UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA
Facultatea de Matematică și Informatică
Departamentul Matematică

Radu BUZATU, Ludmila NOVAC, Ion CUCU

Calculul propozițiilor și logica predicatelor

Note de curs

Aprobat de
Consiliul Calității al USM

Chișinău 2021

510.63(075.8)
B 98

Recomandat de Departamentul Matematică și de Consiliul Facultății de Matematică și Informatică.

Autori: ***Radu BUZATU***, dr., lector univ.
Ludmila NOVAC, dr., conf. univ.
Ion CUCU, dr., conf. univ.

Recenzent: ***Andrei RUSU***, dr., conf. univ., Institutul de Matematică şi Informatică „Vladimir Andrunachievici”

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

Buzatu, Radu.

Calculul propozițiilor și logica predicatelor: Note de curs / Radu Buzatu, Ludmila Novac, Ion Cucu; Universitatea de Stat din Moldova, Facultatea de Matematică și Informatică, Departamentul Matematică. – Chișinău: CEP USM, 2021. – 117 p.
Referinţe bibliogr.: p. 116-117 (21 tit.). – 50 ex.

ISBN 978-9975-158-81-7.
510.63(075.8)
B 98

ISBN *****************

Introducere

Rădăcinile adânci ale logicii își au originea în vechea antichitate. La început logica era mai mult un câmp de compilații oratorice ale marilor filosofi decât o știință. Un mare adept al acestor aplicații ale logicii era Socrate (465-399 î.e.n.). Apoi Democrit (460-370 î.e.n.) încerca să formuleze unele legi ale logicii, considerând că ele reflectă nu doar particularitățile gândirii, dar și, în primul rând, proprietățile obiective ale lumii reale ce ne înconjoară. Chiar și Platon (427-347 î.e.n.), care era oponent înverșunat al lui Democrit, prețuia logica ca un mijloc de cunoaștere științifică. În școala lui Platon, pentru care erau caracteristice puritatea și justețea raționamentului logic, s-a format marele Aristotel (384-322 î.e.n.), lucrările căruia sunt considerate apogeul filosofiei antice. Aristotel dezvoltă logica ca știință despre mijloacele de fundamentare a adevărului, de diferențiere a adevărului și falsului. El consideră că legătura dintre raționamente în procesul demonstrației nu este arbitrară, ci este determinată de relațiile dintre obiecte, evenimente și de aceea trebuie să se supună unor legi, care să nu depindă de dorințele ori dispozițiile oamenilor.

Spre deosebire de Democrit, Aristotel acordă atenție sporită deducției metodelor de obține a consecințelor din premise, care garantează veridicitatea concluziei cu condiția veridicității premiselor. La astfel de metode se referă, de exemplu, silogismele, teoria cărora a fost construită de Aristotel cu o strictețe comparabilă doar cu strictețea matematică.

Cu timpul, logica actuală este construită ca o știință deductivă axiomatică. Adică, o serie de propoziții sau afirmații, care se numesc axiome, sunt acceptate, fiind puse la baza unor științe, fără a fi definite și fără a fi demonstrate. Alte propoziții sunt introduse prin definiție, fiind formate cu ajutorul unor procedee de definire, date cu ajutorul primelor propoziții.

După părerea ilustrului matematician David Hilbert, metoda axiomatică permite să sesizăm cu adevărat esența gândirii științifice și aceasta este, de fapt, metoda matematică. Prin urmare, metoda axiomatică descrie în mod explicit organizarea internă a unei științe, punând în evidență toate categoriile de obiecte și propoziții care apar în cadrul științei respective și motivele în virtutea cărora ele sunt acceptate.

În logică se consideră că propozițiile sunt în afară de orice conținut, vide de orice substanță. Obiectele unei asemenea logici reprezintă doar niște simple simboluri sau niște litere majuscule A, B, C, ... , F_5, G_7, H_{10}, ... Propozițiile și legăturile logice dintre aceste propoziții exprimă relațiile dintre aceste simboluri și aceste relații sunt exprimate tot simbolic.

Propozițiile se leagă între ele, formând fraze, numite formule. Astfel de formule sunt forme logice pure, în care conținutul lor nu apare în niciun fel. Utilizarea simbolurilor permite să se transforme unele formule în altele, ceea ce este un calcul logic, asemănător calculului algebric.

Interesul pentru logică a crescut treptat și putem afirma că în prezent numărul celor care se interesează de aceasta disciplină este în creștere. La interesul teoretic pentru logica se adaugă și interesul practic pentru această disciplină al inginerilor și al tehnicienilor. Acest interes se datorează faptului că logica se aplică în proiectarea circuitelor cu contacte și relee, precum și a circuitelor electronice.

Logica își găsește în prezent o aplicare și în acel capitol al lingvisticii matematice în care se studiază traducerea automată, precum și in teoria codurilor, care servește drept punte de legătură între lingvistica matematică și telemecanică. Un alt aspect al problemei în cauză este importanța crescândă a rezultatelor obținute în urma cercetărilor din teoria algoritmilor, precum și interesul unor cercetători în care logica este legată de algebra modernă.

În lucrarea de față se cercetează numai logica clasică sau logica bivalentă. În această logică orice propoziție este adevărată sau falsă și nu poate fi în același timp adevărată și falsă, adică se îndeplinește principiul excluderii celui de-al treilea (terțului) și principiul contradicției.

Notele de curs sunt structurare în trei capitole. În primul capitol sunt expuse principalele rezultate cu referire la calculul propozițiilor. Capitolul doi face o prezentare a algebrei predicatelor, iar capitolul trei se focusează pe calculul predicatelor. Fiecare dintre acestea conține exemple practice și exerciții pentru lucrul individual.

Lucrarea este direcționată spre formarea competențelor specifice disciplinei Logica Matematică și Teoria Mulțimilor la studenții de la specialitățile de Informatică, Informatică Aplicată și Tehnologii Informaționale de la facultățile: Matematică și Informatică; Fizica și Inginerie.

Cuprins

Capitolul 1
Calculul propozițiilor

1.1 Descrierea simbolurilor și definirea formulelor calculului propozițiilor

În scopul construirii formulelor în calculul propozițiilor, vom folosi trei categorii de simboluri:

1. Pentru notarea variabilelor propoziționale şi formulelor, vom utiliza literele majuscule latine (posibil şi indexate) A, B, C, ..., X, Y, Z, A_5, B_7, ...

2. Pentru notarea simbolurilor conectorilor (legăturilor) logici, vom utiliza, respectiv: & – conjuncţia (se mai notează: $\wedge$), $\vee$ – disjuncția, $\neg$ – negaţia ($\neg A$ sau $\bar{A}$) şi $\rightarrow$ – implicaţia (sau $\supset$,).

3. Pentru notarea simbolurilor auxiliare, vom utiliza parantezele, care pot fi rotunde (,), pătrate [,] sau figurate {, }.

Alte categorii de simboluri în calculul propozițiilor nu vom utiliza. În cazul implicației $A \rightarrow B$ vom spune că A este *ipoteză*, iar B – *consecință*.

Formulele calculului propozițiilor se formează dintr-o mulțime finită de simboluri din aceste trei categorii. Astfel de consecutivități din aceste simboluri pot fi cercetate în calitate de cuvinte, scrise în alfabetul ce constă din mulţimea simbolurilor sus-numite.

Nu orice cuvânt ce constă din simbolurile cercetate este formulă. Definiția completă a formulei are un caracter recursiv: se indică formulele inițiale, iar apoi regulile ce pot fi aplicate la construirea noilor formule.

Definiția formulei calculului propozițiilor

I. Variabilele propoziţionale notate prin litere latine majuscule sunt formule, pe care le vom numi *formule elementare*.

II. Dacă F şi G sunt formule, atunci cuvintele de tipul: $F\&G$, $F \vee G$, $F \to G$, $\neg F$, $(\bar{F})$ sunt la fel formule.

III. Toate formulele calculului propoziţiilor se obţin doar în baza acestor reguli.

Exemplul 1.1.1. Următoarea expresie (cuvânt) este formulă: $\big(\neg A\&(A \to B)\big) \to (A \vee \neg B)$, iar expresiile de forma $\&A$, $A \vee \neg$, $A\&B \to\vee$ nu sunt formule.

Părţile componente ale formulelor le vom numi *subformule*. De exemplu, formula $(\neg A\&B) \to C$ are 6 subformule, şi anume: A, B, C, $\neg A$, $\neg A\&B$ şi $\neg(A\&B) \to C$.

Din mulțimea tuturor formulelor *calculului propozițiilor* evidențiem inițial o submulțime de formule, pe care le vom considera ca formule adevărate şi le vom numi *axiome*.

1.2 Axiomele calculului propoziţiilor

Următorul pas în descrierea calculului propozițiilor este evidenţierea unei clase de formule, pe care le vom numi *formule deductibile* în calculul propozițiilor. Definiţia formulelor deductibile are la fel un caracter recursiv, asemănător definiţiei formulelor. La început se definesc formulele deductibile inițiale, iar apoi se indică regulile ce ne permit să obţinem din acestea noi formule deductibile. Astfel de reguli le vom numi *reguli de deducţie*, iar formulele inițiale le vom numi *axiome*. Procesul de construire a formulelor deductibile din axiome, în baza regulilor de deducţie, îl vom numi *deducția formulei* date din axiome.

Dacă o formulă a calculului propozițiilor B se obține în rezultatul deducției din formula A, aceasta se notează prin $A \vdash B$, unde $\vdash$ este semnul deducţiei.

Axiomele calculului propozițiilor le vom împărți în patru grupe:

I. Axiome ce conţin numai implicaţia,

II. Axiome ce conţin numai implicaţia şi conjuncţia,

III. Axiome ce conţin numai implicaţia şi disjuncţia,

IV. Axiome ce conţin numai implicaţia şi negaţia.

Axiomele calculului propozițiilor

I. $(\rightarrow)$

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $\big(A \rightarrow (B \rightarrow C)\big) \rightarrow \big((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\big)$

II. $(\rightarrow, \&)$

1. $A\&B \rightarrow A$
2. $A\&B \rightarrow B$
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow \big[(A \rightarrow C) \rightarrow \big(A \rightarrow (B\&C)\big)\big]$

III. $(\rightarrow, \vee)$

1. $A \rightarrow A \vee B$
2. $B \rightarrow A \vee B$
3. $(A \rightarrow C) \rightarrow \big[(B \rightarrow C) \rightarrow \big((A \vee B) \rightarrow C\big)\big]$

IV. $(\rightarrow, \neg)$

1. $A \rightarrow \bar{\bar{A}}$
2. $\bar{\bar{A}} \rightarrow A$
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow \bar{A})$

Axioma 2 din grupa III o vom nota prin (III.2), iar axioma 3 din grupa II – prin (II.3). În mod analogic vom folosi notațiile respective şi pentru celelalte axiome. De exemplu, axioma (IV.3) va fi formula $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$.

1.3 Regulile de deducţie în calculul propoziţiilor

În calculul propozițiilor vom avea două *reguli principale* (de bază) *de deducţie*:

1) *Regula substituției* care constă în următoarele:

Fie $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ o formulă deductibilă în calculul propoziţiilor ce conţine formulele elementare $A_1, A_2, \dots, A_n$. Substituind subformula A_1 (pretutindeni unde ea se întâlnește) cu formula arbitrară B, obţinem $F(B, A_2, A_3, \dots, A_n)$, care este la fel o formulă deductibilă.

Vom nota deducția prin

$$S_{A_1}^{B} F(A_1, A_2, \dots, A_n) \vdash F(B, A_2, A_3, \dots, A_n).$$

Regula substituției poate fi generalizată, adică în formula $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ care depinde de variabile propoziționale $A_1, A_2, \dots, A_n$ se pot efectua concomitent mai multe substituţii: $S_{A_1}^{B_1} F$, $S_{A_2}^{B_2} F$, ..., $S_{A_m}^{B_m} F$, unde $1 \le m \le n$, iar în rezultat se va obține la fel o formulă deductibilă $F(B_1, B_2, \dots, B_m, A_{m+1}, \dots, A_n)$.

Remarcăm faptul că pot fi substituite numai formulele elementare, în timp ce formula cu care se substituie este arbitrară (inclusiv nedeductibilă).

Exemplul 1.3.1. Dacă în axioma (II.3) substituim variabila propozițională A cu $B \to C$, obținem

$$S_A^{B \to C}(\mathrm{II.3}) \vdash \big((B \to C) \to B\big) \to \Big[\big((B \to C) \to C\big) \to \\ \to \big((B \to C) \to (B \& C)\big)\Big].$$

2) ***Regula Modus Ponens (M.P.)***. Dacă formulele F şi $(F \to G)$ sunt deductibile, atunci şi formula G este la fel deductibilă. Vom nota:

$$M.P.\ \frac{F, F \to G}{G} \text{ sau } M.P.\ (F, F \to G) \vdash G.$$

Remarcăm faptul că pentru a aplica regula M.P. este necesar să avem două formule F şi $F \to G$, care ambele să fie deductibile şi atunci rezultă că şi formula G este la fel deductibilă. Subformula F în $F \to G$ se numește *ipoteză*, iar G – *consecință*.

Astfel, indicând axiomele şi regulile de deducție, obţinem noțiunea completă de formulă deductibilă în calculul propoziţiilor. Aplicând regulile de deducție la axiomele date, putem construi noi formule deductibile în calculul propozițiilor.

Definiția 1.3.1. *Vom numi* ***şir de deducţie*** *orice şir de formule* $F_1, F_2, \dots, F_n$ *care posedă următoarea proprietate: fiecare formulă* F_i $(i = \overline{1, n})$ *din acest şir sau este axiomă, sau se obţine din unele formule precedente din acest şir în baza regulii substituţiei sau M.P. Se spune că formula* F *este* ***deductibilă*** *în calculul propoziţiilor, dacă există un astfel de şir de deducţie* $F_1, F_2, \dots, F_n$*, astfel încât* $F_n = F$*. În acest caz, vom scrie:* $\vdash F$.

Să cercetăm în continuare un exemplu concret.

Exemplul 1.3.2. Vom arăta că formula $(A \to B) \to (A \to A)$ este deductibilă în calculul propozițiilor.

La primul pas efectuăm următoarea substituție:

1) $S_C^A(\mathrm{I}.2) \vdash \big(A \to (B \to A)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to A)\big)$.

Deoarece ipoteza din ultima formulă $A \to (B \to A)$ coincide cu axioma (I.1), atunci putem aplica regula M.P. la această axiomă şi la formula obţinută la pasul 1), obţinând în final la pasul doi:

2) $M.P.\ \dfrac{A \to (B \to A), \big(A \to (B \to A)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to A)\big)}{(A \to B) \to (A \to A)}$

Astfel, obţinem că formula $(A \to B) \to (A \to A)$ poate fi dedusă din axioma (I.2), efectuând la primul pas substituţia respectivă, iar la pasul 2) aplicăm M.P. la axioma (I.1) şi la formula obţinută la pasul 1).

În calculul propozițiilor sunt valide și alte reguli derivare. Să luăm cunoștință de câteva dintre ele.

Regula Modus Ponens Generalizată (*M.P.G.*) Poate fi aplicată pentru formule de forma $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)))$ şi poate fi formulată astfel. Dacă formulele $A_1, A_2, \dots, A_n$ şi formula $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)))$ sunt deductibile, atunci şi formula L este la fel deductibilă.

Această afirmaţie poate fi demonstrată uşor prin aplicarea consecutivă a regulii M.P. de mai multe ori.

Într-adevăr, dacă formulele A_1 şi $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)))$ sunt deductibile, atunci, conform regulii M.P., este deductibilă şi formula $A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots))$. Dar, deoarece sunt deductibile formulele A_2 şi $A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots))$, rezultă că este deductibilă şi formula $A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)$. Raţionând în acelaşi mod consecutiv pentru fiecare formulă din şirul $A_3, A_4, \dots, A_n$, se poate demonstra că formula L este la fel deductibilă.

Regula Modus Ponens Generalizată poate fi scrisă schematic astfel:

$$M.P.G.\ \frac{A_1, A_2, \dots, A_n, A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\dots(A_n \to L)\dots)))}{L}.$$

Regula Modus Tollens: *Regula de inferenţă* (*M.T.*) spune că inferenţa $A \to B$ spre $\bar{B}$ implică faptul că $\bar{A}$ este validă (sau deductibilă):

$$M.T.\ \frac{A\to B, \bar{B}}{\bar{A}}.$$

Exemplul 1.3.3. Să demonstrăm că are loc relaţia $\vdash \bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}$.

Vom prezenta şirul de deducţie sub formă de paşi, indicând iniţial regulile aplicate la fiecare pas:

1) $S_B^{\neg\neg A}$(IV.3) $\vdash (A \to \neg\neg A) \to (\bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A})$.

2) $M.P.$ (IV.1), (1) $\vdash \bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}$.

Remarcăm faptul că aceeaşi formulă $\bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}$ poate fi obţinută printr-un singur pas. Şi anume:

1) $S_A^{\neg A}$(IV. 2) $\vdash \bar{\bar{\bar{A}}} \to \bar{A}$.

Legătura dintre calculul propoziţiilor şi algebra propoziţiilor este redată în următoarea teoremă.

Teorema 1.3.1. *O formulă este deductibilă în calculul propoziţiilor, dacă şi numai dacă ea este identic adevărată în algebra propoziţiilor.*

1.4 Teorema deducţiei în calculul propoziţiilor

În multe cazuri ne interesează deducția nu doar din axiome, dar şi dintr-o listă de formule care se adaugă la aceste axiome.

Vom defini deducţia dintr-o listă dată de formule, pe care le anexăm la cele patru grupe de axiome.

Fie $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ o listă de formule arbitrare.

Definiția 1.4.1. *Vom spune că formula B* ***se deduce din lista de formule*** Γ*, dacă există un şir de formule $B_1, B_2, \ldots, B_n$, încât ultima formulă din acest şir $B_n = B$, iar fiecare formulă B_i din acest şir sau este axiomă, sau este din lista Γ, sau se obţine din formulele B_j şi B_k, unde $k, j < i$ în baza regulilor de deducţie (substituţie sau M.P.). În acest caz, vom scrie $\Gamma \vdash B$, iar şirul de formule $B_1, B_2, \ldots, B_n$ se numeşte* ***deducţia formulei*** *B* ***din lista*** Γ.

Pentru cazul particular $m = 0$ (adică, $\Gamma = \emptyset$), vom scrie $\emptyset \vdash B$ sau simplu $\vdash B$, înţelegându-se că B se deduce numai din axiome.

De exemplu: $\{F, F \to G, G \to L\} \vdash F, F \to G, G, G \to L, L$.

Teorema 1.4.1. *În calculul propozițiilor poate fi dedusă formula $A \to A$, adică $\vdash A \to A$.*

Demonstrație. Vom construi deducţia formulei date pe paşi, indicând la fiecare pas regula folosită, iar în paranteze vom indica formula la care se aplică regula dată.

1) $S_B^{A\to A}(\mathrm{I}.2) \vdash \left[A \to \big((A \to A) \to C\big)\right] \to$
$\to \left[\big(A \to (A \to A)\big) \to (A \to C)\right].$
2) $S_C^{A}(1) \vdash \left[A \to \big((A \to A) \to A\big)\right] \to$
$\to \left[\big(A \to (A \to A)\big) \to (A \to A)\right].$

3) $S_B^{A\to A}(\mathrm{I}.1) \vdash A \to \big((A \to A) \to A\big).$

4) $M.P.\,(3),(2) \vdash \big(A \to (A \to A)\big) \to (A \to A).$

5) $S_B^{A}(\mathrm{I}.1) \vdash A \to (A \to A).$

6) $M.P.\,(5),(4) \vdash A \to A.$

Teorema este demonstrată. □

În unele cazuri, deducţia din axiome în baza regulilor de deducție poate fi efectuată mai simplu, demonstrând în prealabil aşa-numita *teorema deducţiei*. Această teoremă ne permite să deducem formule în calculul propoziţiilor printr-o metodă mai simplă decât deducţia lor nemijlocită din axiome în baza regulilor de deducţie.

Teorema 1.4.2. (Teorema deducției) *Dacă Γ este o listă de formule, iar A şi B sunt aşa formule pentru care are loc relaţia $\Gamma, A \vdash B$, atunci vom avea $\Gamma \vdash A \to B$.*

Teorema 1.4.3. (Teorema inversă a deducţiei) *Dacă în calculul propoziţiilor formula $A \to B$ este deductibilă din lista de formule Γ (adică, $\Gamma \vdash A \to B$), atunci din lista de formule Γ şi din formula A este deductibilă formula B (deci: $\Gamma, A \vdash B$).*

Demonstrația Teoremelor 1.4.2 și 1.4.3 poate fi găsită în [1].

Teorema 1.4.4. (Teorema generalizată a deducției) *Dacă în calculul propozițiilor formula A poate fi dedusă din lista de formule* $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$, *atunci are loc relaţia:*

$$\frac{\{C_1, C_2, \ldots, C_k\} \vdash A}{\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \ldots (C_k \to A) \ldots))}.$$

Demonstrație. Vom nota prin H_k mulţimea formulelor

$$H_k = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}.$$

Conform condiției, formula A este deductibilă: $H_k \vdash A$ sau $H_{k-1}, C_k \vdash A$. Atunci, în baza teoremei deducţiei, este adevărată afirmaţia $H_{k-1} \vdash C_k \to A$. Deoarece $H_{k-1} = \{H_{k-2}, C_{k-1}\}$, atunci este adevarată afirmaţia $H_{k-2}, C_{k-1} \vdash C_k \to A$.

Utilizând din nou teorema deducţiei, vom obţine:

$$H_{k-2} \vdash C_{k-1} \to (C_k \to A).$$

Aplicând această procedură de k ori, vom ajunge la afirmaţia:

$$H_0 = \emptyset \vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \ldots (C_k \to A) \ldots)).$$

Dar din mulţimea vidă sunt deductibile doar formulele deductibile, adică:

$$\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to \ldots (C_k \to A) \ldots)).$$

În caz particular pentru $k = 1$, evident vom avea: $\frac{\vdash C \vdash A}{\vdash C \to A}$. □

1.5 Regulile principale de deducţie în calculul propoziţiilor

Considerăm două mulțimi de formule deductibile în calculul propoziţiilor – Γ şi Δ. Se va nota în continuare prin Γ, Δ reuniunea lor, adică $\Gamma, \Delta = \Gamma \cup \Delta$. În caz particular, dacă mulțimea de formule Δ conţine doar o formulă C, atunci vom scrie reuniunea $\Gamma \cup \{C\}$ în forma Γ, C.

Vom analiza regulile principale de deducţie.

I. $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash A}$.

Această regulă rezultă nemijlocit din definiţia de deducţie dintr-o mulţime de formule.

II. $\dfrac{\Gamma, C \vdash A; \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A}$.

Demonstrație. Deoarece, conform condiției, din mulţimea de formule Γ, C este deductibilă A, atunci există un şir de deducţie din lista Γ, C, în care ultima formulă va fi A: $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, A$.

Întrucât, conform condiției, din mulţimea de formule Γ este deductibilă formula C, atunci există un şir de deducţie din lista Γ, în care ultima formulă va fi C: $C_1, C_2, \ldots, C_m, C$.

Dacă în primul şir de deducţie lipseşte formula C, atunci ea este o formulă deductibilă doar din Γ şi rezultă că din mulţimea Γ este deductibilă formula A.

Dacă în primul şir de deducţie una dintre formule este formula C (fie formula B_i), atunci vom include între formulele B_{i-1} şi B_{i+1} şirul de deducţie $C_1, C_2, \ldots, C_m, C$. În rezultat vom obţine un şir de deducţie din mulţimea Γ:

$$B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}, C_1, C_2, \ldots, C_m, C, B_{i+1} \ldots, B_{k-1}, A.$$

Așadar, formula A este deductibilă din Γ. □

III. $\dfrac{\Gamma, C \vdash A; \Delta \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash A}$.

Demonstrație. Deoarece din $\Gamma, C \vdash A$, atunci din prima regulă de deducţie rezultă $\Gamma, \Delta, C \vdash A$. Dar întrucât are loc $\Delta \vdash C$, atunci din prima regulă de deducţie $\Gamma, \Delta \vdash C$. Folosind regula II de deducţie, vom obţine $\Gamma, \Delta \vdash A$. □

IV. Teorema deducţiei: $\dfrac{\Gamma, C \vdash A}{\Gamma \vdash C \to A}$.

V. Teorema inversă a deducției $\frac{\Gamma\vdash C\to A}{\Gamma,C\vdash A}$**.**

VI. Regula Introducerii Conjuncţiei: $\frac{\Gamma\vdash A,\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\&B}$**.**

Demonstrație. Conform condiției, $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \vdash B$. Având în vedere faptul că $\{A, B\} \vdash A\&B$ și utilizând regula I de deducţie a formulelor, se poate scrie: $\Gamma, A, B \vdash A\&B$, şi $\Gamma, A \vdash B$. Acum, aplicând regula II de deducţie, din ultimele două relaţii vom obține în cele din urmă $\Gamma, A \vdash A\&B$.

La fel, conform regulii II de deducţie, din relaţia $\Gamma \vdash A$ şi din ultima relaţie se va obţine $\Gamma \vdash A\&B$.

VII. Regula Introducerii Disjuncţiei: $\frac{\Gamma,A\vdash C,\Gamma,B\vdash C}{\Gamma,A\vee B\vdash C}$**.**

Demonstrație. Din condiţie avem $\Gamma, A \vdash C$, $\Gamma, B \vdash C$. Conform teoremei deducţiei rezultă:

$$\Gamma \vdash A \to C, \qquad \Gamma \vdash B \to C. \tag{1.1}$$

Vom aplica axioma (III. 3). Ea este deductibilă din mulţimea Γ ca formulă deductibilă, adică:

$$\Gamma \vdash (A \to C) \to \big[(B \to C) \to \big((A \vee B) \to C\big)\big]. \tag{1.2}$$

Aplicând la formulele (1.1) şi (1.2) regula M.P. generalizată, vom obţine:

$$\Gamma \vdash A \vee B \to C.$$

Utilizând acum regula V de deducţie, vom avea: $\Gamma, A \vee B \vdash C$.□

1.6 Aplicaţiile teoremei deducţiei. Regulile derivate de deducţie în calculul propoziţiilor

Teorema 1.6.1. $\vdash (A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$.

