:

1. Navier C.L. Sur les lois des mouvement des fluides, en ayant générale des adhésion des molecules. Annales de Chimie et de Physique, 1821, vol. 19, pp. 244-260.
2. Navier C.L. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, présenté le 18 mars 1822. Mémoire de l'Académie des Sciences de l'Institute de France, 1827, tome 6, pp. 389-440.
3. Poisson S.D. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques et de fluides. Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de l'Institute de France, 1829, vol. 8, pp. 357-570, 623-627.
4. Poisson S.D. Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corp solides élastiques et des fluides. Journal de l'École Polytechnique (Paris), 1831, vol. 13, cahier 20, pp. 1-174.
5. Barré de Saint-Venant A.J.C. Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides, présenté le 14 avril 1834. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, 1843, tome 17, no. 22, pp. 1240-1243.

6. Stokes G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solides. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1845, vol. 8, pp. 287-305.
7. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1851, vol. 9, part II, pp. 8–106.
8. Drazin P.G., Riley N. *The Navier–Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. – X+196 p. ISBN – 13 978-0-521-68162-9.
9. Milne-Thomson L.M. *Theoretical hydrodynamics*. London: Macmillan and Company Limited, 1962. 660 p.
10. Cope W.F. The equations of hydrodynamics in a very general form. Rep. Memor. Aero. Res. Comm. London, No. 1903. British A.R.C., 1942.
11. Мотулевич В.Р. Упрощенный вывод уравнения количества движения вязкой несжимаемой жидкости. Лесной вестник, 2000, № 2, с.54-55.
12. Гросу Ф.П., Болога М.К. К выводу уравнений гидро- и электродинамики методом анализа размерностей. Электронная обработка материалов, 2019, том 55, №1, с.53-58.
13. Cernica I.M. *Bazele mecanicii fluidelor*. Chișinău: Bones Offices, 2021. 948 p. ISBN 978-9975-87-886-9.
14. Cernica I.M. *Bazele fizice ale analizei dimensionale: aplicații și sisteme de unități*. București: A.G.I.R., 2014. 195 p. ISBN 978-973-720-523-0.
15. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*, часть 2. Москва: Физматгиз, 1963. 728 с. ISBN lipsește.
16. Монин А.С. О лагранжевых уравнениях гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости. Прикладная математика и механика, 1962, том 26, №2, с.320-327.

***N.B. Mulțumiri**. Lucrarea a fost realizată cu sprijinul Guvernului Republicii Moldova în cadrul subprogramului 011203 (2024-2027).*

***Conflict de interese**. Autorul declară că nu are niciun conflict de interese.*