PROBLEME DE CLASIFICARE A QUASIGRUPURILOR FINITE

Aureliu POSTORONCA

CZU: 512.548.7 aurel.postoronca99@gmail.com

The theory of quasigroups, in particular, of linear quasigroups and T-quasigroups, is intensively developping at present and contributes to the solution of practical problems in areas such as information encryption and coding, in combinatorics, automata theory, etc. [2-4]. Objectives of thesis are study of general properties of quasigroups, in particular, of T-quasigroups and medial quasigroups, study of medial quasigroups with some identities, development of algorithms for classification, up to isomorphism, of finite linear quasigroups over the group $\mathbb{Z}_n$, and of medial quasigroups with some additional properties.

Definiţia 1. Un grupoid (Q, A) se numeşte *quasigrup* dacă pentru orice $a, b \in Q$, ecuaţiile $A(a, x) = b$ şi $A(y, a) = b$ au câte o singură soluţie în Q.

Definiţia 2. Un quasigrup (Q, B) se numeşte *izotop* al quasigrupului (Q, A), dacă există un triplet (α, β, γ) de substituţii ale mulţimii Q, numit izotopie, astfel încât, pentru orice $x, y \in Q$, are loc egalitatea $B(x, y) = \gamma^{-1}A(\alpha(x), \beta(y))$.

Relaţia de izotopie, în particular cea de izomorfism, defineşte o partiţie pe mulţimea tuturor operaţiilor de quasigrup. Problema clasificării quasigrupurilor, abstracţie făcând de izotopie / izomorfism, constă în determinarea numărului de clase în aceste partiţii şi a unor seturi de reprezentanţi ai lor. Această problemă nu este soluţionată integral până în prezent [1-3].

Definiţia 3. [5] Un quasigrup $(Q,\cdot)$ se numeşte *T-quasigrup* dacă există un grup abelian $(Q, +)$, două automorfisme $\varphi, \psi \in Aut(Q, +)$ şi un element $c \in Q$ astfel încât, pentru orice $x, y \in Q$, are loc egalitatea $x \cdot y = \varphi(x) + \psi(y) + c$.

Un quasigrup $(Q,\cdot)$ ce verifică identitatea $(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v)$, se numeşte quasigrup *medial*. Conform Teoremei lui Toyoda [6], quasigrupurile mediale sunt T-quasigrupurile în T-forma cărora cele doua automorfisme comută. În lucrare sunt demonstrate afirmaţiile prezentate în Propoziţiile 1–3, şi clasificările, abstracţie făcând de izomorfism, ale T-quasigrupurilor cu T- grupul $\mathbb{Z}_n$ prezentate în Tabelul 1.

Propoziţia 1. *Un quasigrup medial $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, verifică identitatea Moufang la stânga $x \circ (y \circ (x \circ z)) = ((x \circ y) \circ x) \circ z$ dacă şi numai dacă $\varphi = \psi = \varepsilon$.*

Demonstraţie. Fie că quasigrupul medial $(Q,\circ)$, verifică identitatea Moufang la stânga, atunci au loc egalităţile

$$x \circ (y \circ (x \circ z)) = \varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^2\varphi(x) + \psi^3(z) + \psi^2(c) + \psi(c) + c$$

și

$$((x \circ y) \circ x) \circ z = \varphi^3(x) + \varphi^2\psi(y) + \varphi^2(c) + \varphi\psi(x) + \varphi(c) + \psi(z) + c,$$

deci

$$\varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^2\varphi(x) + \psi^3(z) + \psi^2(c) + \psi(c) =$$
$$= \varphi^3(x) + \varphi^2\psi(y) + \varphi^2(c) + \varphi\psi(x) + \varphi(c) + \psi(z) \quad (1)$$

Din (1), pentru $x = y = z = 0$, avem $\psi^2(c) + \psi(c) = \varphi^2(c) + \varphi(c)$, iar utilizând ultima egalitate în (1), avem

$$\varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^2\varphi(x) + \psi^3(z) = \varphi^3(x) + \varphi^2\psi(y) + \varphi\psi(x) + \psi(z) \quad (2)$$

Luând, succesiv, $x = y = 0$ și $x = z = 0$ în (2) obținem: $\psi^2 = \varepsilon$ și respectiv, $\varphi = \varepsilon$.