Consecința 1.6.1. *Din formula obţinută în Teorema* 1.6.1*, alăturând formulele $A \to B$ şi $B \to C$, putem aplica de două ori M.P. şi obţinem* *formula* $A \to C$. *Astfel, obţinem* ***Regula Silogismului (R.S.)****, care poate fi scrisă în modul următor:*

$$R.S.\frac{\vdash A\to B, \vdash B\to C}{\vdash A\to C}.$$

Această regulă poate fi generalizată astfel: dacă avem un şir de formule deductibile $A \to B_1$, $B_1 \to B_2$, ..., $B_m \to C$, atunci este deductibilă şi formula $A \to C$. Astfel, obţinem ***Regula Silogismului Generalizată*** **(R.S.G.)**, care poate fi scrisă în modul următor:

$$R.S.G.\ \frac{\vdash A \to B_1, \vdash B_1 \to B_2, \dots, \vdash B_m \to C}{\vdash A \to C}.$$

Teorema 1.6.2. $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big)$.

Consecința 1.6.2. *Dacă la formula obţinută în Teorema* 1.6.2 *alăturăm formula* $A \to (B \to C)$*, atunci putem aplica regula M.P. şi obţinem o nouă regulă, care poartă denumirea de* ***Regula Transpunerii (sau Transpoziţiei) Ipotezelor (R.T.I.)****, ce poate fi scrisă astfel:*

$$R.T.I.\frac{\vdash A\to(B\to C)}{\vdash B\to(A\to C)}.$$

În formula $A \to (B \to C)$ formulele A şi B se consideră ipoteze. Ele fiind transpuse (adică, schimbate cu locul), se obţine, la fel, o formulă deductibilă.

Teorema 1.6.3. $\vdash A \to \big(B \to (A\&B)\big)$.

Consecința 1.6.3. *Din Teorema 1.6.3 rezultă* ***Regula Conjuncţiei Formulelor (R.C.F.)****, care sună în felul următor: dacă două formule A şi B sunt deductibile, atunci conjuncţia lor A&B la fel este deductibilă. Se scrie astfel:*

$$R.C.F.\frac{\vdash A, \vdash B}{\vdash A\&B}.$$

Din axiomele (II.1) şi (II.2) rezultă şi regula inversă: ***Regula Despărțirii (Separării) Formulelor* (*R.D.F.*)**, pe care o vom scrie astfel:

$$R.D.F.\ \frac{\vdash A\&B}{\vdash A, \vdash B}.$$

Această regulă semnifică următorul fapt: dacă conjuncţia a două formule este deductibilă, atunci şi fiecare formulă separat la fel este deductibilă.

Teorema 1.6.4. $\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A\&B) \to C\big).$

Consecința 1.6.4. *Dacă aplicăm la formula* $A \to (B \to C)$ *şi la formula obţinută în* Teorema 1.6.4 *regula M.P., obţinem o nouă regulă –* ***Regula Conjuncţiei Ipotezelor (R.C.I.)****, care poate fi scrisă astfel:*

$$R.C.I.\ \frac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash (A\&B) \to C}.$$

Pentru R.C.F. precizăm că în formula $A \to (B \to C)$, formulele A şi B se consideră ipoteze. Conform acestei reguli, formula nou-obţinută, în care noua ipoteză este conjuncţia celor două ipoteze $A\&B$, la fel este formulă deductibilă în calculul propoziţiilor.

Teorema 1.6.5. $\vdash \big((A\&B) \to C\big) \to \big(A \to (B \to C)\big).$

Consecința 1.6.5. *Dacă aplicăm la formula* $(A\&B) \to C$ *şi la formula obţinută în* Teorema 1.6.5 *regula M.P., obţinem* ***Regula Despărțirii (sau Separării) Ipotezelor (R.D.I.)****, pe care o vom scrie astfel:*

$$R.D.I.\ \frac{\vdash (A\&B) \to C}{\vdash A \to (B \to C)}.$$

Regula R.D.I. este opusă pentru R.C.I., adică ipoteza compusă $A\&B$ poate fi divizată în două ipoteze simple A şi B, iar în consecinţă obţinem la fel o formulă deductibilă.

Consecința 1.6.6. *Dacă aplicăm la formula $A \rightarrow B$ şi la axioma (IV.3) regula M.P., obţinem* ***Regula Inversării (de Inversie) (R.I.)****, pe care o putem scrie astfel:*

$$R.I.\ \frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \bar{B} \rightarrow \bar{A}}.$$

Regula Inversării spune că ipoteza şi consecinţa din $\vdash A \rightarrow B$ pot fi schimbate cu locul, astfel se obţine o nouă formulă deductibilă (cu condiţia că se adaugă negaţie la fiecare dintre ele).

Demonstrația Teoremelor 1.6.1-1.6.5 este dată în [1].

Teorema 1.6.6. *În calculul propoziţiilor are loc regula excluderii dublei negații, care poate fi formulată astfel:*

a) *Dacă este deductibilă formula $A \rightarrow \bar{\bar{B}}$, atunci este deductibilă şi formula $A \rightarrow B$:*

$$\frac{\vdash A \rightarrow \bar{\bar{B}}}{\vdash A \rightarrow B}.$$

b) *Dacă este deductibilă formula $\bar{\bar{A}} \rightarrow B$, atunci este deductibilă şi formula $A \rightarrow B$:*

$$\frac{\vdash \bar{\bar{A}} \rightarrow B}{\vdash A \rightarrow B}.$$

Pentru a demonstra aceste reguli, se aplică axiomele (IV.1), (IV.2) și regula silogismului. Demonstraţia rămâne un exerciţiu pentru cititor.

Teorema 1.6.7. *În calculul propoziţiilor are loc următoarea regulă:* $\vdash A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$.

Demonstrație. Vom efectua două substituţii în axiomele (I.1) şi (IV.3): $S_B^{\bar{B}}(\mathrm{I.1})$ şi $S_{A,B}^{\bar{B},A}(\mathrm{IV.3})$. În rezultat vom obţine următoarele formule deductibile:

$$\vdash A \rightarrow (\bar{B} \rightarrow A), \vdash (\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow \bar{\bar{B}}).$$

Din ultimele două formule, conform regulii silogismului (R.S.), rezultă:

$$\vdash A \to (\bar{A} \to \bar{\bar{\bar{B}}}).$$

Utilizând regula conjuncţiei ipotezelor (R.C.I), vom obţine:

$$\vdash A \& \bar{A} \to \bar{\bar{\bar{B}}}.$$

Aplicând regula excluderii dublei negaţii, vom avea:

$$\vdash A \& \bar{A} \to B.$$

În final, vom aplica regula descompunerii ipotezelor (R.D.I) şi vom obţine formula din teoremă.

1.7 Formule echivalente. Teorema echivalenței

Expresia de forma $(A \to B)\&(B \to A)$ o vom nota $A \sim B$. Simbolul *echivalenţei* $(\sim)$ nu este simbol al calculului propoziţiilor, dar se utilizează numai pentru prescurtarea formulei date.

Exemplul 1.7.1. *Să demonstrăm că în calculul propoziţiilor are loc relaţia:* $\vdash A \sim \bar{\bar{A}}$.

Într-adevăr, în virtutea axiomelor (IV.1) şi (IV.2), avem relaţiile $\vdash A \to \bar{\bar{A}}$ şi $\vdash \bar{\bar{A}} \to A$. Aplicând la aceste relații R.C.F., obţinem: $\vdash (A \to \bar{\bar{A}})\&(\bar{\bar{A}} \to A)$, adică $\vdash A \sim \bar{\bar{A}}$.

Definiția 1.7.1. *Vom spune că formulele A şi B sunt* ***echivalente*** *în calculul propoziţiilor, dacă în calculul dat poate fi dedusă formula $A \sim B$, adică are loc relaţia* $\vdash A \sim B$.

Remarca 1.7.1. *Orice două formule care pot fi deduse în calculul propoziţiilor sunt echivalente între ele.*

Într-adevăr, fie $\vdash A$ şi $\vdash B$. În acest caz, putem afirma că au loc relaţiile $B \vdash A$ şi $A \vdash B$. Aplicând teorema deducţiei şi considerând $\Gamma = \emptyset$, din ultimele relaţii vom avea $\vdash B \to A$ şi $\vdash A \to B$. Aplicăm la ultimele formule deductibile regula conjuncției formulelor (R.C.F.) şi obţinem: $\vdash (A \to B)\&(B \to A) = A \sim B$

Exemplul 1.7.2. Să demonstrăm că în calculul propoziţiilor poate fi dedusă formula $(A\&B) \sim (B\&A)$. Vom demonstra la început că au loc relaţiile:

a) $\vdash (A\&B) \to (B\&A)$,
b) $\vdash (B\&A) \to (A\&B)$.

Apoi la aceste relații vom aplica R.C.F. şi vom obţine echivalența necesară.

Demonstraţia o vom efectua prin următorii paşi:

1) $S_A^{A\&B}(\mathrm{II}.3) \vdash \big((A\&B) \to B\big) \to \Big[\big((A\&B) \to C\big) \to$
$\to \big((A\&B) \to (B\&C)\big)\Big]$.

2) M.P. (II.2), (1) $\vdash \big((A\&B) \to C\big) \to \big((A\&B) \to (B\&C)\big)$.

3) $S_C^A(2) \vdash \big((A\&B) \to A\big) \to \big((A\&B) \to (B\&A)\big)$

4) M.P. (II.1), (3) $\vdash (A\&B) \to (B\&A)$.

5) $S_{A,B}^{B,A}(4) \vdash (B\&A) \to (A\&B)$.

6) R.C.F. (4), (5) $\vdash \big((A\&B) \to (B\&A)\big)\&\big((B\&A) \to (A\&B)\big) =$
$= (A\&B) \sim (B\&A)$.

La fel, se poate de arătat că în calculul propoziţiilor are loc relaţia $\vdash (A \vee B) \sim (B \vee A)]$ (demonstraţia se propune cititorului).

Teorema 1.7.1. (Teorema echivalenței) *Fie C o subformulă a formulei U, adică $U(C)$ şi fie $B_1 \sim B_2$. Atunci formulele $U(B_1)$ şi $U(B_2)$ ce se obţin din formula U prin înlocuirea (substituirea) apariţiilor subformulei C cu formulele B_1 şi B_2 sunt de asemenea echivalente. Cu alte cuvinte, are lor următoarea relaţie:*

$$\vdash (B_1 \sim B_2) \to \big(U(B_1) \sim U(B_2)\big). \qquad (1.3)$$

Demonstrația Teoremei 1.7.1 poate fi găsită în [1].

1.8 Teoremele principale de deducere a formulelor în calculul propozițiilor

Vom utiliza în continuare simbolul A_a pentru notarea unei formule arbitrare deductibile, adică $\vdash A_a$, iar prin A_f vom nota o formulă pentru care $\vdash \bar{A}_f$. Cu alte cuvinte, dacă vom întâlni simbolul A_a (sau A_f), atunci vom considera că A_a (sau $\bar{A}_f$) este o formulă arbitrară deductibilă în calculul propoziţiilor.

Teorema 1.8.1. $\vdash B \to A_a$.

Demonstrație.

1) $S_A^{A_a}(\text{I}.1) \vdash A_a \to (B \to A_a)$.

2) M.P. $(A_a), (1) \vdash B \to A_a$.

Teorema este demonstrată.

Teorema 1.8.2. $\vdash A_f \to A$.

Demonstrație.

1) $S_B^{A_a}(\text{IV}.3) \vdash (A \to A_a) \to (\bar{A}_a \to \bar{A})$.

2) $S_B^A\ (B \to A_a) \vdash A \to A_a$.

3) M.P. (2), (1) $\vdash A_f \to \bar{A}$. (Amintim că $\bar{A}_a = A_f$).

4) $S_A^{\bar{A}}(3) \vdash A_f \to \bar{\bar{A}}$.

5) R.S. (4), (IV.2) $\vdash A_f \to A$

Teorema este demonstrată.

Teorema 1.8.3. $\vdash A\&\bar{A} \to A_f$.

Demonstrație.

1) $S_B^{A_a}(\text{I}.1) \vdash A \to (A_a \to A)$,

2) $S_{A,B}^{A_a,A}(\text{IV}.3) \vdash (A_a \to A) \to (\bar{A} \to A_f)$, (deoarece $\overline{A_a} = A_f$),

3) R.S. (1), (2) $\vdash A \to (\bar{A} \to A_f)$,

4) R.C.I. (3) $\vdash (A \& \bar{A}) \to A_f$

Teorema este demonstrată.

Teorema 1.8.4. *În calculul propozițiilor sunt deductibile următoarele formule:*

1) $\vdash (A \sim A_a) \sim A$.
2) $\vdash (A \sim A_f) \sim \bar{A}$.
3) $\vdash A \vee \bar{A}$.
4) $\vdash (A \sim A_a) \vee (A \sim A_f)$.

Demonstrația Teoremei 1.8.4 poate fi găsită în [1].
Să analizăm și două exemple.

Exemplul 1.8.1. Să demonstrăm că în calculul propozițiilor are loc relaţia $\vdash \bar{A} \& \bar{B} \to \overline{A \vee B}$.

Vom efectua o substituţie în axioma (III.3):

$$(A \to C) \to \left[(B \to C) \to \left((A \vee B) \to C\right)\right],$$

și, substituind în loc de C formula $\overline{\bar{A} \& \bar{B}}$, vom obţine:

$$\vdash (A \to \overline{\bar{A} \& \bar{B}}) \to \left[(B \to \overline{\bar{A} \& \bar{B}}) \to \left((A \vee B) \to \overline{\bar{A} \& \bar{B}}\right)\right]. \qquad (1.4)$$

Din axiomele (II.1) şi (II.2) avem:

$$\vdash \bar{A} \& \bar{B} \to \bar{A} \text{ şi } \vdash \bar{A} \& \bar{B} \to \bar{B}.$$

Aplicând la ultimele două reguli legea inversiei, vom obţine:

$$\vdash \bar{\bar{A}} \to \overline{\bar{A} \& \bar{B}} \text{şi } \vdash \bar{\bar{B}} \to \overline{\bar{A} \& \bar{B}}.$$

Aplicând la ultimele două relaţii regula excluderii dublei negaţii, vom obţine:

$$\vdash A \to \overline{\bar{A}\&\bar{B}} \text{ şi } \vdash B \to \overline{\bar{A}\&\bar{B}}.$$

În continuare vom aplica repetat de două ori regula M.P. pentru formula (1.4) şi ultimele două formule deduse, astfel vom obţine

$$\vdash (A \vee B) \to \overline{\bar{A}\&\bar{B}}.$$

Aplicând la ultima formulă regula inversiei, apoi regula excluderii dublei negaţii, vom obţine: $\vdash \bar{\bar{A}}\&\bar{\bar{B}} \to \overline{A \vee B}$. □

Exemplul 1.8.2. Să demonstrăm că în calculul propoziţiilor este deductibilă formula $\vdash \overline{A \vee B} \to \bar{A}\&\bar{B}$.

Vom efectua o substituţie dublă în axioma (II.3): în loc de A vom substitui $\bar{A}$ şi în loc de B vom substitui $\bar{B}$. Apoi în formula obţinută vom substitui în loc de C formula $\overline{A \vee B}$. Formula obţinută o notăm prin (*). În continurare se va face o substiţutie în axioma (IV.3), în loc de B formula $A \vee B$, apoi, aplicând regula silogismului, se va deduce prima subformulă obţinută din axioma (II.3): $\vdash \overline{A \vee B} \to \bar{A}$ (**). Similar se va demonstra şi formula: $\vdash \overline{A \vee B} \to \bar{B}$ (***). Apoi se aplică regula M.P. pentru cele trei formule (*), (**) şi (***).

Demonstrația completă rămâne un exerciţiu pentru cititor.

1.9 Relația dintre algebra propozițiilor și calculul propozițiilor

Formulele din calculul propoziţiilor pot fi interpretate ca formule în algebra propoziţiilor. Pentru a face acest lucru, vom trata variabilele calculului propoziţiilor ca variabile ale algebrei propoziţiilor, adică variabile în sens semnificativ, luând două valori: adevărat şi fals (0 sau 1).

Operaţiile $\&, \vee, \to$ şi $\neg$ le vom defini în același mod ca şi în algebra propoziţiilor. În acest caz, orice formulă a calculului propoziţiilor pentru orice variabilă inclusă în aceasta va lua una dintre valorile 1 sau 0, calculate conform regulilor algebrei propoziţiilor.

Vom introduce conceptul semnificaţiei unei formule a calculului propoziţiilor.

Fie A – formula din calculul propoziţiilor; $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt variabile care nu coincid două câte două, printre care se află toate variabilele care sunt incluse în formula A. Vom nota prin $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ cortegiul de valori pentru aceste variabile, care constau din 0 şi 1, de lungime n. Evident că vectorul $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ va avea 2^n valori.

Vom determina valoarea formulei A pentru unul dintre aceste cortegii de valori ale variabilelor, notând această valoare prin $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A)$:

1. Dacă pentru formula A subformula ei de cea mai mare adâncime este X_i, atunci $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(X_i) = \alpha_i$.

2. Dacă sunt determinate valorile pentru toate subformulele de adâncimea $k+1$, atunci subformulele de adâncimea k, care se obţin în rezultatul operațiilor $A_i \& A_j$, $A_i \vee A_j$, $A_i \rightarrow A_j$, $\bar{A}_i$, vor avea valorile:

$$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i \& A_j) = R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i) \& R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i \vee A_j) = R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i) \vee R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i \rightarrow A_j) = R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_i) \rightarrow R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_j),$$

$$R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\bar{A}_k) = \overline{R_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(A_k)}.$$

Spre exemplu, formula $X_1 \vee \bar{X}_4 \rightarrow \overline{X_2 \& \bar{X}_3}$ pentru cortegiul de valori (0,1,1,0) ale variabilelor X_1, X_2, X_3, X_4 va avea valoarea $R_{0110}(X_1 \vee \bar{X}_4 \rightarrow \overline{X_2 \& \bar{X}_3}) = 1$.

Într-adevăr, această formulă are subformula $X_1 \vee \bar{X}_4 \rightarrow \overline{X_2 \& \bar{X}_3}$, care este de adâncimea 1,

$X_1, \bar{X}_4, X_2 \& \bar{X}_3$ – subformulele de adâncimea 2,

$X_4, X_2, \bar{X}_3$ – subformulele de adâncimea 3,

X_3 – subformulă de adâncimea 4.

De aici rezultă:

$R_{0110}(X_3) = 1$, $R_{0110}(\bar{X}_3) = \bar{X}_3 = 0$,

$R_{0110}(X_2) = 1$, $R_{0110}(X_4) = 0$,

$R_{0110}(X_2 \& \bar{X}_3) = R_{0110}(X_2) \& R_{0110}(\bar{X}_3) = 0$,

$R_{0110}(\bar{X}_4) = \overline{R_{0110}(X_4)} = 1$, $R_{0110}(X_1) = 0$,

$R_{0110}(X_1 \vee \bar{X}_4) = R_{0110}(X_1) \vee R_{0110}(\bar{X}_4) = 1$,

$R_{0110}(\overline{X_2 \& \bar{X}_3}) = \overline{R_{0110}(X_2 \& \bar{X}_3)} = 1$,

$R_{0110}\left(X_1 \vee \bar{X}_4 \to \overline{X_2 \& \bar{X}_3}\right) = R_{0110}(X_1 \vee \bar{X}_4) \to$

$\to R_{0110}(\overline{X_2 \& \bar{X}_3}) = 1.$

Vom formula în continuare trei teoreme care stabilesc legătura dintre problemele de bază ale algebrei propoziţiilor şi calculul propoziţiilor.

Teorema 1.9.1. *Fiecare formulă deductibilă în calculul propoziţiilor este o formulă identic adevărată în algebra propoziţiilor.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra această teoremă este necesar a demonstra trei afirmaţii:

1) Fiecare axiomă din calculul propoziţiilor este o formulă identic adevărată în algebra propoziţiilor.

2) *Regula substituţiei*, fiind aplicată pentru formule identic adevărate, conduce la formule la fel identic adevărate.

3) Regula *Modus Ponens* (M.P.), fiind aplicată pentru formule identic adevărate, conduce la fel la formule identic adevărate.

1) Identitatea adevărului axiomelor în calcul propoziţiilor poate fi verificată prin enumerarea tuturor valorilor posibile ale variabilelor incluse în ele, adică folosind tabele de adevăr, care au forma:

a) pentru axiomele care conţin o singură variabilă:

A	$\mathrm{IV}.1$	$\mathrm{IV}.2$
0	1	1
1	1	1

b) pentru axiomele care conţin două variabile:

A	B	$\mathrm{I}.1$	$\mathrm{II}.1$	$\mathrm{II}.2$	$\mathrm{III}.1$	$\mathrm{III}.2$	$\mathrm{IV}.3$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

c) pentru axiomele care conţin trei variabile:

A	B	C	$\mathrm{I}.2$	$\mathrm{II}.3$	$\mathrm{III}.3$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

2) Pentru a demonstra condiția a doua referitoare la regula substituției, vom demonstra mai întâi următoarea afirmație.

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ *o listă de variabile, care conţine toate variabilele incluse în formulele* A *şi* B *şi fie* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ *un set fixat de valori format din* 0 *şi* 1*. În acest context, dacă* $R_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha}(B) = \beta$*, atunci*

$$R_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha}\left(S_X^B(A)\right) = R_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta}(A).$$

Demonstraţia afirmației se face prin inducţie, ţinând cont de construcţia formulei.

a) Fie A este variabila X_i, care este diferită de x. Atunci

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}(X_i) = \alpha_i,\ S_X^B(X_i) = X_i,$$

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(S_X^B(A)\right) = \alpha_i,\ R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A) = \alpha_i,$$

adică afirmaţia lemei este adevărată.

b) Fie A este variabila X. Atunci substituţia $S_X^B(A)$ ne va da formula B şi

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(S_X^B(A)\right) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}(B) = \beta,$$

adică afirmaţia lemei este adevărată.

c) Fie acum formula A are forma $A_1 * A_2$ şi pentru formulele A_1 şi A_2 afirmaţia lemei este adevărată. Atunci putem demonstra că formula A este adevărată prin şirul de echivalenţe:

$$R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(S_X^B(A)\right) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}(S_X^B(A_1 * A_2)) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(S_X^B(A_1) * S_X^B(A_2)\right) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(S_X^B(A_1)\right) * R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha}\left(S_X^B(A_2)\right) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A_1) * R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A_2) =$$

$$= R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A_1 * A_2) = R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\beta}(A).$$

Analogic se face demonstrarea lemei în cazul în care formula A are forma $\bar{A}_1$, c.t.d.

Să demonstrăm acum a doua condiţie a teoremei.

Fie A – formula dată, X este variabilă, iar B orice formulă din calculul propoziţiilor. Dacă A este o formulă identic adevărată, atunci şi $S_X^B(A)$ *este la fel o formulă identic adevărată.*

Demonstraţie. Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ – lista completă de variabile din formulele A şi B. Trebuie de arătat că pe toate cortegiile de valori ale variabilelor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ formula $S_X^B(A)$ va lua valoarea 1. Presupunem că $S_X^B(A)$ nu este o formulă identic adevarată. Atunci există un cortegiu de valori ale variabilelor $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0, \alpha^0)$ astfel încât:

$$R_{\alpha_1^0,\alpha_2^0,\dots,\alpha_n^0,\alpha^0}\big(S_X^B(A)\big) = 0.$$

Dar atunci, conform lemei:

$$R_{\alpha_1^0,\alpha_2^0,\dots,\alpha_n^0,\beta}(A) = 0,$$

iar aceasta contrazice faptul că A este o formulă identic adevărată, c.t.d.

Să demonstrăm a treia condiție a teoremei.

Dacă formulele C şi $C \to A$ sunt identic adevărate, atunci şi formula A este identic adevărată.

Demonstraţia se face prin presupunerea contrariului. Fie că $X_1, X_2, \dots, X_n$ este lista tuturor variabilelor care intră în formulele C şi A. Vom presupune că A nu este o formulă identic adevărată. Atunci există un cortegiu de valori ale variabilelor $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0)$ astfel încât $R_{\alpha_1^0,\alpha_2^0,\dots,\alpha_n^0}(A) = 0$. Dar în acelaşi timp $R_{\alpha_1^0,\alpha_2^0,\dots,\alpha_n^0}(C \to A) = R_{\alpha_1^0,\alpha_2^0,\dots,\alpha_n^0}(C) \to R_{\alpha_1^0,\alpha_2^0,\dots,\alpha_n^0}(A) = 1 \to 0 = 0$, ceea ce contrazice faptul că formula $(C \to A)$ este identic adevărată, c.t.d.

Teorema este demonstrată. □

Teorema 1.9.2. (*despre deductibilitate*) *Fie A o formulă oarecare în calculul propoziţiilor; $X_1, X_2, \dots, X_n$ – setul tuturor variabilelor de care depinde formula A; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ reprezintă un set arbitrar de valori ale acestor variabile. Vom nota prin Γ o mulţime finită de formule $\Gamma = \{X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \dots, X_n^{\alpha_n}\}$, unde*

$$X_i^{\alpha_i} = \begin{cases} X_i, & \alpha_i = 1, \\ \bar{X}_i, & \alpha_i = 0. \end{cases}$$

1. Dacă $R_{\alpha_1\alpha_2^0\dots\alpha_n^0}(A) = 1$, atunci $\Gamma \vdash A$;

2. Dacă $R_{\alpha_1\alpha_2^0\dots\alpha_n^0}(A) = 0$, atunci $\Gamma \vdash \bar{A}$.

*Demonstraţie***.** Demonstraţia acestei teoreme se face prin inducţia după construcţia formulei.

1. Fie formula A este o variabilă: X_i.

a) Dacă $R_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(X_i) = \alpha_i = 1$, atunci evident $X_i \vdash X_i$, sau aceeaşi expresie: $X_i^{\alpha_i} \vdash X_i$, adică $X_i^{\alpha_i} \vdash A$, prin urmare şi $\Gamma \vdash A$.

b) Dacă $R_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(X_i) = \alpha_i = 0$, atunci evident $\bar{X}_i \vdash \bar{X}_i$, sau aceeaşi expresie: $X_i^{\alpha_i} \vdash \bar{X}_i$, adică $X_i^{\alpha_i} \vdash \bar{A}$, prin urmare și $\Gamma \vdash \bar{A}$.

2. Considerăm acum că formula A are una dintre următoarele forme: I. $B_1\&B_2$, II. $B_1 \vee B_2$, III. $B_1 \to B_2$, IV. $\bar{B}_1$, şi pentru formulele B_1 şi B_2 teorema este adevărată. În continuare trebuie de analizat fiecare dintre aceste patru cazuri.

Fie ca formula A are forma $B_1\&B_2$.

a) Dacă $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(B_1\&B_2) = 1$, atunci $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(B_1) = 1$ şi $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(B_2) = 1$ şi atunci, prin presupunere, $\Gamma \vdash B_1$ şi $\Gamma \vdash B_2$. De aici, prin regula introducerii conjuncţiei, rezultă $\Gamma \vdash B_1\&B_2$ şi $\Gamma \vdash A$.

b) Dacă $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(B_1\&B_2) = 0$, atunci sau $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(B_1) = 0$, sau $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(B_2) = 0$. Fie, spre exemplu, $R_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}(B_1) = 0$. Atunci, prin presupunere, $\Gamma \vdash \bar{B}_1$ (*). Aplicând axioma (II.1), $\vdash B_1\&B_2 \to B_1$. De aici, prin regula inversiei, avem $\vdash \bar{B}_1 \to \overline{B_1\&B_2}$. (**)

Din formulele (*) şi (**), prin regula Modus Ponenes, vom obţine: $\Gamma \vdash \overline{B_1\&B_2}$, adică $\Gamma \vdash A$.

Pentru celelalte trei cazuri: $B_1 \vee B_2$, $B_1 \to B_2$, $\bar{B}_1$ teorema se demonstrează similar, analizând cazurile posibile şi aplicând reguli de deducţie cunoscute. Demonstraţia pentru aceste cazuri rămâne un exerciţiu pentru cititor. □

Teorema 1.9.3. *Fiecare formulă identic adevărată în algebra propoziţiilor este deductibilă în calculul propoziţiilor.*

Demonstraţie. Fie A o formulă identic adevărată în algebra propoziţiilor; $X_1, X_2, \dots, X_n$ este lista tuturor variabilelor care sunt incluse în formula A.

Vom lua orice cortegiu de valori ale acestor variabile $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Întrucât formula A este identic adevarată, atunci $R_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(A) = 1$. De aici, conform Teoremei 1.9.3, rezultă că $\Gamma_n \vdash A$ (*), unde $\Gamma_n = \{X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_n^{\alpha_n}\}$. Deoarece în total există 2^n cortegii de forma $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, atunci relaţia (*) are loc în 2^n cazuri. Dacă $\Gamma_{n-1} = \{X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\}$, atunci evident că $\Gamma_{n-1}, X_n \vdash A$ şi $\Gamma_{n-1}, \bar{X}_n \vdash A$. Prin regula introducerii disjuncției, vom avea

$$\Gamma_{n-1}, X_n \vee \bar{X}_n \vdash A.$$

Dat fiind faptul că formula $X_n \vee \bar{X}_n$ este deductibilă, ea poate fi omisă din setul de formule $\Gamma_{n-1}, X_n \vee \bar{X}_n$. Prin urmare, $\Gamma_{n-1} \vdash A$.

Analogic, notând prin $\Gamma_{n-2} = \{X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\}$, ..., $\Gamma_2 = \{X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}\}$, $\Gamma_1 = \{X_1^{\alpha_1}\}$, poate fi demonstrat consecutiv că: $\Gamma_{n-2} \vdash A$, ..., $\Gamma_2 \vdash A$, $\Gamma_1 \vdash A$, $\vdash A$. □

1.10 Problemele axiomatizării calculului propozițiilor

Orice teorie axiomatică pentru a fi fundamentată trebuie să analizeze patru probleme:

1) Problema de rezolvabilitate (decizibilităţii),

2) Problema necontradicţiei,

3) Problema completitudinii,

4) Problema independenţei.

Urmează să analizăm fiecare dintre cele patru probleme ale axiomatizării calculului propozițiilor, prin definirea acestor probleme şi prezentarea principalelor rezultate pentru fiecare dintre ele.

1.10.1 Problema de rezolvabilitate

Problema de rezolvabilitate a calculului propoziţiilor constă în demonstrarea existenţei algoritmului, care ne va permite pentru orice formulă dată în calculul propoziţiilor să determinăm dacă aceasta este sau nu deductibilă.

Teorema 1.10.1.1. *Problema de rezolvabilitate a calculului propoziţiilor este rezolvabilă.*

Demonstraţie. Orice formulă în calculul propoziţiilor poate fi analizată ca o formulă în algebra propoziţiilor şi, prin urmare, poate fi analizată şi valoarea ei logică pentru diferite cortegii de valori ale variabilelor de care depinde formula.

Fie A orice formulă în calculul propoziţiilor şi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabilele de care depinde formula A. Vom determina valoarea formulei A: $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(A)$, pentru toate cortegiile valorilor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pentru variabilele de care depinde formula A. Dacă în acest caz $R_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(A) = 1$ pentru toate cortegiile valorilor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, atunci formula A este identic adevărată şi, prin teorema de deducţie a unei formule identic adevărate, formula A este deductibilă.

Dacă însă pentru un cortegiu de valori $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0$, valoarea formulei este $R_{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0}(A) = 0$, atunci formula A nu este identic adevărată şi, prin urmare, ea nu este deductibilă. □

1.10.2 Problema necontradicției

Una dintre problemele principale la analiza oricărui calcul este problema necontradicţiei. Vom da în continuare definiția calculului necontradictoriu, care se referă nu doar la calculul propoziţiilor, dar şi la alte calcule cercetate în logica matematică.

Definiția 1.10.2.1. *Calculul logic se numește* ***necontradictoriu****, dacă în el nu pot fi deduse aşa două formule, astfel încât una dintre ele să fie negația celeilalte formule.*

Esența problemei necontradicţiei constă în faptul dacă calculul cercetat este necontradictoriu sau nu.

Definiția 1.10.2.2. *Calculul logic în care poate fi dedusă atât formula A, cât şi negaţia ei $\bar{A}$ se numeşte* ***contradictoriu***.

Astfel de calcule nu prezintă niciun interes, deoarece în aceste calcule sunt deductibile absolut toate formulele şi de aceea în ele nu poate fi deosebit adevărul de fals.

Dacă, de exemplu, în calculul propozițiilor ar putea fi deduse formulele U şi $\overline{U}$, atunci, în virtutea teoremelor demonstrate anterior, am avea:

$$\vdash (U\&\overline{U}) \rightarrow A_f, \vdash A_f \rightarrow A.$$

Aplicăm R.S. la formulele de mai sus şi obţinem:

$$\vdash (U\&\overline{U}) \rightarrow A.$$

Dar deoarece atât U, cât şi $\overline{U}$ sunt deductibile, aplicăm R.C.F. şi obținem $\vdash U\&\overline{U}$. Aplicăm în continuare M.P. şi obținem $\vdash A$. Însă, A fiind o formulă elementară, poate fi substituită cu orice formulă, obţinând că în calculul propoziţiilor poate fi dedusă orice formulă (inclusiv una falsă).

Teorema 1.10.2.1. (*despre necontradicție*) *Calculul propoziţiilor este necontradictoriu.*

Demonstrație. După cum s-a menţionat mai sus, orice formulă din calculul propoziţiilor poate fi interpretată ca formulă în algebra propoziţiilor. Vom arăta că toate formulele deductibile în calculul propoziţiilor cercetate ca formule în algebra propoziţiilor sunt identic adevărate, adică primesc valoarea adevăr pentru orice valori posibile ale variabilelor din formula dată. Prin tabelul de valori ale formulei date, uşor se poate de arătat că axiomele calculului propoziţiilor sunt formule identic adevărate. La fel, este clar că dacă $F(A)$ este identic adevărată, atunci şi formula $F(B)$, care se obţine ca rezultat al regulii substituţiei, este la fel identic adevărată. Observăm că regula M.P., la fel, nu ne scoate în afara formulelor identic adevărate. Într-adevăr, fie formulele A şi $A \to B$ sunt identic adevărate, iar formula B nu este identic adevărată. În acest caz, obţinem că şi formula $A \to B$ nu este identic adevărată, ceea ce nu poate fi prin ipoteză. Deci, aplicând regula M.P. la formule identic adevărate obţinem o formulă identic adevărată. Aşadar, am demonstrat că toate formulele care pot fi deduse în calculul propoziţiilor sunt identic adevărate în algebra propoziţiilor. Prin urmare, dacă $\vdash A$, atunci A este identic adevărată, iar $\bar{A}$ este identic falsă şi deci nu poate fi dedusă în calculul propoziţiilor. □

1.10.3 Problema completitudinii

După cum s-a menţionat anterior, formulele calculului propoziţiilor pot fi interpretate şi ca formule în algebra propoziţiilor. Demonstrând mai sus necontradicţia calculului propoziţiilor, am arătat că orice formulă deductibilă în calculul propoziţiilor este identic adevărată fiind interpretată ca formulă în algebra propoziţiilor. Apare întrebarea inversă: va fi oare orice formulă identic adevărată în algebra propoziţiilor şi deductibilă în calculul propoziţiilor? Această întrebare reprezintă în esenţă *problema completitudinii calculului propoziţiilor*.

Esenţa acestei probleme constă în faptul că la construcţia calculului logic, destinat să exprime logica constructivă, este important a cunoaşte dacă sunt suficiente axiomele şi regulile de deducţie ale calculului dat pentru a deduce orice formulă, care din punctul de vedere al conţinutului este identic adevărată.

Problema completitudinii calculului propoziţiilor se rezolvă în mod pozitiv. Vom prezenta iniţial lemele care se utilizează la demonstrația teoremei despre completitudinea calculului propoziţiilor.

Teorema 1.10.3.1. (*despre completitudine*) *Orice formulă identic adevărată în algebra propoziţiilor este o formulă deductibilă în calculul respectiv.*

Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în [1].

Remarca 1.10.3.1. *Am arătat mai sus că noţiunea de formulă deductibilă în calculul propoziţiilor coincide cu noţiunea de formulă identic adevărată din algebra propoziţiilor. Una dintre consecinţele teoremei despre completitudine este posibilitatea de a transfera în calculul propoziţiilor toate regulile de manipulare cu formulele din algebra propoziţiilor.*

Ca exemplu, din cele spuse rezultă că în calculul propoziţiilor sunt adevărate următoarele afirmaţii:

$\vdash (U\&V) \sim (V\&U)$,

$\vdash (U \vee V) \sim (V \vee U)$,

$\vdash \big(U\&(V\&C)\big) \sim \big((U\&V)\&C\big)$,

$\vdash \big(U \vee (V \vee C)\big) \sim \big((U \vee V) \vee C\big)$,

$\vdash \big(U\&(V \vee C)\big) \sim \big((U\&V) \vee (U\&C)\big)$,

$\vdash \big(U \vee (V\&C)\big) \sim \big((U \vee V)\&(U \vee C)\big)$,

$\vdash (U \rightarrow V) \sim (\overline{U} \vee V)$,

$\vdash \overline{U\&V} \sim (\overline{U} \vee \overline{V})$,

$\vdash \overline{U \vee V} \sim (\overline{U}\&\overline{V})$.

Remarca 1.10.3.2. *Uneori se cercetează şi noţiunea de completitudine într-un sens mai îngust. Vom spune că calculul logic este* ***complet în sens îngust****, dacă după alăturare la axiomele acestui calcul a unei formule nedeductibile în acest calcul obţinem contradicţie, adică calculul nou-format în urma acestei alăturări devine contradictoriu.*

Cu ajutorul formelor normale conjunctive poate fi demonstrat că calculul propoziţiilor este necontradictoriu în sens îngust.

1.10.4 Problema independenței

O altă întrebare importantă cu referire la calculul propozițiilor este întrebarea despre independenţa axiomelor. Această întrebare constă în următoarele. Poate oare o anumită axiomă să fie dedusă din celelalte în baza regulilor de deducţie ale sistemului dat?

Dacă se adevereşte că o astfel de axiomă poate fi dedusă din celelalte, atunci ea poate fi ignorată şi deci poate fi ştearsă din lista de axiome, astfel încât calculul dat rămâne neschimbat, adică rezerva de formule deductibile rămâne la fel neschimbată.

Definiția 1.10.4.1. *Axioma care nu poate fi dedusă din celelalte axiome se numeşte **independentă** de celelalte, iar sistemul de axiome, în care nicio axiomă nu poate fi dedusă din celelalte, se numeşte **sistem independent**. În caz contrar, sistemul de axiome se numeşte **sistem dependent**.*

Evident că sistemul dependent nu este atât de săvârșit în comparație cu cel independent, deoarece el conţine axiome de prisos. S-ar părea, la prima vedere, că întrebarea despre independenţa sistemului de axiome nu este esenţială şi are importanţă numai din punctul de vedere al comodităţii tehnice. Însă aceasta nu este aşa întotdeauna. Problema independenţei unei axiome dintr-un sistem dat faţă de alte axiome deseori este echivalentă cu problema posibilităţii de a schimba, fără contradicţii în sistemul cercetat, axioma dată cu negaţia ei.

În calitate de exemplu ne poate servi problema independenţei celui de-al cincilea postulat al lui Euclid în sistemul axiomatic al geometriei. Această problemă, după cum se cunoaşte, a avut o mare importanţă în dezvoltarea matematicii.

Are loc următoarea teoremă:

Teorema 1.10.4.1. *Sistemul format din cele patru grupe de axiome ale calculului propoziţiilor este independent.*

Demonstrația acestei teoreme este dată în [1].

1.11 Exerciţii propuse pentru lucrul individual

Ex. 1. Aplicând regula substituţiei, să se demonstreze că sunt deductibile următoarele formule:

1) $(A \to B)\&B \to B$;
2) $A\&B \to A\&B \vee C$;
3) $(\bar{A} \to B) \to ((C \to B) \to (\bar{A} \vee C \to B))$;
4) $\overline{\overline{C \vee D}} \to C \vee D$;
5) $(A\&B \to (C \to B\&C)) \to ((A\&B \to C) \to (A\&B \to B\&C))$.

Ex. 2. Aplicând regula substituţiei şi regula M.P., să se demonstreze că sunt deductibile următoarele formule:

1) $A \vee A \to A$; 4) $A \vee B \to B \vee A$;
2) $A \vee A\&A$; 5) $(A \to B) \to (A \to A)$;
3) $A\&B \to B\&A$.

Ex. 3. Aplicând regulele derivate de deducţie, să se demonstreze că sunt deductibile următoarele formule:

1) $(\bar{A} \vee \bar{B}) \to \overline{A\&B}$; 6) $(A \to B) \to (A \to A)$;
2) $A \to R$, (R- adevărată); 7) $A\&\bar{A} \to F$ (F- falsă);
3) $(A \to B) \to (A \to A \vee B)$; 8) $(A \to B)\&\bar{B} \to \bar{A}$;
4) $F \to A$ (F- falsă);
5) $\bar{A}\&\bar{B} \to \overline{A \vee B}$.

Ex. 4. Să se demonstreze:

1) $\Gamma = \{A\} \vdash B \to A$;
2) $\Gamma = \{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$;
3) $\Gamma = \{A \to C\} \vdash \bar{C} \to \bar{A}$;
4) $\Gamma = \{A \to B, \bar{B}\} \vdash \bar{A}$;
5) $\Gamma = \{A, \bar{\bar{A}} \to B\} \vdash B$;
6) $\Gamma = \{A \to B\} \vdash A\&C \to B\&C$;
7) $\Gamma = \{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;
8) $\Gamma = \{A \to (B \to C)\} \vdash B \to (A \to C)$;

Ex. 5. Să se demonstreze deductibilitatea formulelor, utilizând teorema generalizată a deducţiei:

1) $(X \to Y) \to \big((Y \to Z) \to (X \to Z)\big)$;
2) $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$;
3) $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B)$.

Ex. 6. Utilizând regula transpoziţiei ipotezelor (R.T.I.), conjuncţiei ipotezelor (R.C.I.) şi despărţirii ipotezelor (R.D.I.), să se demonstreze că:

1) $\vdash A \to (B \to A\&B)$;
2) $\vdash (A \to B)\&\bar{B} \to \bar{A}$;
3) $\vdash \bar{A} \to (A \to B)$.

Ex. 7. Să se deducă din axiome următoarele formule în calculul propoziţiilor:

1) $\vdash \bar{A} \to ((A \to B) \to A)$; 7) $(\bar{A} \to (A \to \bar{B}))$;
2) $A \to (B \to (A\&B))$; 8) $\overline{A \vee B} \to \bar{A}\&\bar{B}$;
3) $(A \to \bar{A}) \to \bar{A}$; 9) $\overline{A\&B} \to \bar{A} \vee \bar{B}$;
4) $\overline{(A \to B) \to A} \to \bar{A}$; 10) $(A \to (\bar{A} \to B)$;
5) $B \to (\bar{B} \to \overline{A \to B})$; 11) $\bar{A}\&\bar{B} \to \overline{A \vee B}$;
6) $\bar{A} \vee \bar{B} \to \overline{A\&B}$. 12) $(A \vee B) \to ((B \to A) \to A)$.

Ex. 8. Să se demonstreze din axiome următoarele echivalenţe în calculul propoziţiilor:

1) $(A \to \bar{A}) \sim \bar{A}$; 4) $\big(A\&(B \vee \bar{B})\big) \sim A$;
2) $\big(A \vee (A\&B)\big) \sim A$; 5) $\big(A\&(A \vee B)\big) \sim A$;
3) $\big(A \vee (B\&\bar{B})\big) \sim A$; 6) $\overline{(A \vee B) \to A} \sim \overline{B \to A}$.

Ex. 9. Să se demonstreze următoarele formule din axiomele calculului propoziţiilor şi din lista de formule Γ dată:

1) $\{\bar{A}\} \vdash (A \to \bar{\bar{B}})$;
2) $\{A\} \vdash \overline{A \to \bar{A}}$;
3) $\{A \sim B, B \sim C\} \vdash \bar{A} \sim \bar{C}$;

4) $\{A, B, A \to B\} \vdash \bar{B} \to \overline{A \to B}$;
5) $\{A \to B, \bar{B}\} \vdash \bar{A}$;
6) $\{A, \bar{B}\} \vdash \overline{A \to B}$;
7) $\{A \to B\} \vdash (A\&C) \to (B\&C)$;
8) $\{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;
9) $\{A \to B\} \vdash (A \vee C) \to (B \vee C)$;
10) $\{A\} \vdash (\bar{A} \to B)$;
11) $\{\bar{A}\} \vdash (A \to B)$;
12) $\{A \to \bar{B}\} \vdash (B \to \bar{A})$;
13) $\{\bar{A} \to B\} \vdash (\bar{B} \to A)$;
14) $\{\bar{A} \to \bar{B}\} \vdash (B \to A)$;
15) $\{A \sim B\} \vdash (C \to A) \sim (C \to B)$;
16) $\{A \sim B\} \vdash (A \vee C) \sim (B \vee C)$;
17) $\{A \sim B\} \vdash (A \to C) \sim (B \to C)$.

Ex. 10. Să se demonstreze că sunt deductibile următoarele formule în calculul propoziţiilor:

1) $(A\&B) \sim (B\&A)$;
2) $(A \vee B) \sim (B \vee A)$;
3) $[A\&(B\&C)] \sim [(A\&B)\&C]$;
4) $[A \vee (B \vee C)] \sim [(A \vee B) \vee C]$;
5) $[A\&(B \vee C)] \sim [(A\&B) \vee (A\&C)]$;
6) $[A \vee (B\&C)] \sim [(A \vee B)\&(A \vee C)]$;
7) $(A \to B) \sim (\bar{A} \vee B)$;
8) $\overline{A\&B} \sim (\bar{A} \vee \bar{B})$;
9) $\overline{A \vee B} \sim (\bar{A}\&\bar{B})$.

Capitolul 2
Algebra predicatelor

2.1 Introducere. Algebra predicatelor

Logica predicatelor este o extindere și o dezvoltare a logicii propozițiilor. Ea conține toată (întreagă) algebra propozițiilor, adică formulele elementare cercetate ca funcții (mărimi) ce pot primi numai 2 valori: adevărat (1) și fals (0), precum și toate operațiile algebrei propozițiilor și, prin urmare, toate formulele algebrei propozițiilor. În plus, însă, logica predicatelor se mai extinde cu astfel de afirmații (propoziții) care se referă la obiecte concrete. Astfel, în logica predicatelor există despărțirea afirmațiilor în subiecte (propoziții simple) și predicate, care sunt atribuite obiectelor concrete.

Considerăm $\mathcal{M}$ – o mulțime arbitrară de obiecte, iar $a, b,$ c$, d$ sunt elementele mulțimii $\mathcal{M}$. Atunci afirmațiile referitoare la aceste obiecte le vom nota respectiv în următoarea formă: $P(a)$, $F(b), R(c, d), \ldots$

Vom aduce în continuare câteva exemple concrete: "x este om", "x este tatăl lui y", "$x^2 + y^2 = z^2$" etc.

Când înlocuim variabilele din aceste propoziții cu obiecte (indivizi) concrete, bine precizate, propozițiile respective se transformă în propoziții bine determinate, de felul celor de care ne-am ocupat în calculul propozițiilor, și care pot fi adevărate sau false.

Exemplul 2.1.1. Fie $\mathcal{M}$ – mulțimea numerelor naturale, iar $a = 7$, $b = 9$, $c = 12$ și $d = 2$. În acest caz predicatele pot fi reprezentate sub următoarea formă:

$$P(a) \leftrightharpoons \text{" } a \text{ este număr prim"},$$

$$Q(b) \leftrightharpoons \text{" } b \text{ este număr impar"},$$

$$R(c, d) \leftrightharpoons \text{" } c \text{ este mai mic decât } d \text{ "},$$

unde semnul $\leftrightharpoons$ denotă faptul că expresia semnifică următorul predicat.

Astfel de afirmații pot fi atât adevărate, cât și false. Exact la fel ca în algebra propozițiilor, vom cerceta astfel de propoziții numai din punctul de vedere al faptului că ele sunt adevărate sau false și nu contează conținutul lor. Spre deosebire de algebra propozițiilor, în acest caz vom considera că valorilor de adevăr (1) și fals (0) le corespund anumite obiecte sau grupuri de obiecte din mulțimea $\mathcal{M}$.

Astfel, în Exemplul 2.1.1 de mai sus $P(7)$ reprezintă adevăr, ceea ce corespunde numărului natural 7, iar $P(b) = 1$ (adevăr), ce corespunde numărului 9; $R(c, d) = 0$ (fals), ce corespunde perechii de numere 12, 2.

Dacă $x \in \mathcal{M}$, atunci expresia $F(x)$ este o afirmație care devine concretă în cazul în care x ia o valoare concretă din mulțimea $\mathcal{M}$. În acest caz $F(a)$, $F(b)$, ... sunt afirmații concrete care pot fi atât adevărate, cât și false, în dependență de valorile concrete ale elementelor $a, b, \dots \in \mathcal{M}$.

Deoarece din punctul nostru de vedere orice afirmație de acest gen ia valoarea de adevăr sau fals, atunci expresia $F(x)$ poate fi considerată ca o funcție definită pe domeniul $\mathcal{M}$ cu valori în mulțimea $\{0,1\}$ sau $\{f, a\}$, adică

$$F(x): \mathcal{M} \longrightarrow \{0,1\}.$$

În mod analog, expresiile $H(x, y)$, $Q(x, y, z)$, … reprezintă funcții de două, trei, ... variabile. La astfel de funcții variabilele sunt

$x, y, z \in \mathcal{M}$, iar valoarea funcției poate să obțină numai 2 valori posibile {0,1}.

Astfel de funcții le von numi în continuare *funcții logice* sau *predicate* (de una sau mai multe variabile). Putem avea predicate unare, binare, ternare etc., după cum depind, respectiv, de 1, 2, 3, ... variabile.

Domeniul de variație a variabilelor din predicate se numește *universul* sau *domeniul discursului*. El poate fi o mulțime sau poate fi o totalitate care nu este mulțime (de exemplu, clasa tuturor mulțimilor).

În cazul în care studiem *calculul predicatelor* la modul general, universul discursului nu este precizat și de aceea rezultatele calculului predicatelor sunt aplicabile la orice domeniu al matematicii. Singurul lucru pe care îl presupunem este că universul discursului conține *elemente*.

Cu ajutorul predicatelor putem exprima diferite relații dintre obiectele domeniului dat $\mathcal{M}$.

Exemplul 2.1.2. Fie $\mathcal{M}$ – mulțimea numerelor reale, iar $x, y, z \in \mathcal{M}$. Atunci cu ajutorul predicatelor se poate exprima, de exemplu, relația de comparație dintre unele elemente ale mulțimii $\mathcal{M}$, și anume: fie $A(x, y)$ este predicatul "$x \geq y$", care pentru orice pereche de numere reale primește valoarea de adevăr (1) sau fals (0). În calitate de predicat ternar poate fi luat următorul predicat care reprezintă următoarea relație dintre numerele reale x, y și z: $x + y + z = 0$.

Exemplul 2.1.3. Fie $\mathcal{M}$ – mulțimea membrilor unei familii. În acest caz relațiile de rudenie dintre membrii familiei respective le putem exprima prin următoarele predicate:

$$H(x, y) \leftrightharpoons \text{"}x \text{ este mamă pentru } y\text{ ",}$$

$$T(x, y) \leftrightharpoons \text{"}x \text{ este tată pentru } y\text{ ",}$$

$$F(x, y, z) \leftrightharpoons \text{" } x \text{ este frate pentru } y \text{ și } z\text{".}$$

2.2 Noțiuni de formulă. Operații și cuantificatori

Alfabetul în baza căruia se construiesc formulele calculului predicatelor constă din următoarele grupuri de simboluri:

1) Simboluri propoziționale: A, B, C, ... , A_5, B_7, …, cu ajutorul cărora, ca și în algebra propozițiilor, sunt notate propozițiile ce pot lua două valori: adevăr (1) și fals (0). În continuare le vom numi *propoziții variabile*.

2) Simboluri de predicate: $F(x)$, $G(x, y)$, $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$, … . Acestea sunt funcții argumentele cărora primesc valori din domeniul $\mathcal{M}$, iar funcțiile pot să primească numai 2 valori: $\{0,1\}$ sau $\{f, a\}$.

3) Simbolurile conectorilor logici: ∧ (&), ∨, ⟶, ¬, ...

4) Simboluri auxiliare: (,), [,] – paranteze și virgule.

Definiția 2.2.1. *Literele latine majuscule, care denotă simbolurile propoziționale, precum și simbolurile de predicate, le vom numi* ***formule elementare****.*

Simbolurile de obiecte $a, b, c, \dots \in \mathcal{M}$ nu sunt formule.

Formulele elementare întotdeauna sunt astfel de funcții ce primesc numai 2 valori: $\{0,1\}$ sau $\{f, a\}$. De aceea, formulele elementare pot fi legate cu ajutorul operațiilor (legăturilor) logice:

∧ (&), ∨, ⟶, ¬

Expresiile primite în rezultatul acestor legături reprezintă propoziții sau predicate. De exemplu:

1. $A \vee F(x)$,
2. $B(x, y) \longrightarrow A \& \overline{B(x, y)}$,
3. $L_1(x) \longrightarrow L_2(y)$.

În afară de operațiile din algebra propozițiilor se mai folosesc încă 2 operații legate de cuantificatorul de generalizare ∀ si de existență ∃.