Utilizând ultimele două egalități, din (2) rezultă $x + \psi(y) + x + \psi(z) = x + \psi(y) + + \psi(x) + \psi(z) \Longrightarrow \psi = \varepsilon$. Prin urmare, dacă quasigrupul medial $(Q,\circ)$ verifică identitatea Moufang la stânga, atunci $\varphi = \psi = \varepsilon$, și atunci $x \circ y = x + y + c$. Reciproc, dacă $\varphi = \psi = \varepsilon$, atunci în quasigrupul $(Q, \circ)$, unde $x \circ y = x + y + c$, avem: $x \circ (y \circ (x \circ z)) = 2x + y + z + 3c$ și $((x \circ y) \circ x) \circ z = 2x + y + z + 3c$, deci $(Q,\circ)$ verifică identitatea Moufang la stânga. □

Corolar. *Quasigrupurile mediale ce verifică identitatea Moufang la stânga, sunt grupuri abeliene.*

Propoziția 2. *Un quasigrup medial $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, verifică identitatea Bol la stânga $x \circ (y \circ (x \circ z)) = (x \circ (y \circ x)) \circ z$ dacă și numai dacă $\varphi = \psi^2 = \varepsilon$.*

Demonstrație. Fie că quasigrupul medial $(Q,\circ)$, verifică identitatea Bol la stânga, atunci din egalitățile

$$x \circ \big(y \circ (x \circ z)\big) = \varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^2\varphi(x) + \psi^3(z) + \psi^2(c) + \psi(c) + c$$

și

$$\big(x \circ (y \circ x)\big) \circ z = \varphi^2(x) + \varphi^2\psi(y) + \varphi\psi^2(x) + \varphi\psi(c) + \varphi(c) + \psi(z) + c,$$

rezultă

$$\varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^3(z) + \psi^2(c) + \psi(c) =$$
$$= \varphi^2(x) + \varphi^2\psi(y) + \varphi\psi(c) + \varphi(c) + \psi(z) \quad (3)$$

Din (3), pentru $x = y = z = 0$, avem $\psi^2(c) + \psi(c) = \varphi\psi(c) + \varphi(c)$, deci (3) ia forma

$$\varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^3(z) = \varphi^2(x) + \varphi^2\psi(y) + \psi(z) \qquad (4)$$

Luând succesiv $x = y = 0$ și $x = z = 0$ în (4) obînem $\psi^2 = \varepsilon$ și respectiv, $\varphi = \varepsilon$. Prin urmare, dacă quasigrupul medial $(Q,\circ)$ verifică identitatea Bol la stânga, atunci $\varphi = \psi^2 = \varepsilon$. Reciproc, fie că $\varphi = \psi^2 = \varepsilon$, atunci în quasigrupul $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = x + \psi(y) + c$, au loc egalitățile: $x \circ \big(y \circ (x \circ z)\big) = 2x + \psi(y) + \psi(z) + \psi(c) + 2c$ și $\big(x \circ (y \circ x)\big) \circ z = 2x + \psi(y) + \psi(z) + \psi(c) + 2c$, deci $(Q,\circ)$ verifică identitatea Bol la stânga. □

Corolar. *Quasigrupul medial* $(Q,\circ)$, *unde* $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, *verifică identitatea Bol la dreapta* $((z \circ x) \circ y) \circ x = z \circ ((x \circ y) \circ x)$ *dacă și numai dacă* $\varphi^2 = \psi = \varepsilon$.

Propoziția 3. *Un quasigrup medial* $(Q,\circ)$, *unde* $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, *verifică legea flexibilității* $(x \circ y) \circ x = x \circ (y \circ x)$ *dacă și numai dacă* $\varphi^2 + \psi = \varphi + \psi^2$ și $\varphi(c) = \psi(c)$.