Fie $F(x)$ un predicat concret definit pe domeniul $\mathcal{M}$, care primește valoarea 1 sau 0 pentru orice element $x \in \mathcal{M}$. Atunci expresia $\forall x R(x)$ este o afirmație adevărată atunci, când predicatul $R(x)$ este adevărat pentru toate elementele $x \in \mathcal{M}$ și este fals în caz contrar. Expresia $\exists x R(x)$ este o afirmație, care este adevărată numai în cazul în care există cel puțin un element $a \in \mathcal{M}$, pentru care $f(a)$ este adevărată și este falsă în cazul contrar. Ambele expresii, $\forall x R(x)$ și $\exists x R(x)$, deja nu mai depind de variabila x.

Operațiile de legătura cu cuantificatori se definesc în mod similar și pentru predicatele cu mai multe variabile. Formulele le vom defini în mod analog precum în calculul propozițiilor prin inducție. Astfel, pentru început vom defini noțiunea de *termen* sau *term*.

Definiție 2.2.2. *Orice simbol de constantă sau de variabilă se numește* ***term****. Dacă f este un simbol funcțional de aritatea n (adică, de la n argumente), iar t_1, t_2, ..., t_n sunt termi, atunci $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ este la fel term. Dacă P este un simbol de predicat de aritatea k, iar t_1, t_2, ..., t_k sunt termi arbitrari, atunci expresia $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$ o vom numi* ***formulă atomară*** *sau* ***elementară****.*

În expresiile $\forall x A(x)$ și $\exists x A(x)$, unde $A(x)$ este un predicat arbitrar, acest predicat $A(x)$ se numeşte *domeniu de incidență* (*de acțiune*) a cuantificatorilor $\forall x$ și $\exists x$, respectiv. Variabila x în formula dată se numește *legată* (*de legătură*), dacă x este variabila cuantificatorului $\forall x$ sau $\exists x$ din această formulă sau dacă x se află în domeniul de incidență a acelorași cuantificatori din formulă. În caz contrar variabila x se numește *liberă*.

De exemplu, în expresia $\forall x \exists y Q(x, y, z)$ variabilele x și y sunt legate, iar variabila z este liberă.

Termul t se numește liber pentru variabila x_i din formula F, dacă nicio apariție liberă a lui x_i în formula F nu se află în domeniul de incidență a niciunuia dintre cuantificatori $\forall x$ sau $\exists x$, unde x_i este variabilă ce se conține în termul t.

În continuare vom spune că cuantificatorii $\forall x$ și $\exists x$ sunt *duali* unul altuia, adică $\forall x$ este dualul lui $\exists x$ și viceversa.

2.3 Formule echivalente. Formule reduse

Fie formulele U și V definite pe același domeniu $\mathcal{M}$.

Definiția 2.3.1. *Formulele U și V sunt* ***echivalente pe domeniul*** *dat $\mathcal{M}$, dacă la orice înlocuire a predicatelor variabile, a propozițiilor variabile, precum și a obiectelor variabile cu predicate concrete definite pe domeniul $\mathcal{M}$, cu propoziții concrete și cu obiecte concrete din $\mathcal{M}$, formulele U și V primesc aceleași valori de adevăr și fals (0 si 1).*

Dacă formulele date sunt echivalente pe toate domeniile, atunci vom spune simplu că ele sunt echivalente și vom scrie $U \equiv V$.

Exact ca în algebra propozițiilor putem înlocui formulele prin echivalentele lor. Aceasta ne permite să aducem formula inițială la o expresie mai simplă. Evident că toate echivalențele din algebra propozițiilor pot fi transferate și în logica predicatelor. În particular vom avea că formulele $U \rightarrow V$ și $\overline{U} \vee V$ sunt echivalente. Folosind ultima echivalență, putem înlocui operația de implicație $U \rightarrow V$ prin disjuncție și negație $\overline{U} \vee V$. Astfel, obținem că pentru orice formulă există echivalenta sa în care participa doar 3 operații logice: &, $\vee$ și $\neg$.

Exemplul 2.3.1. Avem următoarele echivalențe:

$$1.\ \exists x(A(x) \rightarrow \forall y B(y)) \equiv \exists x(\overline{A(x)} \vee \forall y B(y)).$$

$$2.\ \forall x A(x) \rightarrow (B(x) \rightarrow \forall x C(x)) \equiv \overline{\forall x A(x)} \vee \left(\overline{B(x)} \vee \forall x C(x)\right).$$

$$3.\ \left(\exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y)\right) \rightarrow C(x) \equiv \overline{\left(\exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y)\right)} \vee C(x) \equiv$$

$$\equiv \overline{\left(\overline{\exists x A(x)} \vee \forall y B(y)\right)} \vee C(x) \equiv \left(\exists x A(x) \& \overline{\forall y B(y)}\right) \vee C(x) \equiv$$

$$\equiv \left(\exists x A(x) \& \exists y \overline{B(y)}\right) \vee C(x).$$

Pe lângă echivalențele din algebra propozițiilor, care rămân valide în logica predicatelor, în logica predicatelor mai apar noi echivalențe legate de cuantificatori. Vom considera în continuare operația de negație asupra cuantificatorilor.

Vom cerceta expresia $\overline{\forall x U(x)}$. Afirmația "$\forall x U(x)$ – falsă" este echivalentă cu afirmația "$\exists y$ pentru care $U(y)$ este adevărată", ceea ce este echivalent cu "$\exists y$ pentru care $\overline{U(y)}$ este falsă". Prin urmare, vom avea:

$$\overline{\forall x U(x)} = \exists y \overline{U(y)}.$$

În mod analog vom cerceta expresia $\overline{\exists x U(x)}$. Afirmația "$\exists x U(x)$ este falsă" este echivalentă cu afirmația "$\forall y U(y)$ este adevărată" sau cu afirmația "$\forall y \overline{U(y)}$ este falsă". Astfel, obținem:

$$\overline{\exists x U(x)} = \forall y \overline{U(y)}.$$

Din cele expuse mai sus rezultă următoarea *regulă*: *semnul negației îl putem introduce sub semnul cuantificatorului, schimbând cuantificatorul prin dualul său*.

Aplicând în continuare regula obținută mai sus și alte transformări din algebra propozițiilor, putem găsi pentru orice formulă echivalenta sa, în care semnul negației se atribuie numai la propoziții și predicate elementare. În calitate de demonstrație a acestui fapt vom cerceta următorul exemplu.

Exemplul 2.3.1. Are loc următoarea echivalență:

$$\overline{\exists x\big(A(x) \rightarrow \forall y B(y)\big)} \equiv \forall x\left(\overline{\overline{A(x)} \vee \forall y B(y)}\right) \equiv$$

$$\forall x\big(A(x) \& \overline{\forall y B(y)}\big) \equiv \forall x\big(A(x) \& \exists y \overline{B(y)}\big).$$

În ultima formulă negația se atribuie numai formulelor elementare.

Definiția 2.3.1. *Formulele în care participă numai 3 operații* & , ∨ *și* ¬, *iar negația se atribuie numai propozițiilor și predicatelor elementare, le vom numi* ***formule reduse (prenexe)***.

Putem conclude că pentru fiecare formulă din logica predicatelor există echivalenta sa formulă redusă. Această formulă redusă o vom numi *forma redusă* a formulei date și vom spune că formula dată a fost adusă la forma sa *redusă*.

2.4 Formule normale și forme normale

Din materialul precedent am observat că pentru orice formulă există echivalenta sa formulă redusă. Printre acestea vom evidenția o clasă speciale de formule, pe care le vom numi formule normale.

Definiția 2.4.1. *Formula redusă se numește* ***normală****, dacă ea nu conține cuantificatori sau dacă îi conține, atunci toți cuantificatorii sunt în fața formulei date, adică operația de legătura cu cuantificatori urmează după toate operațiile algebrei propozițiilor*.

În expresia care descrie formula normală cuantificatorii, dacă ei figurează, precedează toate celelalte simboluri operaționale.

De exemplu, formula redusă

$$\forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \forall y_4 U(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

este normală, dacă, la rândul său, formula $U(y_1, y_2, y_3, y_4)$ nu conține cuantificatori.

Teorema 2.4.1. *Pentru orice formulă din logica predicatelor există echivalenta sa formulă normală.*

Demonstrație. Vom arăta pentru început că are loc următoarea relație, unde formula H nu conține variabila x:

$$1. \forall x U(x) \vee H \equiv \forall x (U(x) \vee H), x \notin H$$

Pentru aceasta vom arăta că dacă formula din partea stângă a egalității ($\equiv$) este adevărată, atunci la fel este adevărată formula din partea dreaptă a egalității. Apoi același fapt se demonstrează în cazul în care formula este falsă.

Fie că formula $\forall x U(x) \vee H$ este adevărată pentru un domeniu arbitrar $\mathcal{M}$ și pentru careva valori fixate ale variabilelor libere din această formulă. În acest caz sau este adevărată formula $\forall x U(x)$ pentru aceste variabile fixate din domeniul $\mathcal{M}$ sau formula H este adevărată. În primul caz formula $U(x)$ este adevărată pentru toate elementele $x \in \mathcal{M}$. Însă atunci formula

$$U(x) \vee H \tag{2.1}$$

este la fel adevărată pentru toate elementele $x \in H$ și, prin urmare, este adevărată formula

$$\forall x(U(x) \vee H). \tag{2.2}$$

Dacă este adevărată formula H, atunci formulele (2.1) și (2.2) sunt la fel adevărate pentru aceleași valori fixate ele variabilelor libere.

Rămâne să cercetăm cazul când formula

$$\forall x U(x) \vee H$$

este falsă pentru valorile fixate ale variabilelor libere. Se observă că în acest caz trebuie să fie false ambele formule $\forall x U(x)$ și H. Prin urmare, există așa un element $x_0 \in M$, astfel încât $U(x_0)$ este falsă. De aceea, este falsă și formula $U(x_0) \vee H$, ceea ce ne confirmă faptul că formula (2.2) e falsă.

În mod analog se demonstrează și următoarele egalități:

$$2. \exists x U(x) \vee H \equiv \exists x(U(x) \vee H), x \notin H$$
$$3. \forall x U(x) \& H \equiv \forall x(U(x) \& H), x \notin H$$
$$4. \exists x U(x) \& H \equiv \exists x(U(x) \& H), x \notin H$$

Deoarece atât conjuncția, cât și disjuncția sunt comutative, atunci din aceste 4 egalități rezultă încă 4 egalități, în care cuantificatorul se atribuie la al doilea membru al conjuncției sau disjuncției:

$$1'. H \vee \forall x U(x) \equiv \forall x\big(H \vee U(x)\big), x \notin H$$
$$2'. H \vee \exists x U(x) \equiv \exists x\big(H \vee U(x)\big), x \notin H$$

$$3'. H\&\forall x U(x) \equiv \forall x\big(H\&U(x)\big), x \notin H$$
$$4'. H\&\exists x U(x) \equiv \exists x\big(H\&U(x)\big), x \notin H$$

Vom demonstra în continuare teorema prin inducția matematică, urmând regula de construire a formulelor din logica predicatelor.

Pentru formulele elementare, care reprezintă simboluri de propoziții elementare $A, B, C, \ldots$, sau simboluri de predicate elementare $F(x)$, $P(x, y)$, …, $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, afirmația teoremei este adevărată, deoarece toate aceste formule sunt deja normale, dat fiind faptul că ele nu conțin nicio operație.

Fie că pentru formulele U_1 și U_2 avem, respectiv, formule normale U_1^* și U_2^*. Vom cerceta un caz particular când aceste formule au următoarea formă:

$$U_1^* = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \exists x_i \ldots \exists x_n B_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$U_2^* = \exists y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots \forall y_m B_2(y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

unde formulele $B_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $B_2(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ nu conțin cuantificatori.

Deoarece în procesul de redenumire a variabilelor de legătură formulele se transformă în formule echivalente, atunci putem considera că $x_i \notin U_2^*$, iar $y_j \notin U_1^*$, unde $i = \overline{1, n}$ și $j = \overline{1, m}$.

Să demonstrăm că în acest caz pentru formula $U_1 \vee U_2$ la fel există echivalenta sa formulă normală. Observăm că formula $U_1^* \vee U_2^*$ este echivalentă cu formula $U_1 \vee U_2$, însă, la general vorbind, ultima formulă nu este o formulă normală. Cu toate acestea, bazându-ne pe egalitățile demonstrate mai sus, vom arăta că această formulă poate fi transformată într-o formulă normală. În primul rând, formula $U_1^* \vee U_2^*$ poate fi înlocuită cu formula

$$\forall x_1 [\forall x_2 \ldots \exists x_i \ldots \exists x_n B_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee$$
$$\vee \exists y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots \forall y_m B_2(y_1, y_2, \ldots, y_m)]$$

introducând U_2^* sub simbolul primului cuantificator din formula U_1^*. Având în vedere egalitatea 1, ultima formulă este identic egală cu formula $U_1^* \vee U_2^*$. În continuare putem efectua transformări echivalente în domeniul de incidență al cuantificatorului $\forall x_1$. În baza acelorași raționamente, în virtutea egalităților 1 și 2, formula U_2^* poate fi introdusă în domeniul de incidență al celui de-al doilea cuantificator $\forall x_2$ etc. Admitem că formula U_2^* este introdusă deja în domeniul de incidență al tuturor cuantificatorilor din formula U_1^*. În rezultat obținem următoarea formulă

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \exists x_i \dots \exists x_n [B_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee$$
$$\vee \exists y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots \forall y_m B_2(y_1, y_2, \dots, y_m)].$$

În mod analog putem introduce termenul $B_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ consecutiv în domeniul de incidență al tuturor cuantificatorilor din formula U_2^*. În rezultatul acestui proces vom obține următoarea formulă normală:

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \exists x_i \dots \exists x_n \exists y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots \forall y_m [B_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee$$
$$\vee B_2(y_1, y_2, \dots, y_m)],$$

care este identic egală cu formula $U_1 \vee U_2$.

Analog, cu ajutorul egalităților 3 și 4, poate fi construită formula normală echivalentă formulei $U_1 \& U_2$, dacă sunt cunoscute formulele normale U_1^* și U_2^* identic egale respectiv cu U_1 și U_2.

Să demonstrăm în continuare corectitudinea teoremei și pentru operația de negație. Fie U^* – formula normală identic egală cu U și fie cazul particular

$$U^* = \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \dots \forall x_n H(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Formula $\overline{U^*}$ este identic egală cu formula $\overline{U}$. Însă

$$\overline{U^*} = \overline{\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \dots \forall x_n H(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv$$
$$\equiv \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \exists x_n \overline{H(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Ultima formulă este formulă normală.

Rămâne să demonstrăm pentru operațiile de legătură cu cuantificatori. Ușor se poate de observat că formula $\forall x U^*(x)$ este identic egală cu formula $\forall x U(x)$, iar formula $\exists x U^*(x)$ este identic egală cu formula $\exists x U(x)$. Însă atât formula $\forall x U^*(x)$, cât și formula $\exists x U^*(x)$ sunt formule normale.

Astfel, obținem că pentru formulele elementare există echivalentele lor formule normale. Dacă formula U se obține cu ajutorul operațiilor $\&$, $\vee$ și $\neg$, precum și al operațiilor de legătură cu cuantificatori din formule, pentru care există echivalentele lor formule normale, atunci și pentru formula U există echivalenta ei formulă normală.

Deoarece orice formulă din algebra predicatelor se obține din formule elementare cu ajutorul sus-numitelor operații, atunci obținem că pentru orice formulă a algebrei predicatelor există echivalenta sa formulă normală. □

Formula normală, echivalentă cu formula U, o vom numi formula normală a formulei U și vom spune că formula U a fost transformată în forma sa normală.

2.5 Formule realizabile. Problema realizabilității

Vom cerceta o clasă separată de formule ale logicii predicatelor, care reprezintă afirmații concrete adevărate sau false, în cazul când avem domeniul dat $\mathcal{M}$, iar predicatele din aceste formule sunt înlocuite cu predicate individuale, determinate pe acest domeniul $\mathcal{M}$.

Definiția 2.5.1. *Dacă formula este adevărată pe un domeniu oarecare $\mathcal{M}$ și pentru careva predicate definite pe acest domeniu, atunci formula dată o vom numi* ***realizabilă****.*

Definiția 2.5.2. *Dacă formula este adevărată pe un domeniu $\mathcal{M}$ și pentru toate predicatele definite pe acest domeniu, atunci formula dată se numește* ***identic adevărată pe domeniul $\mathcal{M}$****.*

Definiția 2.5.3. *Dacă formula este adevărată pentru orice domeniu $\mathcal{M}$ și pentru toate predicatele, atunci vom spune că formula este* ***identic adevărată*** *sau* ***adevărată****.*

Definiția 2.5.4. *Formula se numește* ***falsă*** *sau* ***nerealizabilă*** *dacă nici pentru un domeniu si nici pentru un schimb de predicate (o înlocuire a predicatelor) formula dată nu este adevărată.*

Ușor se poate demonstra că dacă formula U este identic adevărată, atunci formula $\overline{U}$ este falsă și viceversa.

Problema realizabilității pentru logica predicatelor este analogică cu *problema deciziei* din algebra propozițiilor. Ea constă în următoarele: de indicat o metodă efectivă (algoritm) care determină pentru o formulă arbitrară dată, dacă ea este realizabilă sau nu.

Rezolvând problema realizabilității pentru oarecare formulă, am putea rezolva și problema deciziei (care constă în faptul că este identic adevărată sau nu) pentru orice formulă.

Într-adevăr, dacă formula U este adevărată, atunci $\overline{U}$ este nerealizabilă și viceversa. De aceea, controlând realizabilitatea sau nerealizabilitatea formulelor U și $\overline{U}$, noi controlăm dacă formula U este identic adevărată sau nu.

Problema realizabilității pentru logica predicatelor generalizează problema realizabilității pentru logica propozițiilor, deoarece toate formulele din calculul propozițiilor sunt în același timp și formule în logica predicatelor.

Cu toate că rezolvarea problemei deciziei pentru calculul propozițiilor nu prezintă nicio greutate, problema analogică a realizabilității pentru logica predicatelor s-a dovedit a fi legată de greutăți destul de serioase.

Cercetările ulterioare au dat posibilitatea de a ne apropia de rezolvarea acestei probleme. Începând cu anii 30 ai secolului trecut, când în logica matematică a fost dată definiția exactă a noțiunii de *algoritm*, a apărut posibilitatea de a demonstra că problema realizabilității pentru logica predicatelor este nerezolvabilă, adică nu există un astfel de algoritm care să rezolve problema în cauză. Aceasta a fost demonstrat pentru prima dată de matematicianul Alonzo Church.

Observăm că pentru unele tipuri de formule particulare din logica predicatelor problema realizabilității predicatelor poate fi rezolvată.

Exemplul 2.5.1. Fie dată formula

$$U = \left(A \& P(x)\right) \vee \exists y Q(x, y),$$

unde A este o propoziție variabilă, $P(x)$ – predicat variabil, iar $Q(x, y)$ este un predicat concret (individual), și anume: predicatul de 2 variabile "$x = y$". Se cere a determina dacă formula U este realizabilă.

Vom considera această problemă pe domeniul numerelor reale $\mathbb{R}$, adică $\mathcal{M} = \mathbb{R}$.

Trebuie să verificăm dacă formula dată U este realizabilă sau nu pe acest domeniu. Deoarece A este o propoziție variabilă, atunci putem lua o propoziție concretă adevărată $A_o = 1$ (adevăr). În calitate de predicat variabil $P(x)$ putem lua un predicat concret $P_o(x) \leftrightarrows$ "$x = 3$". În calitate de obiecte variabile x și y considerăm obiectele concrete $x_o = y_o = 3 \in \mathbb{R}$.

După ce introducem în formula inițială U toate aceste propoziții, predicate și obiecte concrete, obținem în rezultat:

$$U = \left(1 \& P_o(x_o)\right) \vee \exists y Q(x_o, y).$$

Deoarece avem că $P_o(x_o) \leftrightarrows$ "$x_o = 3$" este adevărat în mulțimea numerelor reale, atunci obținem că formula dată U este adevărată pentru aceste obiecte pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$.

2.6 Exerciţii propuse pentru lucrul individual

Ex. 1. Să se construiască negația formulelor, astfel încât simbolurile negației să fie atribuite doar la simboluri de predicate:

1) $\forall x\big(P(x)\&Q(x)\big)$;
2) $\exists x\left(\overline{P(x)\vee Q(x)}\&\forall yL(x,y)\right)$;
3) $F(x)\longrightarrow\forall y\overline{\big(\exists yP(x,y)\vee\overline{F(x)}\big)\&\forall zF(z)}$;
4) $\forall x\exists y\forall z\big(P(x,y)\longrightarrow\exists u\overline{Q(x,y,z,u)}\big)\&\exists y\overline{\forall xP(x,y)}$;
5) $\forall x\exists y\left(\left(R(x,y)\vee\overline{Q(x,y,z)}\right)\longrightarrow L(x,y)\right)$.

Ex. 2. Să se determine dacă formula dată este adevărată, falsă sau realizabilă pe mulțimea de numere naturale $\mathbb{N}_0$:

1) $\forall x\forall y\forall z\forall u\left(\big(P(x,y,z)\&P(x,y,u)\big)\longrightarrow Q(x,y)\right)$;
2) $\big(P(x,y,z)\&P(y,x,u)\big)\longrightarrow Q(x,y)$;
3) $\exists y\big(F(x,x,y)\longrightarrow R(x,x,y)\big)$;
4) $Q(x,y)\longrightarrow\big(\exists yR(x,y,z)\vee P(x,z)\big)$;
5) $\forall x\forall y\forall z\left(\left(P(x,y,z)\&\overline{Q(x,y)}\right)\longrightarrow R(x,y,z)\right)$.

Ex. 3. Să se demonstreze prin transformări echivalente că sunt identic adevărate formulele:

1) $\exists x\big(P(x)\vee Q(x)\big)\to\big(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\big)$;
2) $\exists x\big(P(x)\to Q(x)\big)\to\big(\forall xP(x)\to\exists xQ(x)\big)$;
3) $\forall x\big(P(x)\to\overline{Q(x)}\big)\to\overline{\forall xP(x)\&\exists xQ(x)}$;
4) $\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\to\overline{\overline{\exists xP(x)}\&\overline{\forall xP(x)}}$;
5) $\forall xP(x)\&\forall xQ(x)\to\exists x\big(P(x)\vee Q(x)\big)$.

Ex. 4. Să se demonstreze prin presupunerea contrariului că sunt identic adevărate formulele:

1) $\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)\vee\big(Q(x)\to P(x)\big)$;

2) $\forall x\Big(P(x) \to \big(Q(x) \to (P(x)\&Q(x))\big)\Big)$;

3) $\forall x\left(\overline{P(x)} \to \big(P(x) \to Q(x)\big)\right)$;

4) $\forall x\Big(\big(Q(x) \to R(x)\big) \to \Big(\big(P(x) \lor Q(x)\big) \to \big(P(x) \to R(x)\big)\Big)\Big)$;

5) $\forall x\Big(\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \Big(\big(P(x) \to \overline{Q(x)}\big) \to \overline{P(x)}\Big)\Big)$.

Ex. 5. Să se stabilească dacă sunt identic adevărate formulele:

1) $\big(P(x) \to \ Q(x)\big) \to \big(\forall xP(x) \to \forall xQ(x)\big)$;
2) $\exists x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \big(\forall xP(x) \to \exists xQ(x)\big)$;
3) $\exists x\exists y\big(P(x)\&P(y)\big) \lor \big(\overline{P(x)}\&\overline{P(y)}\big)$;
4) $\exists x\forall x\big(P(y) \to Q(x,y)\big)$;
5) $\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \sim \big(\exists xP(x) \to \forall xQ(x)\big)$.

Ex. 6. Să se aducă la forma normală formulele:

1) $\overline{S \to \forall xP(x)}$;
2) $\overline{\exists x\forall y\exists z\forall uP(x,y,z,u)}$;
3) $\exists x\forall yP(x,y) \lor \overline{\forall y\exists xQ(x,y)}$;
4) $\forall xP(x,y) \lor \Big(\exists xP(x,x) \to \forall z\big(\overline{Q(y,z)} \to \exists xP(x,z)\big)\Big)$;
5) $\forall x\left(A(x) \to \forall y\big(B(x,y) \to \overline{\forall zC(y,z)}\big)\right)$;
6) $\forall x\big(\overline{P(x)} \to \exists y\overline{Q(y)}\big) \to \big(Q(z) \to P(z)\big)$;
7) $\overline{\forall x\forall y\forall z\overline{P(x,y,z)} \to \exists y\exists zQ(y,z)}\& \lor \forall x\forall zR(x,z)$;
8) $\exists x\forall y\left(P(x,y) \to \exists z\big(Q(x,z)\&R(y)\big)\right)$.

Capitolul 3
Calculul predicatelor

3.1 Formulele calculului predicatelor

Vom prezenta în continuare descrierea axiomatică a logicii predicatelor, pe care am cercetat-o în capitolul precedent din punctul de vedere al conținutului. Remarcăm că, spre deosebire de algebra propozițiilor, logica predicatelor are caracter vădit neconstructiv. Toate noțiunile se definesc pentru un domeniu arbitrar sau pentru o mulțime arbitrară de obiecte. Luând în calcul cele expuse mai sus, la descrierea conținutului logicii predicatelor ne-am bazat pe principiile neconstructive ale teoriei mulțimilor. Descrierea ulterioară a logicii predicatelor din acest capitol satisface întocmai cerințele finitismului Hilbert.

Calculul predicatelor, precum orice sistem axiomatic, conține simboluri din care sunt construite (alcătuite) formulele. Apoi din toate aceste formule se separă o clasă aparte de formule, pe care le vom numi *deductibile*. Clasa separată de formule deductibile din calculul predicatelor se determină, la fel precum în calculul propozițiilor, prin indicarea unei mulțimi finite de formule, pe care le vom numi *axiome*, și prin indicarea unor reguli de deducție, care ne permit să obținem din formulele deductibile date noi formule deductibile.

Fiecare formulă a calculului predicatelor reprezintă o consecutivitate finită de simboluri ale calculului dat. Vom descrie în continuare simbolurile calculului predicatelor, care se împart în următoarele categorii:

1) Litere latine mici cu sau fără indicii: $a, b, c, \dots, x, y, z$, $a_5, b_7, \dots, x_8, y_9, \dots$. Aceste simboluri poartă denumirea de *obiecte variabile*.

2) Litere latine majuscule $A, B, C, \dots, A_5,\ B_7, C_9, \dots$, care poartă denumirea de *propoziții variabile*.

3) Litere latine majuscule $P(x), Q(x, y), \dots, F(x_1, \dots, x_n), \dots$, cu indicarea obiectelor variabile de care depind. Aceste simboluri se numesc *predicate variabile*.

4) Simbolurile legăturilor logice din calculul propozițiilor: $\&, \vee, \rightarrow, \neg$.

5) Simbolurile auxiliare de paranteze: [, (,),].

6) Simbolurile cuantificatorilor: $\forall, \exists$.

Formulele le vom defini, ca și în calcul propozițiilor, ca o consecutivitate finită din astfel de simboluri, sau, altfel, vom spune că formulele sunt *cuvinte* în alfabetul care conține toate categoriile de simboluri indicate mai sus. Pentru a concretiza noțiunea de formulă vom defini în continuare prin inducție (adică, pe pași) această noțiune.

Definiția formulei calculului predicatelor

1. Orice propoziție variabilă este formulă.

2. Dacă F – este simbol de predicat variabil, iar $a_1, a_2, \dots, a_n$ reprezintă simboluri de obiecte variabile, atunci cuvântul

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

este formulă și o vom numi *predicat variabil de n argumente* (n*-ar*), unde n este numărul de argumente.

Formulele definite în punctele 1 și 2 le vom numi *formule elementare*. Amintim că în formulele elementare toate variabilele (de obiecte) sunt *variabile libere*.

3. Fie că formula $U(x)$ conține variabila liberă x. Atunci cuvintele

$$\forall x U(x) \text{ și } \exists x U(x) \tag{3.1}$$

sunt la fel formule. Amintim că variabila x din formulele (3.1) se numește de legătură. Celelalte variabile, care în formula U sunt libere, rămân libere la fel și în formulele (3.1). Variabilele, care sunt de legătură în formula U, vor fi la fel de legătură și în formulele (3.1).

4. Fie că formulele U și B nu conțin o astfel de variabilă, încât în una dintre aceste formule variabila să fie liberă, iar în cealaltă de legătură (și viceversa). Atunci cuvintele

$$U\&B,\ \ U \vee B,,\ \ U \to B,\ \overline{U} \tag{3.2}$$

sunt la fel formule. În acest caz, variabilele din formulele U și B rămân libere și în toate formulele (3.2), iar variabilele de legătură din formulele U și B vor fi la fel de legătură în toate formulele (3.2).

Definiția 3.1.1. *Formulă se numește cuvântul alcătuit din simbolurile sus-numite care poate fi construit din formule elementare cu ajutorul operațiilor de trecere de la formulele U și B la formulele* (3.1)*, precum și la formulele* (3.2).

În acest caz, pentru demonstrația unei afirmații despre formule putem folosi principiul *inducției matematice*. Astfel de demonstrație are următoarea formă. Afirmația se demonstrează inițial pentru formulele elementare, iar apoi se demonstrează că din presupunerea că afirmația dată este adevărată pentru formulele U și V rezultă că ea este adevărată atât pentru formulele (3.1), cât și pentru formulele (3.2). De unde rezultă că afirmația inițiala este adevărată pentru orice formulă.

Ușor se observă că toate formulele din calculul propozițiilor sunt la fel formule și în calcul predicatelor.

Să prezentăm câteva exemple de expresii care sunt formule în calculul predicatelor:

a) $\exists x\big(F(x)\&\forall yG(y,z)\big)$. Această expresie este formulă, deoarece $G(y,z)$ este un predicat variabil, care conține 2 variabile libere y și z și, prin urmare, este o formulă elementară.

În virtutea pasului 3 de construire iterativă a formulelor, expresia $\forall yG(y,z)$ este la fel formulă ce conține variabila liberă z și variabila y legată cu cuantificatorul de generalizare $\forall y$. În formulele $F(x)$ și $\forall yG(y,z)$ nu sunt astfel de variabile, care să fie libere în una dintre ele şi în același timp să fie de legătură în cealaltă, de aceea cuvântul $F(x)\&\forall yG(y,z)$ este la fel formulă ce conține variabila liberă x și z, precum și variabila de legătură y. Ținând cont de pasul 3 de construire iterativă a formulelor, expresia

$$\exists x\big(F(x)\&\forall yG(y,z)\big)$$

este la fel formulă, în care variabila x este legată cu cuantificatorul de existență $\exists x$, variabila y este legată cu cuantificatorul $\forall y$, iar variabila z este liberă.

b) $\forall xF(x)\vee\forall x\exists yG(x,y)$. Evident că expresia $\forall xF(x)$ este o formulă în care variabila x este de legătură, iar expresia $\forall x\exists yG(x,y)$ este o formulă, în care ambele variabile sunt de legătură. Ambele aceste formule satisfac pasul 3 de construire iterativă a formulelor, deoarece în ele toate variabilele sunt de legătură. De aceea, expresia inițială

$$\forall xF(x)\vee\forall x\exists yG(x,y)$$

este la fel formulă.

c) $\exists xF(x)\rightarrow\forall yG(x,y)$. Această expresie nu este formulă, deoarece ambele cuvinte $\exists xF(x)$ și $\forall yG(x,y)$ sunt formule, însă în primul cuvânt variabila x este de legătură, iar în al doilea cuvânt aceeași variabilă x este liberă. Așadar, aceste formule nu satisfac cerințelor pasului 3 de construire iterativă a formulelor. Prin urmare, expresia dată nu este formulă.

La fel ca și în calcul propozițiilor, vom considera că formulele sunt alcătuite din părțile lor componente, pe care le vom numi *subformule*.

Să prezentăm în continuare următoarele 2 leme care pot fi ușor demonstrate.

Lema 3.1.1. *În formulele calculului predicatelor variabilele libere și de legătură sunt notate cu litere diferite.*

Lema 3.1.2. *Dacă un cuantificator se află în domeniul de incidență al altui cuantificator, atunci variabilele de legătură cu acești cuantificatori sunt notate cu litere diferite.*

Astfel, pentru ca o expresie alcătuită din simbolurile calculului predicatelor să fie formulă, este necesar să fie satisfăcute condițiile Lemelor 3.1.1 și 3.1.2. În cazul în care se încalcă una dintre aceste condiții, vom spune că avem *coliziune de variabile*.

Să analizăm un exemplu de coliziune de variabile.

Exemplul 3.1.1. Expresia

$$\forall x\big(F(x) \rightarrow \exists x G(x, y)\big)$$

nu este formulă, deoarece în acest caz nu se satisface condiția Lemei 3.1.2, fiindcă în domeniul de incidență al cuantificatorului $\forall x$ se află un alt cuantificator de existență, care se leagă cu aceeași variabilă x. Într-adevăr, din formulele $F(x)$ și $\exists x G(x, y)$ nu poate fi construită formula $F(x) \rightarrow \exists x G(x, y)$, deoarece aceste formule nu satisfac cerințelor din pasul 4 de construire iterativă a formulelor.

3.2 Schimbul de variabile în formulele calculului predicatelor

Pentru a evita coliziunea de variabile din formule, putem efectua un schimb de variabile în aceste formule, ceea ce ne permite următoarea teoremă.

Teorema 3.2.1. *Dacă în formula U efectuăm un schimb de variabile atât libere, cât și de legătură, schimbând o literă prin alta pretutindeni unde ea se întâlnește, astfel încât să fie satisfăcute condițiile Lemelor* 3.1.1 *și* 3.1.2, *atunci expresia primită în rezultatul acestui schimb este la fel formulă.*

Demonstrație. Vom demonstra teorema folosind inducția matematică referitoare la construirea formulelor din calculul predicatelor.

Teorema este adevărată pentru formulele elementare, de exemplu pentru $F(x, y, z)$, deoarece schimbând în mod arbitrar variabilele x, y și z din acest predicat obținem în rezultat la fel un predicat, adică o formulă elementară. Fie că teorema este adevărată pentru formula $U(x)$, unde x este variabilă liberă. Efectuăm un schimb de variabile în formula $\forall x U(x)$, neîncălcând condițiile Lemelor 3.1.1 și 3.1.2. Dacă în urma acestui schimb litera x va fi înlocuită cu o nouă literă y, atunci variabila y trebuie să fie diferită de alte variabile, cu care au fost înlocuite toate celelalte variabile din formula U, deoarece orice variabilă diferită de x sau este liberă în formula $\forall x U(x)$, sau este de legătură cu un nou cuantificator ce se află în domeniul de incidență al cuantificatorului $\forall x$. Deoarece, efectuând acest schimb de variabile în formula $\forall x U(x)$, prin urmare, și în formula $U(x)$, sunt satisfăcute condițiile Lemelor 3.1.1 și 3.1.2, atunci, în virtutea presupunerii inducției, expresia $U'(y)$ ce se obține în rezultatul schimbului dat din formula $U(x)$ este la fel formulă. Astfel, obținem că toate variabilele de legătură din formula $U'(y)$ sunt diferite de y, ceea ce ne permite să confirmăm că expresia $\forall y U'(y)$ este la fel formulă.

În mod analog se poate demonstra că dacă teorema este adevărată pentru formula $U(x)$, unde x este variabilă liberă, atunci ea este adevărată și pentru $\exists x U(x)$.

Fie că teorema este adevărată pentru astfel de formule U și V, încât variabilele de legătură dintr-o formulă să fie diferite de variabilele libere din cealaltă. Vom demonstra că în acest caz teorema este adevărată și pentru formula $U\&V$.

Efectuăm un schimb de variabile din această formulă, astfel încât să fie satisfăcute condițiile Lemelor 3.1.1 și 3.1.2. În rezultat părțile componente U și V din formula dată se vor schimba în U' și V'. Având în vedere presupunerea inducției, expresiile U' și V', care se obțin din U și V în rezultatul schimbului dat de variabile, satisfac condițiilor Lemelor 3.1.1 și 3.1.2 și sunt formule. Din Lema 3.1.1 rezultă că variabilele de legătură din U' sunt diferite de variabilele libere din V' și viceversa. De aceea, expresia $U'\&V'$, alcătuită din formulele U' și V', este la fel formulă.

În mod analog se poate demonstra că teorema este adevărată și pentru formulele $U \vee V$ și $U \rightarrow V$. Pentru operația de negație teorema este evidentă (trivială).

Astfel, teorema este demonstrată pentru orice formulă din calculul predicatelor. □

Remarcăm că în formula

$$\forall x\big(F(x) \rightarrow G(y)\big)$$

nu putem schimba litera y prin x, deoarece variabila y este liberă, iar x – de legătură. Cu toate că în rezultatul acestui schimb obținem expresia

$$\forall x\big(F(x) \rightarrow G(x)\big),$$

care este la fel formulă, însă ea nu este echivalentă cu formula inițială.

3.3 Axiomele și regulile de deducție ale calculului predicatelor

Definirea formulelor deductibile din calculul predicatelor o vom efectua prin aceeași metodă ca și din calculul propozițiilor. Vom considera o mulțime finită de formule date ca deductibile, pe care le vom numi *axiome ale calculului predicatelor*. Apoi vom indica regulile de deducție a noi formule din cele obținute deja sau din axiome.

Definiția 3.3.1. *Formule deductibile în calculul predicatelor sunt acele formule, care pot fi obținute din axiomele calculului dat cu ajutorul regulilor de deducție.*

Primele patru grupe de axiome ale calculului predicatelor reprezintă aceleași grupe de axiome din calculul propozițiilor. În calculul predicatelor se mai adaugă grupa V, legată de cuantificatori.

V. $(\forall, \exists)$

1. $\forall x F(x) \longrightarrow F(y)$
2. $F(y) \longrightarrow \exists x F(x)$

Regulile de deducție în calculul predicatelor

În calculul predicatelor sunt valabile ambele reguli de bază de deducție din calculul propozițiilor, cu unele specificări:

1) ***Regula Modus Ponens (M.P.)***, care se formulează și se scrie la fel ca și în calculul propozițiilor: Dacă formulele G și $G \rightarrow H$ sunt deductibile, atunci și formula H este la fel deductibilă. Vom scrie în acest caz pe scurt:

$$M.P. \ \frac{\vdash G, \vdash G \rightarrow H}{\vdash H} \text{ sau } M.P. \ (G, G \rightarrow H) \vdash H,$$

unde semnul deducției se notează la fel ca și în calculul propozițiilor prin simbolul $\vdash$. Pentru calculul predicatelor numărul de formule pentru care se aplică aceasta regulă este mult mai mare.

2) ***Regula substituției*** într-o propoziție variabilă și într-un predicat variabil. Această regulă este analoagă cu regula respectivă din calculul propozițiilor, care se reduce la substituția propozițiilor variabile în formule deductibile, în rezultatul căreia se obțin la fel formule deductibile. Amintim că în calculul propozițiilor formula cu care se substituia formula inițială era arbitrară. Pe când în calculul predicatelor asupra acestei formule trebuie impuse anumite restricții, deoarece în caz contrar putem obține o expresie care să nu fie formulă, adică să avem coliziune de variabile.

Substituirea propoziției variabile

Fie formula $U(A)$ conține propoziția variabilă A. Atunci putem substitui în formula U litera A (pretutindeni unde ea se regăsește) printr-o nouă formulă B care satisface următoarele condiții:

a) Variabilele libere din formula B sunt notate cu diferite litere fața de variabilele de legătură din formula U și viceversa, adică variabilele de legătură din B – cu diferite litere față de variabilele libere din U.

b) Dacă subformula A din formula U se află în domeniul de incidență al unui cuantificator, care este legat cu o variabilă (de exemplu, x), atunci variabila dată (x) nu va aparține formulei U.

Dacă condițiile a) și b) sunt satisfăcute, vom spune că formula B înlocuiește subformula A din U și vom scrie:

$$S_A^B U(A)$$

Să analizăm un exemplu de substituire a propoziției variabile.

Exemplul 3.3.1. Considerăm în calitate de $U(A)$ formula:

$$\forall x \forall y \big[A \vee \forall z H(x,z) \& \big(\bar{A} \vee F(x,y)\big)\big].$$

În acest caz subformula A nu poate fi înlocuită cu formula $\forall x B(x)$ sau cu formula $\exists x G(x)$, deoarece nu se satisfice condiția b). Dacă însă efectuăm această înlocuire, atunci expresia obținută nu va fi formulă, deoarece în ea doi cuantificatori, unul dintre care se află în domeniul de incidență al celuilalt, sunt legați cu aceeași variabilă.

Înlocuirea subformulei A cu

$$\forall z \forall t \Big(\big(A \& H(v,z)\big) \to \big(B \& F(z,t)\big)\Big)$$

este posibilă, deoarece în acest caz sunt satisfăcute ambele condiții a) și b) și în rezultat obținem expresia

$$\forall x\forall y\left[\forall z\forall t\left(\left(A\&H(v,z)\right)\to\left(B\&F(z,t)\right)\right)\vee\forall zH(x,z)\&\right.$$
$$\left.\&\,\overline{\forall z\forall t\left(\left(A\&H(v,z)\right)\to\left(B\&F(z,t)\right)\right)}\vee F(x,y)\right],$$

care este formulă.

Substituirea predicatului variabil

Fie formula $U(F)$ conține predicatul variabil n-ar F. Considerăm formula $B(t_1,t_2,\dots,t_n)$, ce conține variabile libere $t_1,t_2,\dots,t_n$, care sunt notate cu litere diferite de toate variabilele din formula U. Dacă pentru formula B este satisfăcută condiția a) de mai sus, precum și condiția:

c) Dacă subformula F din U se află în domeniul de incidență al unui cuantificator legat de o variabilă (de exemplu, x), atunci variabila dată nu se va conține în formula B. În acest caz este posibilă înlocuirea predicatului F cu formula B și vom scrie $S_F^B U(F)$.

Operația de substituire a formulei $B(t_1,t_2,\dots,t_n)$ în locul predicatului $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ în formula $U(F)$ reprezintă înlocuirea fiecărei formule elementare de tipul $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ din $U(F)$, prin expresia ce se obține din B efectuând schimbul de variabile $t_1,t_2,\dots,t_n$ prin literele $x_1,x_2,\dots,x_n$.

În acest caz trebuie de indicat în mod strict cărei din variabilele $t_1,t_2,\dots,t_n$ îi corespunde fiecare argument din predicatul F.

Exemplul 3.3.2. Fie formula U are următoarea formă:

$$\forall x\exists y\exists z\left(F(x,y)\vee\overline{F(x,z)}\right).$$

Vom înlocui subformula F din formula dată printr-o formulă nouă

$$\forall u\exists v\left(H(u,t_1)\vee H(v,t_2)\right),$$

astfel încât primului argument din predicatul F îi va corespunde variabila t_1, iar celui de al doilea argument din F – t_2. În acest caz sunt îndeplinite condițiile a) și c) de mai sus și în rezultatul substituției date vom obține formula

$$\forall x \exists y \exists z \left[\forall u \exists v \big(H(u, x) \vee H(v, y) \big) \vee \right.$$
$$\left. \vee\ \overline{\forall u \exists v \big(H(u, x) \vee H(v, z) \big)} \right].$$

Ușor se observă că dacă nu sunt satisfăcute condițiile a), b) sau c), atunci, în general vorbind, în rezultatul substituției respective vom obține o expresie care nu este formulă.

Exemplul 3.3.3. Fie că în formula

$$A \vee \forall x F(x)$$

înlocuim subformula A cu formula $U(x)$. În rezultat obținem expresia

$$U(x) \vee \forall x F(x),$$

care nu este formulă, deoarece se încalcă condiția a) și de aceea apare coliziune de variabilă.

Exemplul 3.3.4. Dacă substituim în formula

$$\forall x \big(A \to F(x) \big)$$

subformula A cu formula $\forall x U(x)$, obținem expresia

$$\forall x \big(\forall x U(x) \to F(x) \big),$$

care nu este formulă, deoarece se încalcă condiția b) și în rezultat apare coliziune de variabilă.

Spre deosebire de calculul propozițiilor, în calculul predicatelor mai apar încă două noi reguli de deducție:

$1'$. Prima regulă de legătură cu cuantificatori, care afirmă că dacă formula

$$B \to U(x)$$

este deductibilă și formula B nu conține variabila x, atunci formula

$$B \to \forall x U(x)$$

este la fel deductibilă. Vom nota pe scurt

$$I\ R.L.C.\ \frac{\vdash B \to U(x), x \notin B}{\vdash B \to \forall x U(x)}.$$

$2'$. A doua regulă de legătură cu cuantificatori, care afirmă că dacă formula

$$U(x) \to B$$

este deductibilă și formula B nu conține variabila x, atunci formula

$$\exists x U(x) \to B$$

este la fel deductibilă. Vom nota pe scurt

$$II\ R.L.C.\ \frac{\vdash U(x) \to B, x \notin B}{\vdash \exists x U(x) \to B}.$$

Remarcăm că printre formulele deductibile din calculul predicatelor se întâlnesc toate formulele deductibile din calculul propozițiilor. Într-adevăr, calculul predicatelor conține în sine toate axiomele din calculul propozițiilor, iar printre regulile de deducție ale calculului predicatelor se conțin ambele reguli de deducție de bază din calculul propozițiilor: M.P. și Substituției. Aplicarea acestor reguli la formulele calculului predicatelor coincide cu aplicarea lor la calculul propozițiilor. Astfel, aplicând aceste reguli la axiome, putem obține toate formulele deductibile din calculul propozițiilor. Apare întrebarea dacă există forme ale calculului propozițiilor, care sunt deductibile în calculul predicatelor, dar în același timp nu sunt deductibile în calculul propozițiilor. Răspunsul este negativ, ceea ce ușor se deduce din necontradicția calculului predicatelor. Necontradicția calculului predicatelor o vom cerceta mai detaliat în următorul paragraf.

Remarca 3.3.1. *Orice formulă deductibilă din calculul predicatelor este în același timp și identic adevărată din punctul de vedere al conținutului său în algebra predicatelor*.

Întra-adevăr, se observă că toate axiomele calculului predicatelor sunt formule identic adevărate, iar dacă aplicăm regulile de deducție la formulele adevărate, obținem în rezultat la fel formule identic adevărate.

3.4 Necontradicția calculului predicatelor

Problema necontradicției calculului predicatelor este analoagă cu problema asemănătoare din calculul propozițiilor. Amintim că calculul logic se numește contradictoriu dacă în acest calcul poate fi dedusă atât o formulă arbitrară, cât și negația sa. De unde rezultă că în calculul contradictoriu poate fi dedusă orice formulă, indiferent de faptul este ea adevărată sau nu.

Schema demonstrației necontradicției calculului predicatelor constă în reducerea calculului respectiv la calculul propozițiilor care, după cum cunoaștem, este necontradictoriu. Pentru aceasta vom cerceta formulele din calculul predicatelor din punctul de vedere al conținutului. Vom considera că toate predicatele din formulele date sunt definite pe un domeniu arbitrar $\mathcal{M}$. Dacă acest domeniu constă dintr-un singur element, de exemplu α, atunci cuantificatorii pot fi ignorați, deoarece ambele expresii $\forall x U(x)$ și $\exists x U(x)$ sunt identice cu propoziția simplă $U(\alpha)$ pe domeniul $\mathcal{M}$. În această interpretare toate formulele din calculul predicatelor se transformă în formule ale calculului propozițiilor, iar axiomele calculului predicatelor vor trece în formule deductibile în calculul propozițiilor. La fel, regulile de deducție din calculul predicatelor se vor transforma în reguli de deducție din calculul propozițiilor. Dacă în calculul predicatelor este posibilă deducția formulei A, atunci în sistemul transformat de mai sus am avea la fel deductibilă aceeași formula A. Sistemul transformat coincide cu calculul propozițiilor, care, după cum cunoaștem, este necontradictoriu. Prin urmare, în calculul predicatelor nu poate fi dedusă orice formulă arbitrară, adică calculul predicatelor este necontradictoriu.

Acum putem răspunde la întrebarea, pe care am formulat-o mai sus: poate oare formula calculului propozițiilor, care nu poate fi dedusă în acest calcul, să fie deductibilă în calculul predicatelor?

Vom demonstra că o astfel de formulă nu poate fi dedusă. Într-adevăr, fie U o formulă din calculul propozițiilor, care poate fi dedusă în calculul predicatelor. Dacă interpretăm această formulă după schema de mai sus într-o formulă a calculului propozițiilor, atunci obținem formula U^*, care, după cum am arătat, este deductibilă în calculul respectiv. Însă deoarece formula U aparține deja calculului propozițiilor, atunci formula U^* coincide cu formula U și de aceea este deductibilă în calculul propozițiilor. Astfel am demonstrat că orice formulă din calculul propozițiilor, care este deductibilă în calculul predicatelor, este deductibilă și în calculul propozițiilor.

3.5 Formule deductibile și regula generalizării în calculul predicatelor

Deoarece toate formulele deductibile din calculul propozițiilor sunt la fel deductibile și în calculul predicatelor, efectuând substituții (aplicând regula substituției) în formulele deductibile din calculul propozițiilor, obținem formule deductibile în calculul predicatelor.

Exemplul 3.5.1. Dacă aplicăm regula substituției la formula calculului propozițiilor

$$\vdash A \vee \bar{A},$$

unde formula A se substitue cu predicatul $F(x)$, atunci formula deductibilă din calculul predicatelor va fi

$$\vdash F(x) \vee \overline{F(x)}.$$

Exemplul 3.5.2. În formula deductibilă din calculul propozițiilor

$$\vdash A \to \left[\left((B\&C) \to B\right)\&A\right]$$

putem înlocui B prin $\exists xF(x)$, iar C prin $\forall yH(y)$ și obținem în rezultat formula deductibilă în calculul predicatelor:

$$\vdash A \to \left[\left((\exists xF(x)\&\forall yH(y)) \to \exists xF(x)\right)\&A\right].$$

Amintim, că pentru a demonstra că o formulă poate fi dedusă în calculul propozițiilor, e suficient de arătat că formula dată este identic adevărată în algebra propozițiilor.

Cu ajutorul substituției în formulele deductibile din calculul propozițiilor pot fi obținute noi formule deductibile în calculul predicatelor. Însă prin această metodă nu pot fi obținute toate formulele deductibile din acest calcul.

Toate regulile derivate de deducție din calculul propozițiilor sunt adevărate și pentru calculul predicatelor.

Vom demonstra aceasta numai pentru regula silogismului (R.S.), celelalte se demonstrează în mod analogic.

Amintim regula silogismului:

$$R.S.\ \frac{\vdash U \to V, \vdash V \to C}{\vdash U \to C},$$

unde expresia $U \to C$ este formulă în calculul predicatelor.

În calcul propozițiilor regula silogismului a fost dedusă din formula deductibilă

$$\vdash (A \to B) \to \left((B \to C) \to (A \to C)\right).$$

Dar deoarece regula substituției are loc și în calculul predicatelor, atunci, substituind în formula dată subformulele elementare $A,\ B$ și C prin formulele calculului predicatelor $U,\ V$ și C, obținem

$$\vdash (U \to V) \to \left((V \to C) \to (U \to C)\right).$$

Coliziune de variabile în aceasta formulă nu poate să apară, deoarece în caz contrar am avea coliziune de variabile între formulele $U,\ V$ și

C sau între careva perechi din aceste formule, ceea ce nu poate fi în presupunerea că toate aceste expresii sunt deja formule.

Formulele $U \to V$ și $V \to C$ din condiția inițială sunt deductibile. Aplicăm regula silogismului, obținem în rezultat că și formula $U \to C$ la fel este deductibilă.

La fel ca în calculul propozițiilor, în calculul predicatelor sunt deductibile următoarele formule

$$\vdash B \to A_a \text{ și } \vdash A_f \to B,$$

unde prin A_a notăm orice formulă deductibilă, iar prin A_f – orice formulă de tipul $\bar{A}_a$.

Vom introduce în calculul predicatelor următoarea regulă derivată de deducție:

Dacă formula $U(x)$, care conține variabila liberă x, poate fi dedusă, atunci și formula

$$\forall x U(x)$$

la fel poate fi dedusă în calculul predicatelor.

Într-adevăr, fie că în calculul predicatelor avem $\vdash U(x)$, unde x este variabilă liberă. Din cele menționate mai sus avem

$$\vdash B \to A_a,$$

unde A_a este o formulă deductibilă arbitrară și de aceea putem afirma

$$\vdash B \to U(x),$$

unde B este o propoziție elementară, care nu aparține formulei $U(x)$.

Deoarece $x \notin B$, atunci putem aplica prima regulă de legătură cu cuantificatori și obținem

$$\vdash B \to \forall x U(x).$$

Efectuăm substituția în ultima formulă, substituind formula elementară B cu o formulă arbitrară deductibila A_a și obținem

$$\vdash A_a \to \forall x U(x).$$

Aplicăm în continuare regula Modus Ponens (M.P.) la formula deductibilă A_a și la ultima formulă vom avea

$$\vdash \forall x U(x),$$

c.t.d.