Demonstrație. Fie că quasigrupul medial $(Q,\circ)$, verifică legea flexibilității, atunci din egalitățile $(x \circ y) \circ x = \varphi^2(x) + \varphi\psi(y) + \varphi(c) + \psi(x) + c$ și $x \circ (y \circ x) = \varphi(x) + + \psi\varphi(y) + \psi^2(x) + \psi(c) + c$, obținem

$$\varphi^2(x) + \varphi(c) + \psi(x) = \varphi(x) + \psi^2(x) + \psi(c), \qquad (5)$$

iar luând $x = 0$ în ultima egalitate, avem $\varphi(c) = \psi(c)$, deci (5) ia forma $\varphi^2(x) + \psi(x) = \varphi(x) + \psi^2(x)$, de unde rezultă $\varphi^2 + \psi = \varphi + \psi^2$. Reciproc, dacă $\varphi^2 + \psi = \varphi + \psi^2$ și $\varphi(c) = \psi(c)$, atunci quasigrupul medial $(Q,\circ)$, unde $x \circ y = \varphi(x) + \psi(y) + c$, verifică legea flexibilității, deoarece $(x \circ y) \circ x = \varphi^2(x) + \varphi\psi(y) + \varphi(c) + \psi(x) + c = \varphi(x) + \psi\varphi(y) + \psi^2(x) + \psi(c) + + c = x \circ (y \circ x)$, pentru orice $x, y \in Q$. □

De asemenea, în lucrare au fost elaborați algoritmi (și programele respective în Pyton), fiind obținute clasificări, abstracție făcând de izomorfism, pentru: a) T-quasigrupurile cu T- grupul $\mathbb{Z}_n$ ($n \leq 6$); b) quasigrupurilor mediale finite, de ordin $n \leq 6$, peste grupul $\mathbb{Z}_n$, ce verifică unele condiții suplimentare, precum identitatea Moufang, identitatea Bol și legea flexibilității.

Rezultatele obținute sunt prezentate în Tabelul 1.

Tabelul 1

Ordin	T-quasigrupuri total peste $\mathbb{Z}_n$	Clase de T-quas. neizomorfe între ele, peste $\mathbb{Z}_n$	Quasigrupuri mediale Moufang peste $\mathbb{Z}_n$	Clase de quas. mediale Moufang neizomorfe între ele, peste $\mathbb{Z}_n$	Quasigrupuri mediale Bol st. peste $\mathbb{Z}_n$	Clase de quas. mediale Bol st. neizomorfe între ele, peste $\mathbb{Z}_n$	Quasigrupuri mediale flexibile peste $\mathbb{Z}_n$	Clase de quas. mediale flexibile neizomorfe între ele, peste $\mathbb{Z}_n$
2	2	1	2	1	2	1	2	1
3	12	4	3	1	6	2	6	2
4	16	4	4	1	8	2	8	2
5	80	8	5	1	10	2	22	4
6	24	4	6	1	12	2	12	2

Referințe:

1. BELOUSOV V. Fundamentele teoriei quasigrupurilor şi a buclelor. (în l. rusă) Nauka, Moscova, 1967. 222 p.
2. DENES J., KEEDWELL A. D. Latin squares and their applications: Second edition. Elsevier, 2015, 440 p.
3. SÂRBU P. Teoria quasigrupurilor. CEP USM, 2014, 172 p.
4. GOIAN I., SÂRBU P., TOPALĂ A. Grupuri şi inele. CEP USM, 2005, 246 p.
5. NEMEC P. and KEPKA T., T-quasigroups. Part I,II, Acta Universitatis, Carolinae Math. et Physica. Vol.12, no.1,2,1971. P.39-49; 31-49
6. TOYODA K.. On axioms of linear functions. Proc. Imp. Acad. Tokyo., 1941, vol. 17, p. 221-227.

Recomandat
Parascovia SÎRBU, *dr., conf. univ.*