Astfel, obținem următoarea regulă de deducție, pe care o vom numi *regula generalizării* (R.G.) și care poate fi scrisă

$$R.G.\ \ \frac{\vdash U(x)}{\vdash \forall x U(x)},$$

unde x este variabilă liberă în formula $U(x)$.

Evident că această regulă poate fi aplicată la orice variabilă liberă. Aplicând regula dată, apare posibilitatea de a deduce noi formule deductibile.

Exemplul 3.5.3. Cunoaștem că în calculul predicatelor poate fi dedusă formula

$$\vdash F(x) \vee \overline{F(x)}.$$

Deoarece în această formulă variabila x este liberă, atunci putem aplica regula generalizării (R.G.) față de această variabilă și obținem

$$\vdash \forall x(F(x) \vee \overline{F(x)})$$

Exemplul 3.5.4. Din formula deductibilă

$$\vdash \big(F(x)\&G(y)\big) \to G(y),$$

care se obține în rezultatul substituției în axioma II.2:$(A\&B) \to B$, aplicăm R.G. față de variabila liberă y și obținem

$$\vdash \forall y\big[\big(F(x)\&G(y)\big) \to G(y)\big].$$

În ultima formulă variabila y este de legătură, iar variabila x este liberă, ceea ce ne permite să aplicăm încă o dată regula generalizării și în rezultat obținem

$$\vdash \forall x \forall y\big[\big(F(x)\&G(y)\big) \to G(y)\big].$$

3.6 Teorema deducției în calculul predicatelor

Vom demonstra pentru calculul predicatelor teorema analogică teoremei deducției din calculul propozițiilor. Această teoremă ne va permite să obținem noi formule deductibile din calculul predicatelor fără să descriem șirul de deducție formal al formulei date din axiomele calculului predicatelor. În acest fel vom simplifica esențial procedura de deducție a multor formule deductibile din calculul dat.

Definiția 3.6.1. *Vom spune că formula V* ***poate fi dedusă*** *din formula U, dacă $U \to V$ este formulă și formula V se deduce din mulțimea tuturor formulelor deductibile din calculul predicatelor și din formula U cu ajutorul tuturor regulilor de deducție din acest calcul, astfel încât ambele reguli de legătură cu cuantificatori se aplică doar predicatelor variabile sau variabilelor propoziționale, care nu aparțin formulei U.*

Teorema 3.6.1. (Teorema deducției) *Dacă formula V poate fi dedusă din formula U, atunci formula $U \to V$ este deductibilă în calculul predicatelor.*

Demonstrație. Admitem că U și V sunt astfel de formule, încât $U \to V$ este la fel formulă, adică între U și V nu apare coliziune de variabile. Acest lucru poate fi realizat pentru orice formulă V prin redenumirea variabilelor din formula V, obținând o nouă formulă V', astfel încât între formulele U și V' nu mai avem coliziune de variabile, ceea ce ne permite să construim formula $U \to V'$. În acest caz teorema deducției poate fi formulată pentru formulele U și V'.

Pentru a demonstra teorema deducției este suficient de a arăta că sunt adevărate următoarele afirmații:

a) Pentru orice formulă deductibilă din calculul predicatelor teorema deducției este adevărată.

b) Dacă teorema este adevărată pentru V_1 și $V_1 \to V_2$, atunci ea este adevărată și pentru V_2, care se obține în baza regulii M.P..

c) Dacă teorema este adevărată pentru formula $V_1 \to V_2(x)$, unde $x \notin V_1$ și $x \notin U$, atunci ea este adevărată și pentru formula $V_1 \to \forall x V_2(x)$, care se obține în baza primei reguli de legare cu cuantificatori (I R.L.C.).

d) Dacă teorema este adevărată pentru formula $V_2(x) \to V_1$, unde $x \notin V_1$ și $x \notin U$, atunci teorema este adevărată și pentru formula $\exists x V_2(x) \to V_1$, care se obține în baza regulii a doua de legare cu cuantificatori (II R.L.C.).

e) Dacă teorema este adevărată pentru formula V, atunci ea este adevărată și pentru V', care se obține din V prin substituirea variabilelor propoziționale sau a predicatelor variabile, ce nu se conțin în U, cu condiția că între U și V' să nu apară coliziuni de variabile.

În cazul afirmației a) efectuam substituția $S_A^{A_a}(\text{I}.1)$ și obținem în rezultat

$$\vdash A_a \to (A \to A_a),$$

unde A_a este o formulă deductibilă, adică $\vdash A_a$. Aplicăm la ultimele două formule regula M.P. și obținem

$$\vdash A \to A_a.$$

Astfel, obținem că dacă V este formulă deductibilă, atunci $U \to V$ este la fel deductibilă pentru orice formulă U.

Vom examina în continuare afirmația b). Considerăm formulele V_1 și $V_1 \to V_2$ deductubile din formula U, pentru care are loc teorema deducției, adică avem

$$\vdash U \to V_1 \;\text{ și }\; \vdash U \to (V_1 \to V_2).$$

În axioma (I.2): $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$ efectuăm substituția $S_{A,B,C}^{U,V_1,V_2}(\text{I}.2)$ și obținem ca rezultat

$$\vdash \big(U \to (V_1 \to V_2)\big) \to \big((U \to V_1) \to (U \to V_2)\big).$$

Aplicăm regula M.P. la formulele deductibile obținute mai sus și obținem

$$\vdash U \rightarrow V_2.$$

Trecând la afirmația c), presupunem că pentru formula $V_1 \rightarrow V_2(x)$, unde $x \notin V_1$ și $x \notin U$, teorema este adevărată, adică

$$\vdash U \rightarrow \big(V_1 \rightarrow V_2(x)\big).$$

Aplicăm la ultima formulă regula conjuncției ipotezelor (R.C.I.) și obținem

$$\vdash (U \& V_1) \rightarrow V_2(x).$$

Deoarece $x \notin V_1$ și $x \notin U$, atunci $x \notin (V_1 \& U)$ și putem aplica în continuare prima regulă de legare cu cuantificatori și obținem

$$\vdash (U \& V_1) \rightarrow \forall x V_2(x).$$

La ultima formulă aplicăm regula de despărțire a ipotezelor (R.D.I.) și în final obținem

$$\vdash U \rightarrow \big(V_1 \rightarrow \forall x V_2(x)\big).$$

Pentru examinarea afirmației d) admitem că pentru formula $V_2(x) \rightarrow V_1$, care este deductibilă din formula U și $x \notin V_1$ și $x \notin U$, teorema este adevărată, adică avem

$$\vdash U \rightarrow (V_2(x) \rightarrow V_1).$$

Aplicăm la ultima formulă regula de transpunere a ipotezelor (R.T.I.) și obținem

$$\vdash V_2(x) \rightarrow (U \rightarrow V_1).$$

Deoarece $x \notin V_1$ și $x \notin U$, atunci $x \notin (U \rightarrow V_1)$, ceea ce ne permite să aplicăm a doua regulă de legare cu cuantificatori, pentru a obține

$$\vdash \exists x V_2(x) \rightarrow (U \rightarrow V_1).$$

Pentru a ajunge la rezultatele scontate mai aplicăm încă o dată regula de transpunere a ipotezelor (R.T.I.), după care obținem

$$\vdash U \rightarrow (\exists x V_2(x) \rightarrow V_1).$$

Examinând ultima afirmație e), admitem ca pentru formula V, care este deductibilă din formula U, teorema este adevărată, adică avem

$$\vdash U \to V.$$

Dacă formula V' este rezultatul unei substituții în cadrul unei propoziții variabile sau unui predicat variabil care nu se conține în formula U, atunci $U \to V'$ este rezultatul aceleiași substituții în formula $U \to V$. De aceea formula $\vdash U \to V'$ este la fel deductibilă în calculul predicatelor. □

Teorema 3.6.2. (Teorema inversă a deducției) *Dacă în calculul predicatelor poate fi dedusă formula $U \to V$, atunci formula V este deductibilă în acest calcul.*

3.7 Teoremele de bază din calculul predicatelor

Vom examina în continuare formulele deductibile principale din calculul predicatelor.

Teorema 3.7.1. $\vdash \forall x F(x) \to \exists x F(x)$.

Demonstrația acestei teoreme rezultă nemijlocit din axiomele (V.1) $\forall x F(x) \longrightarrow F(y)$ și (V.2) $F(y) \longrightarrow \exists x F(x)$, la care se aplică regula silogismului (R.S.)

Prin analogie cu calculul propozițiilor vom introduce *simbolul echivalenței* ~, pentru care vom considera că expresia $U \sim V$ reprezintă următoarea formulă

$$(U \longrightarrow V)\&(V \longrightarrow U).$$

În acest caz vom spune că formulele U și V sunt *echivalente*.

Teorema 3.7.2. $\vdash \forall x \forall y F(x,y) \sim \forall y \forall x F(x,y)$.

Demonstrație. În rezultatul aplicării consecutive a axiomei (V.1) obținem

$$\vdash \forall x \forall y F(x,y) \to F(u,v).$$

Deoarece în ultima formulă $u \notin \forall x \forall y F(x,y)$, putem aplica prima regulă de legare cu cuantificatori și obținem

$$\vdash \forall x \forall y F(x,y) \rightarrow \forall u F(u,v).$$

În formula obținută se observă că $v \notin \forall x \forall y F(x,y)$ și de aceea putem aplica încă o dată prima regulă de legare cu cuantificatori, după care obținem

$$\vdash \forall x \forall y F(x,y) \rightarrow \forall u \forall v F(u,v).$$

Observăm că în ultima formulă toate variabilele sunt de legătură și de aceea putem substitui variabilele u, v cu x, y. Astfel obținem

$$\vdash \forall x \forall y F(x,y) \rightarrow \forall y \forall x F(x,y).$$

În mod analog se demonstrează și relația inversă:

$$\vdash \forall y \forall x F(x,y) \rightarrow \forall x \forall y F(x,y).$$

Aplicând la ultimele două formule regula conjuncției formulelor (R.C.F.) obținem

$$\vdash \big(\forall x \forall y F(x,y) \rightarrow \forall y \forall x F(x,y)\big)\&$$
$$\&\big(\forall y \forall x F(x,y) \rightarrow \forall x \forall y F(x,y)\big).$$

Ceea ce este echivalent cu

$$\vdash \forall x \forall y F(x,y) \sim \forall y \forall x F(x,y). \qquad \square$$

Teorema 3.7.3. $\vdash \exists x \forall y F(x,y) \rightarrow \forall y \exists x F(x,y)$.

Demonstrație. Efectuăm o substituție în axioma (V.1), apoi schimbăm denumirea variabilelor libere și obținem

$$\vdash \forall y F(x,y) \rightarrow F(x,v).$$

În același mod din axioma (V.2) avem

$$\vdash F(x,v) \rightarrow \exists u F(u,v).$$

Aplicăm regula silogismului la ultimele două formule și în rezultat obținem

$$\vdash \forall y F(x,y) \to \exists u F(u,v).$$

Deoarece $x \notin \exists u F(u,v)$, putem aplica la ultima formulă a doua regulă de legare cu cuantificatori și în rezultat

$$\vdash \exists x \forall y F(x,y) \to \exists u F(u,v).$$

În ultima formulă $v \notin \exists x \forall y F(x,y)$ și de aceea putem aplica în continuare prima regulă de legare cu cuantificatori, după ce obținem

$$\vdash \exists x \forall y F(x,y) \to \forall v \exists u F(u,v).$$

În ultima formulă variabilele sunt de legătură, ceea ce ne permite să efectuăm un schimb de variabile, după care obținem

$$\vdash \exists x \forall y F(x,y) \to \forall y \exists x F(x,y). \qquad \square$$

Remarca 3.7.1. *Implicația inversă*

$$\vdash \forall y \exists x F(x,y) \to \exists x \forall y F(x,y)$$

nu este o formulă deductibilă în calculul predicatelor.

Într-adevăr, dacă luăm în calitate de domeniu $\mathcal{M} = \mathbb{N}$ (mulțimea numerelor naturale), iar în calitate de predicat considerăm

$$F(x,y) \leftrightharpoons \text{"} y < x \text{"},$$

în acest caz, în ipoteza formulei din remarcă $\forall y \exists x F(x,y)$ se confirmă că pentru orice număr natural y există un alt număr natural x care este mai mare decât y, ceea ce este adevărat pentru mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$. Iar în consecința aceleiași formule din remarcă $\exists x \forall y F(x,y)$ se afirmă că există așa un număr natural x, încât pentru orice număr natural y are loc relația $y < x$. Este evident că ultima afirmație nu poate fi adevărată, deoarece mulțimea numerelor naturale nu este mărginită superior.

Prin urmare, formula din remarcă

$$\forall y \exists x F(x,y) \to \exists x \forall y F(x,y)$$

în acest caz nu este adevărată și, prin urmare, nu este deductibilă.

Teorema 3.7.4. $\vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \to \big(\forall x F(x) \to \forall x G(x)\big)$.

Demonstrație. Pentru a demonstra vom folosi teorema deducției. Pentru aceasta vom arăta că formula $\forall x F(x) \longrightarrow \forall x G(x)$ poate fi dedusă din formula

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big). \tag{3.3}$$

Într-adevăr, efectuăm substituția $S_{F(x)}^{F(x)\longrightarrow G(x)}(\mathrm{V.}\,1)$ și obținem

$$\vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \longrightarrow \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big).$$

Prin urmare, această formulă este deductibilă și de aceea ea este deductibilă din orice formulă și, în particular, din formula (3.3), adică avem relația

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \longrightarrow \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big).$$

Dar deoarece are loc și relația

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big),$$

aplicând regula M.P. la ultimele două relații obținem

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash F(y) \longrightarrow G(y). \tag{3.4}$$

Cercetăm formula deductibilă în calculul propozițiilor

$$\vdash (A \longrightarrow B) \longrightarrow \big((B \longrightarrow C) \longrightarrow (A \longrightarrow C)\big).$$

Efectuăm substituția $S_{A,B,C}^{\forall x F(x), F(y), G(y)}$ în ultima formulă și obținem

$$\vdash \big(\forall x F(x) \longrightarrow F(y)\big) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \big[\big(F(y) \longrightarrow G(y)\big) \longrightarrow \big(\forall x F(x) \longrightarrow G(y)\big)\big].$$

În ultima, formulă ipoteza $\forall x F(x) \longrightarrow F(y)$ reprezintă axioma (V.1). Prin urmare, putem aplica regula M.P. și vom obține

$$\vdash \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big) \longrightarrow \big(\forall x F(x) \longrightarrow G(y)\big).$$

Deci, ultima formulă fiind deductibilă, poate fi dedusă din orice formulă, în particularб din (3.3), adică avem

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \big(\forall x F(x) \longrightarrow G(y)\big). \qquad (3.5)$$

În continuare aplicăm regula M.P. la relațiile (3.4) și (3.5), pentru a obține în final

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash \forall x F(x) \longrightarrow G(y).$$

Deoarece $y \notin \forall x F(x)$, putem aplica prima regulă de legare cu cuantificatori și apoi înlocuim variabila legată y prin x, obținem relația

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash \forall x F(x) \longrightarrow \forall x G(x).$$

Aplicând la ultima relație teorema deducției, obținem formula căutată. □

Teorema 3.7.5. $\vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \rightarrow \big(\exists x F(x) \longrightarrow \exists x G(x)\big)$.

Demonstrație. Vom demonstra că consecința din partea dreaptă a implicației se deduce din ipoteza din partea stângă a implicației date. Pentru aceasta efectuăm substituția $S_{F(x)}^{F(x)\longrightarrow G(x)}(\mathrm{V}.1)$ și obținem ca rezultat

$$\vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \longrightarrow \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big).$$

Prin urmare ultima formulă, care este deductibilă, poate fi dedusă din orice formulă și în particular avem

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \longrightarrow \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big).$$

Cu ajutorul regulii M.P. obținem

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash F(y) \longrightarrow G(y). \qquad (3.6)$$

Dacă efectuăm substituția $S_{F(x)}^{G(x)}(\mathrm{V}.2)$, obținem

$$\vdash G(y) \longrightarrow \exists x G(x).$$

Deoarece ultima formulă este deductibilă, atunci ea poate fi dedusă din orice formulă, ceea ce ne permite să obținem

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash G(y) \longrightarrow \exists x G(x). \qquad (3.7)$$

Aplicăm în continuare regula silogismului (R.S.) relațiilor (3.6) și (3.7) și vom avea

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash F(y) \longrightarrow \exists x G(x).$$

În ultima formulă $y \notin \exists x G(x)$, deci putem aplica ulterior a doua regulă de legare cu cuantificatori, apoi efectuăm un schimb de variabile, după care obținem relația

$$\forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \vdash \exists x F(x) \longrightarrow \exists x G(x).$$

În virtutea teoremei de deducție, în final avem

$$\vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(x)\big) \longrightarrow \big(\exists x F(x) \longrightarrow \exists x G(x)\big).$$

Teorema este demonstrată. □

Teorema 3.7.6. $\vdash \forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \rightarrow \big(\forall x F(x) \sim \forall x G(x)\big).$

Demonstrație. Efectuăm substituția $S_{F(x)}^{F(x)\sim G(x)}(\mathrm{V}.1)$ și obținem

$$\vdash \forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \longrightarrow \big(F(y) \sim G(y)\big).$$

De aici urmează relația

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash F(y) \sim G(y),$$

care poate fi scrisă astfel:

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big)\&\big(G(y) \longrightarrow F(y)\big). \quad (3.8)$$

Din axiomele (II.1) și (II.2) obținem

$$\vdash \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big)\&\big(G(y) \longrightarrow F(y)\big) \longrightarrow \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big). \quad (3.9)$$

$$\vdash \big(F(y) \longrightarrow G(y)\big)\&\big(G(y) \longrightarrow F(y)\big) \longrightarrow \big(G(y) \longrightarrow F(y)\big). \quad (3.10)$$

Aplicăm R.S. la relația (3.8) și la formula (3.9) pentru a obține o nouă relație

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash F(y) \longrightarrow G(y). \tag{3.11}$$

În mod analog, aplicăm R.S. la relația (3.8) și la formula (3.10) pentru a obține

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash G(y) \longrightarrow F(y). \tag{3.12}$$

Din axioma (V.1) și relația (3.11) în baza R.S. obținem

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash \forall x F(x) \longrightarrow G(y).$$

Deoarece $y \notin \forall x F(x)$, putem aplica prima regulă de legare cu cuantificatori și obținem după un schimb de variabile

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash \forall x F(x) \longrightarrow \forall x G(x).$$

În mod analog se demonstrează și relația

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash \forall x G(x) \longrightarrow \forall x F(x).$$

Utilizând în ultimele două relații regula de conjuncție a formulelor R.C.F., avem

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash \big(\forall x F(x) \longrightarrow \forall x G(x)\big) \& \big(\forall x G(x) \longrightarrow \forall x F(x)\big).$$

Amintim că $A \sim B = (A \longrightarrow B) \& (B \longrightarrow A)$ și atunci ultima relație poate fi scrisă în forma

$$\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash \forall x F(x) \sim \forall x G(x).$$

Aplicând în continuare teorema deducției obținem ceea ce trebuia de demonstrat. □

Teorema 3.7.7. $\vdash \exists x F(x) \sim \overline{\forall x \overline{F(x)}}$.

Demonstrație. Efectuăm substituțiile și obținem următoarele formule deductibile

$$S_{F(x)}^{\overline{F(x)}}(\mathrm{V.1}) \vdash \forall x \overline{F(x)} \longrightarrow \overline{F(y)},$$

$$S_{A,B}^{\forall x\overline{F(x)},\overline{F(y)}}(\mathrm{IV.3}) \vdash \left(\forall x\overline{F(x)} \longrightarrow \overline{F(y)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\overline{F(y)}} \longrightarrow \overline{\forall x\overline{F(x)}}\right).$$

La ultimele două formule aplicăm regula M.P. și obținem

$$\vdash \overline{\overline{F(y)}} \longrightarrow \overline{\forall x\overline{F(x)}}.$$

Este evidentă relația

$$S_{A}^{F(y)}(\mathrm{IV.1}) \vdash F(y) \longrightarrow \overline{\overline{F(y)}}.$$

Aplicăm ultimelor două formule R.S. și vom avea

$$\vdash F(y) \longrightarrow \overline{\forall x\overline{F(x)}}.$$

Se observă că $y \notin \overline{\forall x\overline{F(x)}}$ și putem aplica a doua regulă de legare cu cuantificatori. Apoi efectuăm un schimb de variabile și obținem

$$\vdash \exists x F(x) \longrightarrow \overline{\forall x\overline{F(x)}}. \tag{3.13}$$

Vom deduce în continuare implicația inversă. Pentru aceasta aplicăm axiomei (V.2) $F(y) \longrightarrow \exists x F(x)$ regula de inversiune (R.I.) și obținem

$$\vdash \overline{\exists x F(x)} \longrightarrow \overline{F(y)}.$$

Variabila $y \notin \overline{\exists x F(x)}$ și putem aplica prima regulă de legare cu cuantificatori și apoi efectuăm un schimb de variabile:

$$\vdash \overline{\exists x F(x)} \longrightarrow \forall x\overline{F(x)}.$$

Aplicăm la ultima formulă R.I. și obținem

$$\vdash \overline{\forall x\overline{F(x)}} \longrightarrow \overline{\overline{\exists x F(x)}}.$$

Din axioma (IV.2) obținem

$$S_{A}^{\exists x F(x)}(\mathrm{IV.2}) \vdash \overline{\overline{\exists x F(x)}} \longrightarrow \exists x F(x).$$

Din ultimele două formule, aplicând R.S., avem

$$\vdash \overline{\forall x\overline{F(x)}} \longrightarrow \exists x F(x).$$

Aplicăm ultimei formule și formulei (3.13) R.C.F. și în rezultat obținem

$$\vdash \exists x F(x) \sim \overline{\forall x \overline{F(x)}}. \qquad \square$$

Teorema 3.7.8. $\vdash \exists x \overline{F(x)} \sim \overline{\forall x F(x)}$.

Demonstrație. Considerăm relația adevărată

$$\vdash \ F(x) \sim \overline{\overline{F(x)}},$$

care se obține din axiomele (IV.1) și (IV.2) în baza R.C.F. Deoarece variabila x este liberă în ultima formulă, putem aplica regula de generalizare R.G., de unde obținem

$$\vdash \forall x \big(F(x) \sim \overline{\overline{F(x)}}\big). \tag{3.14}$$

În virtutea Teoremei 3.7.6, avem

$$\vdash \forall x \big(F(x) \sim G(x)\big) \to \big(\forall x F(x) \sim \forall x G(x)\big).$$

În ultima formulă efectuăm substituția $S_{G(x)}^{\overline{\overline{F(x)}}}$ și obținem

$$\vdash \forall x \big(F(x) \sim \overline{\overline{F(x)}}\big) \to \big(\forall x F(x) \sim \forall x \overline{\overline{F(x)}}\big).$$

Ipoteza din această formulă coincide cu formula deductibilă (3.14), ceea ce ne permite să aplicăm regula M.P., după care obținem

$$\vdash \forall x F(x) \sim \forall x \overline{\overline{F(x)}}.$$

Vom analiza separat ambele implicații ce se conțin în ultima formulă

$$\vdash \forall x F(x) \to \forall x \overline{\overline{F(x)}} \text{ și } \vdash \forall x \overline{\overline{F(x)}} \to \forall x F(x).$$

Aplicăm regula inversării R.I. pentru aceste două formule și apoi le unim prin regula de conjuncție a formulelor R.C.F., în rezultat vom avea

$$\vdash \overline{\forall x \overline{\overline{F(x)}}} \sim \overline{\forall x F(x)}.$$

La formula din Teorema 3.7.7 efectuăm substituția $S_{F(x)}^{\overline{F(x)}}$ și obținem

$$\vdash \exists x\overline{F(x)} \sim \overline{\forall x\overline{\overline{F(x)}}}.$$

Aplicăm ultimelor două formule regula tranzitivității echivalenței

$$\frac{U \sim V, V \sim C}{U \sim C}$$

și în final obținem formula căutată

$$\vdash \exists x\overline{F(x)} \sim \overline{\forall xF(x)}. \qquad \square$$

Remarca 3.7.2. *Deductibilitatea formulelor* $\vdash \overline{\exists xF(x)} \sim \forall x\overline{F(x)}$ *și* $\vdash \overline{\exists x\overline{F(x)}} \sim \forall xF(x)$ *se demonstrează ușor cu ajutorul regulii de inversare a implicației folosind formulele deductibile din Teoremele* 3.7.7 *și* 3.7.8.

Teorema 3.7.9. $\vdash \big(A \to \forall xF(x)\big) \sim \forall x\big(A \to F(x)\big)$, *unde* $x \notin A$.

Demonstrație. Pentru început vom demonstra

$$\vdash \big(A \to \forall xF(x)\big) \to \forall x\big(A \to F(x)\big) \tag{3.15}$$

Într-adevăr, au loc următoarele relații:

$$\big(A \to \forall xF(x)\big)\&A \vdash A \text{ și}$$

$$\big(A \to \forall xF(x)\big)\&A \vdash A \to \forall xF(x).$$

Aplicăm acestor relații regula M.P. și obținem

$$\big(A \to \forall xF(x)\big)\&A \vdash \forall xF(x).$$

Din axioma (V.1) poate fi dedusă formula

$$\big(A \to \forall xF(x)\big)\&A \vdash \forall xF(x) \to F(y).$$

La ultimele două relații aplicăm regula M.P., după care obținem

$$\big(A \to \forall x F(x)\big) \& A \vdash F(y).$$

Putem aplica în continuare teorema deducției, considerând lista de formule $\Gamma = \emptyset$, de unde avem

$$\vdash \big[\big(A \to \forall x F(x)\big) \& A\big] \to F(y).$$

Dacă aplicăm la ultima relație regula de despărțire a ipotezelor (R.D.I.), vom obține

$$\vdash \big(A \to \forall x F(x)\big) \to \big(A \to F(y)\big).$$

Deoarece $y \notin A \to \forall x F(x)$, putem aplica prima regula de legare cu cuantificatori și obținem:

$$\vdash \big(A \to \forall x F(x)\big) \to \forall y \big(A \to F(y)\big).$$

Efectuăm în continuare un schimb de variabile și obținem în rezultat implicația vizată (3.15).

Pentru a demonstra implicația inversă efectuăm substituția $S_{F(x)}^{A \to F(x)}(\mathrm{V}.1)$, de unde obținem

$$\vdash \forall x \big(A \to F(x)\big) \to \big(A \to F(y)\big).$$

La această formulă aplicăm teorema inversă a deducției pentru a obține relația

$$\forall x \big(A \to F(x)\big) \vdash A \to F(y).$$

Deoarece $y \notin A$, putem aplica prima regulă de legare cu cuantificatori, după care efectuăm un schimb de variabile pentru a transforma ultima relație în

$$\forall x \big(A \to F(x)\big) \vdash A \to \forall x F(x).$$

În virtutea teoremei deducției, putem conchide

$$\vdash \forall x \big(A \to F(x)\big) \to \big(A \to \forall x F(x)\big). \tag{3.16}$$

Pentru a finisa demonstrația teoremei, rămâne să aplicăm la formulele (3.15) și (3.16) regula conjuncției formulelor. □

3.8 Formule echivalente. Forma redusă a formulelor

Făcând analogie cu calculul propozițiilor, vom spune că formulele U și V sunt echivalente în calculul predicatelor dacă în acest calcul poate fi dedusă formula

$$\vdash U \sim V$$

Relația de echivalență este simetrică și tranzitivă, adică au loc relațiile

$$\frac{U \sim V}{V \sim U}, \frac{U \sim V, V \sim C}{U \sim C}$$

Remarca 3.8.1. *Dacă în formula din calculul predicatelor U substituim orice subformulă a ei cu una echivalentă cu subformula dată și dacă în rezultat obținem o nouă formulă U', care conține toate variabilele libere din U, atunci formulele U și U' sunt echivalente.*

Echivalența formulelor $A \to B$ și $\bar{A} \vee B$, care este adevărată în calculul propozițiilor, are loc și în calculul predicatelor, adică pentru orice formule U și V din calculul predicatelor este deductibilă următoarea formulă

$$\vdash (U \to V) \sim (\overline{U} \vee V).$$

Demonstrația acestei formule în calculul predicatelor se obține din formula respectivă din calculul propozițiilor, în care sunt efectuate substituțiile de rigoare ale formulelor calculului propozițiilor cu formulele respective din calculul predicatelor.

Prin urmare, din orice formulă a calculului predicatelor pot fi excluse implicațiile de forma $U \to V$, ele fiind înlocuite cu formule echivalente de forma $\overline{U} \vee V$. În urma acestei înlocuiri obținem o formulă echivalentă cu formula inițială. În plus, pentru orice formulă care nu conține simbolul implicației $\to$ putem găsi o formulă echivalentă acesteia, în care simbolurile negației sunt atribuite doar la simbolurile atomare.

Într-adevăr, dacă o formulă arbitrara are forma $\overline{\forall x U(x)}$ (respectiv $\overline{\exists x U(x)}$), atunci formula $\exists x \overline{U(x)}$ (respectiv $\forall x \overline{U(x)}$) este echivalentă cu formula inițială. Astfel, putem schimba oricând simbolul negației, care se referă la cuantificatori cu un nou simbol de negație ce se va atribui la o nouă subformulă fără cuantificatori (introducând simbolul negației în domeniul de incidență al cuantificatorului dat). În urma acestui procedeu fiecare cuantificator de sub simbolul negației va trece într-un nou cuantificator care este dual cu cuantificatorul inițial.

În calculul propozițiilor a fost demonstrat că au loc următoarele echivalențe ce rezultă din regulile lui De Morgan:

$$\vdash \overline{U \& V} \sim (\bar{U} \vee \bar{V}),$$

$$\vdash \overline{U \vee V} \sim (\bar{U} \& \bar{V}).$$

Din axiomele (IV.1) și (IV.2) aplicând R.C.F. obținem formula deductibilă în calculul propozițiilor

$$\vdash \bar{\bar{U}} \sim U.$$

Astfel, din cele menționate mai sus reiese că simbolul negație ce se atribuie unei conjuncții poate fi introdus în interiorul formulei, schimbând conjuncția prin disjuncție. În cazul în care simbolul negației se atribuie unei disjuncții, atunci disjuncția se transformă în conjuncție, iar simbolul negației este atribuit la fiecare membru al acesteia. Dacă simbolul negației se atribuie unei alte negații, atunci ambele negații dispar.

Prin urmare, astfel putem deplasa simbolul negației în interiorul formulei, în rezultatul căreia formula dată se transformă într-o formulă echivalentă, în care simbolul negației se atribuie doar la formule elementare.

Amintim că formulele care nu conțin simbolul implicației, iar simbolul negației se atribuie doar formulelor elementare, se numesc *formule reduse*.

Exemplul 3.8.1. Vom cerceta procesul de transformare a formulei $\overline{\exists x\big(F(x) \rightarrow G(x)\big)}$ în forma sa redusă. Pentru început vom exclude simbolul implicației, după care obținem formula

$$\overline{\exists x\left(\overline{F(x)} \vee G(x)\right)}.$$

Apoi introducem simbolul negației în domeniul de incidență al cuantificatorului, schimbând cuantificatorul prin dualul său și obținem

$$\forall x\overline{\overline{F(x)} \vee G(x)}.$$

În continuare introducem simbolul negației în interiorul formulei $\overline{F(x)} \vee G(x)$, transformând disjuncția în conjuncție și vom avea

$$\forall x\big(\overline{\overline{F(x)}}\&\overline{G(x)}\big).$$

În final eliminăm dubla negație pentru a obține formula redusă

$$\forall x\big(F(x)\&\overline{G(x)}\big),$$

care este forma redusă a formulei inițiale $\overline{\exists x\big(F(x) \rightarrow G(x)\big)}$.

Echivalențele ce exprimă regulile comutative și asociative ale conjuncției și disjuncției, precum și regula distributivă a conjuncției în raport cu disjuncția și viceversa din calculul propozițiilor, sunt adevărate și în calculul predicatelor:

$$\vdash (A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C),$$

$$\vdash (A \vee B) \sim (B \vee A),$$

$$\vdash (A\&B)\&C \sim A\&(B\&C),$$

$$\vdash (A\&B) \sim (B\&A),$$

$$\vdash A\&(A \vee B) \sim A\&B \vee A\&C,$$

$$\vdash A \vee (A\&B) \sim (A \vee B)\&(A \vee C).$$

Aplicând aceste reguli, putem exclude parantezele din expresiile în care figurează numai simbolul conjuncției & sau numai simbolul disjuncției $\vee$.

De exemplu, au loc următoarele echivalențe:

$$\vdash (U\&V)\&C \sim U\&V\&C,$$

$$\vdash [U \vee (V \vee C)] \vee (C \vee \overline{U}) \sim U \vee V \vee C \vee C \vee \overline{U}.$$

3.9 Formule duale. Principiul dualității

Pentru formulele care nu conțin simbolul implicației $\rightarrow$ vom introduce noțiunea de *formule duale*.

Cuantificatorii $\forall$ și $\exists$ se numesc duali unul altuia. În calculul propozițiilor am arătat că duala conjuncției este disjuncția și viceversa, adică conectorii logici (operații logice) $\&$ și $\vee$ sunt duali unul altuia, iar duala negației coincide cu ea însăși.

Definiție 3.9.1. *Vom spune că formula V este duala formulei U, dacă ea poate fi obținută din U prin substituirea fiecărui simbol $\&$, $\vee$, $\forall$ și $\exists$ cu dualul respectiv. Vom nota formula duală formulei U prin U^*.*

Din definiția dată rezultă că noțiunea de dualitate este simetrică, adică dacă V este duala formulei U, atunci U este duala formulei V.

De exemplu, dacă

$$U(x,y) = \forall x\left(A \vee \left(G(x,y)\&F(x)\&F(y)\right) \vee \overline{F(x)}\right),$$

atunci vom avea

$$U^*(x,y) = \exists x\left(A\&\left(G(x,y) \vee F(x) \vee F(y)\right)\&\overline{F(x)}\right).$$

Vom prezenta în continuare definiția inductivă pentru formule duale, pe care o vom utiliza în procesul ulterior de demonstrare.

Definiție inductivă a formulelor duale

1) Pentru orice formulă elementară, duala ei coincide cu ea însăși.

2) Daca U^* este duala formulei U, iar V^* este duala formulei V, atunci pentru formula $U\&V$ duala este $U^* \vee V^*$, iar pentru formula $U \vee V$ duala este $U^*\&V^*$.

3) Dacă U^* este duala formalei U, atunci pentru formula $\overline{U}$ duala este $\overline{U^*}$.

4) Dacă $U^*(x)$ este duala formulei $U(x)$, atunci pentru formula $\forall x U(x)$ (respectiv $\exists x U(x)$) duala este $\exists x U^*(x)$ (respectiv $\forall x U^*(x)$).

Din această definiție se poate demonstra prin inducție matematică că relația de dualitate este simetrică.

Lema 3.9.1. *Dacă $U(A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)$ este o formulă din calculul predicatelor, ce nu conține implicația $\rightarrow$, în care A_1, $A_2, \ldots, A_n$ sunt toate propozițiile elementare și $F_1, F_2, \ldots, F_m$ – toate predicatele elementare din formula U, atunci are loc relația:*

$$\vdash \overline{U(A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)} \sim U^*(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m).$$

Demonstrație. Von demonstra teorema prin metoda inducției matematice în conformitate cu definiția inductivă a formulelor duale.

Pentru formulele elementare, care reprezintă o propoziție sau un predicat simplu, lema este adevărată, deoarece în acest caz duala formulei coincide cu ea însăși. Fie că lema este adevărată pentru formulele

$$U(A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m) \text{ și}$$
$$V\big(B_1, B_2, \ldots, B_p, G_1, G_2, \ldots, G_q\big),$$

adică avem

$$\vdash \overline{U(A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)} \sim$$
$$\sim U^*(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m) \qquad (3.17)$$

și

$$\vdash \overline{V\big(B_1, B_2, \ldots, B_p, G_1, G_2, \ldots, G_g\big)} \sim$$
$$\sim V^*\big(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_p, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \ldots, G_q\big). \qquad (3.18)$$

Vom demonstra că lema este adevărată și pentru conjuncția $U \& V$. Într-adevăr, după regula De Morgan avem

$$\vdash \overline{U\&V} \sim (\bar{U} \vee \bar{V}).$$

Substituind formulele $\bar{U}$ și $\bar{V}$ prin echivalentele lor din (3.17) și (3.18), obținem

$$\vdash \overline{U\&V} \sim U^*(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m) \vee$$
$$\vee\, V^*\big(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_p, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \ldots, G_q\big).$$

În virtutea definiției formulelor duale, formula din partea dreaptă a echivalenței poate fi reprezentată în forma:

$$[U(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m)\&$$
$$\&V\big(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_p, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \ldots, G_q\big)]^*$$

Astfel, obținem

$$\vdash \overline{U\&V} \sim [U(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m)\&$$
$$\&V\big(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \ldots, \bar{B}_p, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \ldots, G_q\big)]^*,$$

ceea ce confirmă că lema este adevărată pentru conjuncția $U\&V$.

Veridicitatea lemei pentru disjuncție se demonstrează în mod analog.

Vom demonstra în continuare că lema este adevărată pentru negația $\bar{U}$.

Fie că pentru formula $U(A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)$ lema este adevărată, adică este deductibilă formula (3.17). Amintim că dacă două formule sunt echivalente, atunci și negațiile lor sunt la fel echivalente. Prin urmare, din echivalența formulelor (3.17) vom obține

$$\vdash \overline{\overline{U(A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)}} \sim$$
$$\sim \overline{U^*(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m)}.$$

Din definiția formulelor duale, $\overline{U^*}$ este $\bar{U}^*$. Astfel, din ultima echivalență vom avea

$$\vdash \overline{\overline{U(A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)}} \sim$$
$$\sim \left[\overline{U(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m)}\right]^*,$$

ceea ce confirmă că lema este adevărată și pentru negația $\overline{U}$.

Rămâne să demonstrăm că lema are loc și pentru formulele $\forall x U(x)$ și $\exists x U(x)$. Fie că lema este adevărată pentru formula $U(x, A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)$, unde x este variabilă liberă.

În virtutea presupunerii inducției, avem

$$\vdash \overline{U(x, A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)} \sim$$
$$\sim U^*(x, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m).$$

Deoarece x este variabilă liberă, în ultima echivalență putem alătura cuantificatorul de existență $\exists x$ și obținem

$$\vdash \exists x \overline{U(x, A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)} \sim$$
$$\sim \exists x U^*(x, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m). \qquad (3.19)$$

În virtutea Teoremei 3.7.8, avem

$$\vdash \exists x \overline{U(x)} \sim \overline{\forall x U(x)}.$$

Astfel, obținem

$$\vdash \exists x \overline{U(x, A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)} \sim$$
$$\sim \overline{\forall x U(x, A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)}. \qquad (3.20)$$

Deoarece relația de echivalență este tranzitivă, din (3.19) și (3.20) obținem

$$\vdash \overline{\forall x U(x, A_1, A_2, \ldots, A_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)} \sim$$
$$\sim \exists x U^*(x, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m).$$

Din definiția formulelor duale, partea dreaptă din ultima echivalență reprezintă formula

$$[\forall x U(x, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m)]^*.$$

Prin urmare, în final avem

$$\vdash \overline{\forall x U(x, A_1, A_2, \dots, A_n, F_1, F_2, \dots, F_m)} \sim$$
$$\sim [\forall x U(x, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m)]^*,$$

ceea ce confirmă că lema este adevărată și pentru formula $\forall x U(x)$. În cazul formulei $\exists x\, U(x)$, lema se demonstrează în mod analog □

Teorema 3.9.2. (Principiul dualității) *Dacă formulele U și V sunt echivalente, atunci și dualele lor sunt echivalente.*

Demonstrație. Fie formulele echivalente

$$U(A_1, A_2, \dots, A_n, F_1, F_2, \dots, F_m) \text{ și}$$
$$V\big(B_1, B_2, \dots, B_p, G_1, G_2, \dots, G_q\big),$$

unde $A_1, A_2, \dots, A_n$, $B_1, B_2, \dots, B_p$ sunt toate propozițiile variabile din aceste formule, iar $F_1, F_2, \dots, F_m, G_1, G_2, \dots, G_g$ – predicate variabile din ele.

Dacă aceste două formule sunt echivalente, atunci și negațiile lor sunt echivalente, i.e.

$$\vdash \overline{U(A_1, A_2, \dots, A_n, F_1, F_2, \dots, F_m)} \sim$$
$$\sim \overline{V\big(B_1, B_2, \dots, B_p, G_1, G_2, \dots, G_q\big)}. \qquad (3.21)$$

Ținând cont de lema precedentă, avem

$$\vdash \overline{U(A_1, A_2, \dots, A_n, F_1, F_2, \dots, F_m)} \sim$$
$$\sim U^*(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m)$$

și, respectiv,

$$\vdash \overline{V\big(B_1, B_2, \dots, B_p, G_1, G_2, \dots, G_q\big)} \sim$$
$$\sim V^*\big(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_p, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, G_q\big).$$

Substituind ambele părți ale formulei (3.21) cu formulele echivalente, obținem

$$\vdash U^*(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_m) \sim$$

$$\sim V^*\left(\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_p, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, G_q\right).$$

În ultima echivalență efectuăm substituția

$$S_{A_i, B_j, F_k, G_r}^{\bar{A}_i, \bar{B}_j, \bar{F}_k, \bar{G}_r} (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p}, k = \overline{1, m}, r = \overline{1, q})$$

pentru a obține

$$\vdash U^*\left(\bar{\bar{A}}_1, \bar{\bar{A}}_2, \dots, \bar{\bar{A}}_n, \bar{\bar{F}}_1, \bar{\bar{F}}_2, \dots, \bar{\bar{F}}_m\right) \sim$$

$$\sim V^*\left(\bar{\bar{B}}_1, \bar{\bar{B}}_2, \dots, \bar{\bar{B}}_p, \bar{\bar{G}}_1, \bar{\bar{G}}_2, \dots, \bar{\bar{G}}_q\right).$$

Deoarece pentru orice formulă C avem $C \sim \bar{\bar{C}}$, din ultima echivalență putem exclude negațiile duble și obținem

$$\vdash U^*(A_1, A_2, \dots, A_n, F_1, F_2, \dots, F_m) \sim$$

$$\sim V^*\left(B_1, B_2, \dots, B_p, G_1, G_2, \dots, G_q\right).$$

Teorema este demonstrată □

Fiind aplicat principiul dualității la formulele deductibile cunoscute, putem obține noi formule deductibile. Altfel spus, principiul dualității, precum teorema deducției, facilitează deducerea unor noi formule și joacă un rol semnificativ în procesul de deducție a unor formule importante.

De exemplu, am demonstrat anterior că este deductibilă formula

$$\vdash \forall x \forall y F(x, y) \sim \forall y \forall x F(x, y).$$

Dacă aplicăm la această formulă principiul dualității, obținem o nouă formulă deductibilă $\vdash \exists x \exists y F(x, y) \sim \exists y \exists x F(x, y)$.

Din ultimele două echivalențe putem deduce regula:

Remarca 3.9.1. *Dacă schimbăm cu locurile cuantificatorii consecutivi de același tip, atunci obținem în rezultat o formulă echivalentă cu cea inițială.*

3.10 Formule normale și forme normale

Definiție 3.10.1. *Formula redusă se numește* ***normală*** *dacă în consecutivitatea de simboluri care alcătuiesc formula dată cuantificatorii precedează tuturor celorlalte simboluri logice. Cu alte cuvinte, formula normală are forma*

$$\vdash Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_nF(x_1,x_1,\ldots,x_n),$$

unde $Q_1x_1,Q_2x_2,\ldots,Q_nx_n$ *sunt cuantificatori arbitrari, iar formula* $F(x_1,x_1,\ldots,x_n)$ *este în forma sa redusă și nu conține cuantificatori.*

Teorema 3.10.1. *Pentru orice formulă există echivalenta sa formulă normală.*

Această teoremă poate fi ușor demonstrată cu ajutorul următoarelor două leme.

Lema 3.10.1. $\vdash \forall x\big(A\vee F(x)\big)\sim\big(A\vee\forall xF(x)\big)$, *unde* $x\notin A$.

Demonstrație. Anterior, în Teorema 3.7.9 am demonstrat că poate fi dedusă formula

$$\vdash \forall x\big(A\to F(x)\big)\sim\big(A\to\forall xF(x)\big),\ x\notin A.$$

Considerând echivalența $U\to V\sim\overline{U}\vee V$, putem înlocui implicațiile de mai sus prin echivalentele lor și obținem

$$\vdash \forall x\big(\bar{A}\vee F(x)\big)\sim\big(\bar{A}\vee\forall xF(x)\big),\ x\notin A.$$

În ultima formulă substituim A prin $\bar{A}$ și avem

$$\vdash \forall x\big(\bar{\bar{A}}\vee F(x)\big)\sim\big(\bar{\bar{A}}\vee\forall xF(x)\big),\ x\notin A.$$

Având în vedere că $\vdash A\sim\bar{\bar{A}}$, obținem

$$\vdash \forall x\big(A\vee F(x)\big)\sim\big(A\vee\forall xF(x)\big),\ x\notin A.$$

Lema este demonstrată □

Lema 3.10.2. $\vdash \forall x\big(A\&F(x)\big)\sim\big(A\&\forall xF(x)\big)$, *unde* $x\notin A$.

Demonstrație. Pentru început vom demonstra că poate fi dedusă formula

$$\vdash \forall x\big(A\&F(x)\big) \to \big(A\&\forall xF(x)\big) \tag{3.22}$$

Vom arăta că consecința $A\&\forall xF(x)$ este deductibilă din ipoteza $\forall x\big(A\&F(x)\big)$.

Deoarece are loc relația

$$\{\forall xF(x), A\} \vdash A\&\forall xF(x),$$

aplicând de două ori teorema deducției, obținem

$$\vdash \forall xF(x) \to \big(A \to A\&\forall xF(x)\big).$$

Ultima formulă fiind deductibilă, ea poate fi dedusă din orice altă formulă. În particular, vom avea

$$\forall x\big(A\&F(x)\big) \vdash \forall xF(x) \to \big(A \to A\&\forall xF(x)\big). \tag{3.23}$$

Din axioma (V.1), dacă aplicăm substituția $S_{F(x)}^{A\&F(x)}$ și apoi teorema inversă a deducției, obținem

$$A\&\forall xF(x) \vdash A\&F(y).$$

Aplicăm în continuare R.D.F., apoi R.G. și obținem

$$A\&F(y) \vdash A, \forall yF(y).$$

În final aplicăm R.C.F. și redenumim variabila de legătură y prin x

$$\forall x\big(A\&F(x)\big) \vdash A\&\forall xF(x).$$

Dacă aplicăm teorema deducției, obținem deductibilitatea formulei (3.22).

Pentru a demonstra deductibilitatea implicației inverse vom arăta inițial că are loc relația

$$A\&\forall xF(x) \vdash \forall x\big(A\&F(x)\big).$$

Într-adevăr, din axioma (V.1) și R.C.F. avem

$$A\&\forall xF(x) \vdash A\&F(y). \qquad (3.24)$$

Efectuăm substituția $S_{A,B}^{A\&F(y),A}(\mathrm{I}.1)$ și obținem

$$\vdash A\&F(y) \to (A \to A\&F(y)).$$

Prin urmare, ultima formulă, care este deductibilă, poate fi dedusă din orice formulă și în particular avem

$$A\&\forall xF(x) \vdash A\&F(y) \to (A \to A\&F(y)).$$

Aplicăm la relația (3.24) și la ultima relație regula M.P. pentru a obține

$$A\&\forall xF(x) \vdash A \to A\&F(y).$$

Deoarece $y \notin A$, putem aplica prima regulă de legare cu cuantificatori și după redenumirea variabilelor obținem

$$A\&\forall xF(x) \vdash A \to \forall x\big(A\&F(x)\big).$$

Aplicăm regula R.D.F și avem

$$A\&\forall xF(x) \vdash A, \forall xF(x).$$

La ultimele două relații aplicăm regula M.P. și excludem ipoteza A, adică

$$A\&\forall xF(x) \vdash \forall x\big(A\&F(x)\big).$$

În continuare aplicăm teorema deducției și vom avea

$$\vdash \big(A\&\forall xF(x)\big) \to \forall x\big(A\&F(x)\big).$$

Afirmația lemei derivă din ultima formulă și din formula (3.21), la care aplicăm regula R.C.F. □

Din Lemele 3.10.1 și 3.10.2 în baza principiului dualității rezultă următoarele leme.

Lema 3.10.3. $\vdash \exists x\big(A\&F(x)\big) \sim \big(A\&\exists xF(x)\big),\ x \notin A.$

Lema 3.10.4. $\vdash \exists x\big(A \vee F(x)\big) \sim \big(A \vee \exists xF(x)\big),\ x \notin A.$

Pot fi demonstrate și următoarele leme.

Lema 3.10.5. $\vdash \big(\forall x U(x) \& \forall x V(x)\big) \to \forall x\big(U(x) \& V(x)\big)$.

Lema 3.10.6. $\vdash \big(\forall x U(x) \vee \forall x V(x)\big) \sim \forall x\big(U(x) \vee V(x)\big)$.

Din ultimele leme în baza principiului dualității obținem încă două leme.

Lema 3.10.7. $\vdash \exists x\big(U(x) \& V(x)\big) \to \big(\exists x U(x) \& \exists x V(x)\big)$.

Lema 3.10.8. $\vdash \exists x\big(U(x) \vee V(x)\big) \sim \big(\exists x U(x) \vee \exists x V(x)\big)$.

Din aceste leme se observă că cuantificatorii respectivi pot fi separați în afară parantezelor. Efectuând acest procedeu pas cu pas, vom ajunge la etapa finală când toți cuantificatorii se vor plasa în fața formulei date, adică ei vor preceda tuturor legăturilor logice.

Amintim că formula echivalentă cu formula dată, în care toți cuantificatorii sunt plasați în fața formulei, se numește formă normală a formulei și se spune că formula a fost transformată în forma sa normală.

3.11 Formule deductiv echivalente

Vom introduce în continuare noțiunea de *formule deductiv echivalente*.

Definiția 3.11.1. *Formulele U și V se numesc* ***deductiv echivalente*** *în calculul predicatelor, dacă din axiomele acestui calcul și din formula U, în baza regulilor de deducție, poate fi dedusă formula V și, viceversa, din axiomele date și din formula V, în baza regulilor de deducție, poate fi dedusă formula U.*

Prin urmare, formulele U și V sunt deductiv echivalente dacă sunt satisfăcute următoarele două relații:

$$U \vdash V \text{ și } V \vdash V.$$

Pentru calculul predicatelor noțiunile *formule echivalente* și *formule deductiv echivalente* nu coincid.

Teorema 3.11.1. *Dacă formulele U și V sunt echivalente în calculul predicatelor, atunci ele sunt și deductiv echivalente în acest calcul.*

Demonstrație. Fie formulele U și V sunt echivalente. Aceasta denotă că formula $U \sim V$ este deductibilă în calculul predicatelor din axiome în baza regulilor de deducție. În acest caz, deoarece $U \sim V = (U \rightarrow V) \& (V \rightarrow U)$, formula $U \rightarrow V$ la fel este deductibilă, adică

$$\vdash U \rightarrow V.$$

Dacă alăturăm la axiomele calculului predicatelor formula U, atunci din formulele U și $U \rightarrow V$, dacă aplicam regula M.P., obținem că poate fi dedusă formula U, adică vom avea

$$U \vdash V.$$

Dacă alăturam la axiomele calculului predicatelor formula V, atunci din formula deductibilă

$$\vdash V \rightarrow U$$

obținem că poate fi dedusă și formula U, adică la fel vom avea

$$V \vdash U.$$

Din cele menționate mai sus rezultă că formulele U și V sunt deductiv echivalente. □

Remarca 3.11.1. *Afirmația inversă din teorema precedentă nu este adevărată.*

Într-adevăr, considerăm două formule arbitrare A și B care sunt deductiv echivalate. Aceste formule nu sunt echivalente, deoarece formula $A \sim B$ nu este deductibilă în calculul propozițiilor și nici în calculul predicatelor.

Remarcăm că pentru calculul propozițiilor noțiunea *formule deductiv echivalente* introdusă mai sus nu prezintă interes, deoarece pentru calculul propozițiilor orice formulă sau poate fi dedusă, sau, fiind alăturată la axiomele calculului respectiv, se obține în rezultat un calcul contradictoriu. Cercetăm două formule arbitrare din calculul propozițiilor. Dacă ambele formule sunt deductibile în calculul propozițiilor, atunci ele sunt echivalente. Dacă însă una este deductibilă, iar alta nu este deductibilă, atunci ele nu pot fi deductiv echivalente, deoarece dacă alăturăm la axiome o formulă deductibilă, atunci nu putem obține noi formule deductibile și de aceea formula rămasă la fel va fi nedeductibilă. În cazul în care ambele formule sunt nedeductibile, atunci ele sunt deductiv echivalente, însă în acest caz alăturarea la axiomele calculului respectiv a uneia dintre ele duce la formarea unui sistem contradictoriu.

3.12 Formule și forme normale Skolem

Matematicianul norvegian Skolem a evidențiat o formă interesantă a formulelor, la care poate fi transformată orice formulă din calculul predicatelor.

Definiție 3.12.1. *O formulă se numește **formulă normală Skolem** dacă ea este deja o formulă normală și în ea toți cuantificatorii de existență (dacă sunt prezenți în formulă) precedează toți cuantificatorii de generalizare.*

De exemplu, formulele normale

$$\exists x \exists y \exists z \forall u \forall v F(x, y, z, u, v) \text{ și}$$

$$\forall x \forall y G(x, y)$$

sunt scrise în forma normală Skolem, dar formulele

$$\forall x \exists y P(x, y) \text{ și } \exists x \forall y \exists z Q(x, y, z)$$

nu sunt în forma normală Skolem.

Înainte de a demonstra teorema Skolem, vom demonstra preventiv următoarele leme.

Lema 3.12.1. *Formula* $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, *unde* U *este deja normală, este deductiv echivalentă cu formula* $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n [\forall y (U \to A(y)) \to \forall y A(y)]$, *unde* A *este un predicat variabil ce nu se conține în formula* U.

Demonstrație. Pentru demonstrația acestei leme vom utiliza următoarele formule deductibile, care au fost anterior demonstrate în calitate de teoreme:

$$\vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x F(x) \to \forall x G(x)), \tag{3.25}$$

$$\vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (\exists x F(x) \to \exists x G(x)). \tag{3.26}$$

Presupunem că formula

$$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \tag{3.27}$$

este alăturată în calitate de axiomă la calculul predicatelor sau este deductibilă în acest calcul.

Deoarece în calculul predicatelor are loc relația

$$\{U, U \to A(t)\} \vdash A(t),$$

atunci, având în vedere teorema deducției, obținem

$$\vdash U(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \to [(U \to A(t)) \to A(t)].$$

Din axioma (V.1) putem obține

$$\vdash \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to U(x_1, x_2, \dots, x_n, t).$$

Dacă aplicăm la ultimele două formule regula silogismului (R.S.), vom avea formula

$$\vdash \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to [(U \to A(t)) \to A(t)].$$

Deoarece $t \notin \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, putem aplica în continuare prima regulă de legare cu cuantificatori, apoi redenumim variabilele și obținem

$$\vdash \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to \forall y [(U \to A(y)) \to A(y)].$$

Apoi, în virtutea formulei (3.25), utilizând regula silogismului, avem

$$\vdash \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to \left[\forall y\big(U \to A(y)\big) \to \forall y A(y)\right].$$

Deoarece variabila x_n din ultima formulă este liberă, putem aplica R.G. și obținem în continuare

$$\vdash \forall x_n \left[\forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to \left[\forall y\big(U \to A(y)\big) \to \forall y A(y)\right]\right] \quad (3.28)$$

În formula (3.26) substituim predicatul $F(x)$ prin formula

$$\forall y U(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x, y),$$

iar predicatul $G(x)$ prin formula

$$\forall y\big(U(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x, y) \to A(y)\big) \to \forall y A(y).$$

După aceste substituții redenumim variabila liberă x prin x_n și obținem

$$\vdash \forall x_n \left[\forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to \left(\forall y\big(U \to A(y)\big) \to \forall y A(y)\right)\right] \to$$

$$\to \left[\exists x_n \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to \exists x_n \left(\forall y\big(U \to A(y)\big) \to \forall y A(y)\right)\right].$$

Ipoteza formulei date coincide cu formula deductibilă (3.28). Prin urmare, putem aplica regula M.P. și deducem consecința respectivă

$$\vdash \exists x_n \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to \exists x_n \left[\forall y\big(U \to A(y)\big) \to \forall y A(y)\right].$$

În mod analog, la ultima formulă putem aplica R.G. pentru variabila liberă x_{n-1} și o vom lega cu cuantificatorul $\forall x_{n-1}$. Apoi aplicăm formula (3.26) pentru a trece la cuantificatorul dual $\exists x_{n-1}$ și vom avea

$$\vdash \exists x_{n-1} \exists x_n \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to$$

$$\to \exists x_{n-1} \exists x_n \left[\forall y\big(U \to A(y)\big) \to \forall y A(y)\right].$$

Raționând în același mod cu variabilele libere $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_1$ și legându-le inițial cu cuantificatorul de generalizare, în baza formulei

(3.26) trecem apoi la cuantificatorul de existență pentru a obține în final formula

$$\vdash \exists x_1 \dots \exists x_n \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to$$
$$\to \exists x_1 \dots \exists x_n \big[\forall y \big(U \to A(y)\big) \to \forall y A(y)\big].$$

În ultima formulă ipoteza coincide cu formula (3.27), pe care am presupus-o deductibilă şi de aceea în baza regulii M.P. se obține că poate fi dedusă și formula

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \big[\forall y \big(U \to A(y)\big) \to \forall y A(y)\big]. \tag{3.29}$$

Prin urmare, am demonstrat ca dacă la axiomele calculului predicatelor alăturam în calitate de axiomă formula (3.27), atunci devine deductibilă și formula (3.29). Astfel, lema este demonstrată într-o direcție.

Pentru demonstrația ulterioară, admitem că formula (3.29) este alăturată în calitate de axiomă la calculul predicatelor, adică poate fi dedusă. Atunci substituim în ea predicatul elementar $A(y)$ prin formula $U(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$. Deci, obținem în sistemul nou de axiome formula deductibilă

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \big[\forall y \big(U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to U(x_1, x_2, \dots, x_n, y)\big) \to$$
$$\to \forall y U(x_1, x_2, \dots, x_n, y)]. \tag{3.30}$$

Formula

$$\big(B \to \forall y U(y)\big) \to \forall y U(y),$$

unde B este o formulă arbitrară deductibilă, este la fel formulă deductibilă, fiindcă se obține din relația

$$B \to \forall y U(y) \vdash \forall y U(y).$$

Deoarece formula $\forall y(U \to U)$ este deductibilă, atunci o putem substitui în locul formulei deductibile B și obținem

$$\vdash \big(\forall y(U \to U) \to \forall y U(y)\big) \to \forall y U(y).$$

În ultima formulă variabila liberă $x_n \in U$ poate fi legată în baza R.G. și astfel obținem

$$\vdash \forall x_n\big[\big(\forall y(U \to U) \to \forall y U(y)\big) \to \forall y U(y)\big].$$

La ultima formulă aplicăm aceleași raționamente din prima parte a demonstrației lemei date și obținem formula deductibilă

$$\vdash \exists x_n\big(\forall y(U \to U) \to \forall y U(y)\big) \to \exists x_n \forall y U(y).$$

În ultima formulă variabilele libere $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ pot fi legate în baza regulii generalizării cu cuantificatorul $\forall$, iar apoi, în baza formulei (3.26), putem trece la cuantificatorul $\exists$ după raționamentele de mai sus și vom scrie

$$\vdash \exists x_1 \dots \exists x_n\big(\forall y(U \to U) \to \forall y U(y)\big) \to \exists x_1 \dots \exists x_n \forall y U(y).$$

Ipoteza acestei formule coincide cu formula (3.30) care este deductibilă în calculul predicatelor după alăturarea la axiomele respective ale formulei (3.29). Putem aplica regula M.P. și obținem că și consecința, care coincide cu formula (3.27), este la fel deductibilă. În acest fel am demonstrat că formulele (3.27) și (3.29) sunt deductiv echivalente. □

Lema 3.12.2. *Fie că formula U are forma $Q_1 z_1 Q_2 z_2 \dots Q_m z_m C$, unde prin $Q_i z_i$ notăm cunatificatorii $\exists_i z_i$ sau $\forall z_i$, iar formula C nu conține cuantificatori. Atunci are loc relația*

$$\vdash \big[\big(U(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \to A(y)\big) \to \forall z A(z)\big] \sim$$

$$\sim Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z\big[\big(C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\big) \to$$

$$\to A(z)], \qquad (3.31)$$

unde A este un predicat variabil care nu se conține în formula U.

Demonstrație. Pentru a demonstra relația de echivalență (3.31), vom transforma pentru început partea stângă a ei. Deoarece U are forma indicată mai sus, atunci în partea stângă a echivalenței date vom avea forma

$$\big(Q_1 z_1 Q_2 z_2 \dots Q_m z_m C \to A(y)\big) \to \forall z A(z).$$

În continuare vom exclude simbolurile implicației prin transformări echivalente cunoscute:

$$\overline{\overline{Q_1 z_1 Q_2 z_2 \dots Q_m z_m C} \vee A(y)} \vee \forall z A(z).$$

Aplicând regula negației cuantificatorului, precum și regulile De Morgan, ultima formulă poate fi adusă la forma

$$\big(Q_1 z_1 Q_2 z_2 \dots Q_m z_m C \& \overline{A(y)}\big) \vee \forall z A(z).$$

Deoarece $z_1, \dots, z_m \notin A$ și $z \notin Q_1 z_1 Q_2 z_2 \dots Q_m z_m C \& \overline{A(y)}$, toți cuantificatorii din ultima formulă pot fi scoși în afara parantezelor comune și obținem

$$Q_1 z_1 Q_2 z_2 \dots Q_m z_m \forall z \big[\big(C \to A(y)\big) \to A(z)\big].$$

Ultima formulă reprezintă formula din partea dreaptă a echivalenței (3.31), pe care trebuia să o demonstrăm. Dar, deoarece am obținut-o prin transformări echivalente din partea stângă a ei, atunci această echivalență este adevărată și lema este demonstrată. □

Lema 3.12.3. *Fie că formula U are forma indicată în Lema* 3.12.2, *atunci formula*

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \big[\forall y \big(U \to A(y)\big) \to \forall z A(z)\big] \qquad (3.32)$$

este echivalentă cu formula

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \exists y Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z \big[\big(C(z_1, \dots, z_m, y) \to$$
$$\to A(y)\big) \to A(z)\big], \qquad (3.33)$$

unde A este un predicat variabil ce nu se conține în formula U.

Demonstrație. Ținând cont de Lema 3.12.2 și aplicând regula despărțirii formulelor (R.D.F), vom avea

$$\vdash \left[\left(U(x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to \forall z A(z)\right] \to$$
$$\to Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z\left[\left(C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to\right.$$
$$\left.\to A(z)\right], \tag{3.34}$$

precum și viceversa

$$\vdash Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z\left[\left(C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to A(z)\right] \to$$
$$\to \left[\left(U(x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to \forall z A(z)\right], \tag{3.35}$$

Deoarece variabila y în (3.34) este liberă, putem aplica regula R.G. pentru a obține

$$\vdash \forall y \left[\left(\left(U(x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to \forall z A(z)\right) \to\right.$$
$$\left.\to Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z \left(\left(C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to A(z)\right)\right].$$

Dacă aplicăm aici formula (3.26), în mod analog cu procedeul efectuat în Lema 3.12.1, putem obține

$$\vdash \exists y\left[\left(U(x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to \forall z A(z)\right] \to$$
$$\to \exists y Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z[(C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \to$$
$$\to A(y)) \to A(z)]. \tag{3.36}$$

Procedând în același fel cu formula inițială (3.35), ajungem la

$$\vdash \exists y Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z\left[\left(C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to\right.$$
$$\left.\to A(z)\right] \to \exists y\left[\left(U(x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to \forall z A(z)\right]. \tag{3.37}$$

Aplicăm formulelor (3.36) și (3.37) regula conjuncției formulelor (R.C.F.) și, amintindu-ne de exprimarea echivalenței $F \sim G = (F \to G) \& (G \to F)$, obținem în continuare formula

$$\vdash \exists y\left[\left(U(x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to \forall z A(z)\right] \sim$$
$$\sim \exists y Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z\left[\left(C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\right) \to A(z)\right].$$

În ultima formulă variabilele $x_1, \dots, x_n$ sunt libere, așa că în continuare putem repeta consecutiv raționamentul de mai sus pentru cuantificatorii $\exists x_n, \exists x_{n-1}, \dots, \exists x_2, \exists x_1$. Ca rezultat obținem echivalența

$$\vdash \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \exists y\big[\big(U(x_1, \dots, x_n, y) \to A(y)\big) \to \forall z A(z)\big] \sim$$
$$\sim \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \exists y Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z[(C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \to$$
$$\to A(y)\big) \to A(z)\big]. \tag{3.38}$$

Vom demonstra în continuare că are loc relația

$$\vdash \big[\forall y\big(U \to A(y)\big) \to \forall z A(z)\big] \sim \exists y\big[\big(U \to A(y)\big) \to \forall z A(z)\big]. \tag{3.39}$$

Pentru a demonstra deducția ultimei echivalențe, este suficient să obținem partea dreaptă a acesteia din partea stângă cu ajutorul transformărilor cunoscute. Pentru aceasta eliminăm din partea stângă simbolul implicației și obținem formula

$$\overline{\forall y\big(\overline{U} \vee A(y)\big)} \vee \forall z A(z)$$

Introducem în continuare simbolul negației în domeniul de incidență al cuantificatorului $\forall y$ și obținem

$$\exists y \overline{\overline{U} \vee A(y)} \vee \forall z A(z).$$

Deoarece $y \notin \forall z A(z)$, putem scoate cuantificatorul în fața parantezei comune pentru a obține

$$\exists y \left(\overline{\overline{U} \vee A(y)} \vee \forall z A(z)\right).$$

În domeniul de incidență al cuantificatorului $\exists y$ efectuam transformările inverse pentru a introduce simbolul implicației și obținem pentru partea stângă a echivalenței (3.39)

$$\exists y\big(U \to A(y)\big) \to \forall z A(z).$$

Astfel a fost demonstrată partea dreaptă a echivalenței (3.39).

Aplicăm la ultima echivalență aceleași raționamente, pe care le-am utilizat de mai multe ori și obținem formula

$$\vdash \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n [\forall y (U \to A(y)) \to \forall z A(z)] \sim$$
$$\sim \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \exists y [(U \to A(y)) \to \forall A(z)].$$

Cercetând ultima echivalență și echivalența (3.38) putem aplica regula silogismului (R.S.) pentru a obține echivalența formulelor (3.32) și (3.33), iar prin aceasta lema este demonstrată. □

3.13 Teorema Skolem

Teorema 3.13.1. *Pentru orice formulă din calculul predicatelor există echivalenta sa formulă normală Skolem.*

Demonstrație. În virtutea lemelor din paragraful precedent, rezultă că formula

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y Q_1 z_1 \dots Q_m z_m C(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_n, y) \qquad (3.40)$$

este deductiv echivalentă cu formula

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \exists y Q_1 z_1 \dots Q_m z_m \forall z [(C \to A(y)) \to A(z)], \qquad (3.41)$$

unde formula C nu mai conține cuantificatori.

Astfel, obținem că primul cuantificator de generalizare din formula (3.40) se transformă în cuantificator de existență $\exists x$ din formula deductiv echivalentă (3.41). Totodată, în formulă (3.41) mai apare un nou cuantificator de generalizare $\forall z$, care este ultimul din succesiunea de cuantificatori.

Dacă în formula (3.41) se mai întâlnesc și alți cuantificători de generalizare printre cuantificatorii $Q_i z_i$, $i = \overline{1, m}$, atunci, aplicând aceleași raționamente formulei (3.41), putem obține o nouă formulă, la care primul cuantificator de generalizare $Q_k z_k = \forall z_k$ se va transforma în cuantificator de existență $\exists z_k$ și în rezultat va apărea un nou cuantificator de generalizere, care va fi ultimul din succesiunea de cuantificantori.

Dacă formula (3.41) va avea următoarea formă

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \exists y \exists z_1 \ldots \exists z_{k-1} \forall z_k Q_{k+1} z_{k+1} \ldots Q_m z_m \forall z C_1,$$

atunci formula deductiv echivalentă acesteia va fi de forma

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \exists y \exists z_1 \ldots \exists z_{k-1} \exists z_k Q_{k+1} z_{k+1} \ldots Q_m z_m \forall z \forall z' C_2.$$

Dacă continuăm acest proces în mod analog, vom obține în final formula

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \exists y \exists z_1 \ldots \exists z_m \forall z \forall z' \forall z'' \ldots \forall z^{(p-1)} C_p, \tag{3.42}$$

care este deductiv echivalentă cu formula (3.40). În același timp, ultima formulă este formulă normală Skolem.

Teorema va fi demonstrată dacă vom arăta că fiecare formulă din calculul predicatelor este deductiv echivalentă cu o formulă de tipul (3.40).

Pentru aceasta vom considera o formulă arbitrară în forma normală

$$Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m B, \tag{3.43}$$

unde formula B nu conține cuantificatori. În particular, cuantificatorii Qz_i, $i = \overline{1,m}$, pot și să lipsească. Fie x și y două variabile care nu se conțin în formula dată. Construim următoarea formulă

$$\exists x \forall y Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m \left[B \& \left(A(x) \vee \overline{A(x)}\right) \& \left(A(y) \vee \overline{A(y)}\right)\right], \tag{3.44}$$

care este de tipul (3.40), unde A este un predicat variabil ce nu se conține în formula inițială. Deoarece variabilele $z_1, z_2, \ldots, z_m \notin A$, putem introduce cuantificatorii $\forall z_1, \forall z_2, \ldots, \forall z_m$ în interiorul parantezelor, după care obținem formula echivalentă

$$\exists x \forall y \left[Q_1 z_1 \ldots Q_m z_m B \& \left(A(x) \vee \overline{A(x)}\right) \& \left(A(y) \vee \overline{A(y)}\right)\right].$$

Se poate constata că această formulă este echivalentă cu formula (3.43), deoarece pentru orice formulă U, care nu conține variabilele x și y, are loc relația $\exists x \forall y \left[U \& \left(A(x) \vee \overline{A(x)}\right) \& \left(A(y) \vee \overline{A(y)}\right)\right] \sim U$.

Drept consecință obținem că formula arbitrară normală (3.43) este echivalentă cu formula (3.44), care este de tipul (3.40). Astfel, am demonstrat că pentru orice formulă din logica predicatelor există o formulă normală Skolem care este deductiv echivalentă cu formula inițială.

Definiție 3.13.1. *Formula normală Skolem, care este deductiv echivalentă cu formula dată U, o vom numi* ***formă normală Skolem*** *a acestei formule și vom spune că formula a fost transformată în forma sa normală Skolem.*

3.14 Problema completitudinii calculului predicatelor. Teorema Gödel

În algebra predicatelor, unde a fost examinată logica predicatelor din punct de vedere semantic, am introdus noțiunea de formulă identic adevărată, căreia îi corespunde într-un anumit sens noțiunea de *afirmație tautologic adevărată* din logica propozițiilor. Din alt punct de vedere, în calculul predicatelor a fost introdusă noțiunea de *formulă deductibilă*. În acest caz apare întrebarea firească despre raportul dintre aceste două noțiuni. Din cele demonstrate anterior avem că fiecare formulă deductibilă în calculul predicatelor este în același timp și identic adevărată din punct de vedere semantic.

În mod natural apare întrebarea reciprocă: va fi oare orice formulă identic adevărată din punct de vedere semantic și deductibilă în calculul predicatelor?

În literatura de specialitate această întrebare poartă denumirea de problema completitudinii calculului predicatelor. Problema dată a fost soluționată pozitiv de către matematicianul austriac de origine germana K. Gödel.

Teorema 3.14.1. (Teorema Gödel) *Orice formulă identic adevărată în logica predicatelor este deductibilă în calculul predicatelor.*

În demonstrația acestei teoreme se utilizează următoarea remarcă care poartă un caracter tehnic.

Remarca 3.14.1. *Dacă două formule sunt identic adevărate, atunci din faptul că una dintre ele este identic adevărată rezultă că și cealaltă formulă este la fel identic adevărată.*

Într-adevăr, fie că formulele U și V sunt deductiv echivalente și în același timp formula U este identic adevărată. Din cele demonstrate anterior cunoaștem că toate formulele deductibile din formule identic adevărate sunt la fel formule identic adevărate. În virtutea faptului că formulele U și V sunt deductiv echivalente, atunci V poate fi dedusă din axiomele calculului respectiv și din formula U; prin urmare, avem că și formula V este la fel identic adevărată. În plus, obținem că dacă formulele U și V sunt deductiv echivalente, iar formula U este deductibilă în calculul predicatelor, atunci și formula V este la fel deductibilă în calculul predicatelor. Ultima afirmație rezultă din definiția formulelor deductiv echivalente.

Din cele relatate mai sus urmează că la soluționarea problemei completitudinii calculului predicatelor ne putem limita doar la formulele normale Skolem. Într-adevăr, presupunem că am demonstrat că fiecare formulă normală Skolem identic adevărată este deductibilă în calculul predicatelor. Fie U o formulă arbitrară din calculul predicatelor, iar prin U^* vom nota forma ei normală Skolem. Dacă U este identifc adevărată, atunci U^* este la fel identic adevărată. În acest caz formula U^* este deductibilă în calculul predicatelor și, prin urmare, formula deductiv echivalentă cu ea, adică U, este la fel deductibilă în calculul predicatelor.

3.16 Exerciții propuse pentru lucrul individual

Ex. 1. Să se demonstreze că sunt deductibile următoarele formule:

1) $\forall x \forall y \left(P(x) \rightarrow \left(Q(y) \rightarrow P(x)\right)\right)$;

2) $P(x) \longrightarrow P(x) \vee Q(x)$;

3) $\forall y F(x) \longrightarrow \overline{\exists y \overline{F(y)}}$;

4) $\overline{\overline{\exists x \forall y P(y,x)}} \longrightarrow \big(\exists x \forall y P(y,x) \longrightarrow \exists x \forall y P(y,x)\big)$;

5) $\big(\forall x P(x) \& \forall x Q(x)\big) \to \forall x\big(P(x) \& Q(x)\big)$;

6) $\forall x\big(P(x) \longrightarrow \overline{Q(x)}\big) \longrightarrow \overline{\forall x P(x) \& \exists x Q(x)}$;

7) $\exists x\big(Q(y) \& P(x)\big) \longrightarrow \exists x P(x)$;

8) $\forall x \exists y \forall z \Big(\big(P(x) \& \overline{P(y)}\big) \longrightarrow Q(z)\Big)$.

Ex. 2. Să se demonstreze următoarele formule din axiomele calculului predicatelor şi din lista de formule Γ dată:

1) $P(x) \longrightarrow \forall y Q(y) \vdash \forall x\big(P(x) \longrightarrow \forall y Q(y)\big)$;

2) $\exists x\big(G(y) \longrightarrow F(x)\big) \vdash G(y) \longrightarrow \exists x F(x)$;

3) $\exists x F(x) \longrightarrow G(y) \vdash \forall x\big(F(x) \longrightarrow G(y)\big)$;

4) $\exists x P(x) \longrightarrow \forall x Q(x) \vdash \forall x\big(P(x) \longrightarrow Q(x)\big)$;

5) $\forall x P(x) \longrightarrow \overline{Q(y)} \vdash \exists x\big(P(x) \longrightarrow \overline{Q(y)}\big)$;

6) $G(y) \longrightarrow \exists x F(x) \vdash \exists x\big(G(y) \longrightarrow F(x)\big)$;

7) $P(x), P(x) \longrightarrow \forall y Q(y) \vdash \forall x Q(x)$.

Ex. 3. Să se demonstreze următoarele formule:

1) $\exists x\big(P(x) \longrightarrow Q(y)\big) \sim \big(\forall x P(x) \longrightarrow Q(y)\big)$;

2) $\exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \sim \big(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\big)$;

3) $\Big(\exists z R(z) \vee \big(\exists z R(z) \& \forall x \forall y \overline{Q(x,y)}\big)\Big) \sim \exists z R(z)$;

4) $\forall x\big(F(x) \sim G(x)\big) \vdash \exists x F(x) \sim \exists x G(x)$.

Bibliografie

[1] Novac, L., Cucu, I. *Logica propozițiilor și teoria mulțimilor*. *Note de curs*. Chişinău: CEP USM, 2020.

[2] Novac, L., Cucu, I. *Bazele Matematicii discrete și Logicii matematice*. Chişinău: CEP USM, 2016.

[3] Cucu, I., Rusu, A., Rusu, E. *Elemente de logică matematică*. Chişinău: CEP USM, 2006.

[4] Cucu, I., Prisăcaru, Ch. *Culegere de probleme la logica matematică*. Chişinău: CEP USM, 2003.

[5] Cucu, I., Rusu, A., Rusu, E. *Logica matematică. Prelegeri*. Chişinău: CEP USM, 2003.

[6] Rudeanu, S. *Lecții de calculul predicatelor şi calculul propoziţiilor*. București: Ed. Univ. din București, 1997.

[7] Rudeanu, S. *Curs de bazele informaticii. Logica Matematică, II-Calculul propozițiilor*. Univ. din Bucureşti, 1977.

[8] Мирзоев, М.С., Матросов, В.Л. *Математическая логика. Учебник для бакалавриата.* Москва: Прометей, 2020.

[9] Лихтарников, Л.М., Сукачева, Т.Г. *Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум решения. Учебное пособие*. Изд.4-е. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар, 2009.

[10] Игошин, В.И. *Математическая логика и теория алгоритмов*. Москва: Академия, 2008.

[11] Игошин, В.И. *Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов.* Москва: Академия, 2007.

[12] Лупанов, О.Б. *Введение в математическую логику*. Москва: МГУ, 2007.

[13] Шапорев, С.Д. *Математическая логика. Курс лекций и практических занятий.* СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
[14] Галиев, Ш.И. *Математическая логика и теория алгоритмов*. Казань: КГТУ им. А.Н. Туполева, 2002.
[15] Фролов, И.С. *Элементы математической логики: Учебное пособие для студентов математических специальностей*. Самара: Самарский университет, 2001.
[16] Москинова, Г.И. *Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Учебное пособие*. Москва: Логос, 2000.
[17] Лавров, И.А., Максимова, Л.Л. *Задачи по теории множеств, математической логике алгоритмов*. Изд. 2-е. Москва: Наука, 1986.
[18] Мендельсон, Э. *Введение в математическую логику*. Москва: Наука, 1984.
[19] Гаврилов, Г.П., Сапоженко, А.А. *Сборник задач по дискретной математике*. Москва: Наука, 1977.
[20] Новиков, П.С. *Элементы математической логики.* Москва: Физ.-Мат. лит., 1973.
[21] Клини, С. *Математическая логика*. Москва: Мир, 1973.

Radu Buzatu, Ludmila Novac, Ion Cucu

Calculul propozițiilor și logica predicatelor

Note de curs

Redactare: *Ariadna Strungaru*
Machetare computerizată: *Radu Buzatu*, *Ludmila Novac*

Bun de tipar 20.12.2021. Formatul 60 × 86 1/16.
Coli de tipar 7,0. Coli editoriale 4,0.
Comanda 88. Tirajul 50 ex.

Centrul Editorial-Poligrafic al USM,
str. Al. Mateevici, 60, Chișinău, MD-2009