CZU: 517.31:[53 + 62]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНИКЕ

DETERMINING THE VALUES OF SINGULAR INTEGRALS WITH APPLICATIONS IN PHYSICS AND ENGINEERING

Alexandr A. BARSUK ORCID: 0000-0003-0601-545X
Universitatea de Stat din Moldova e-mail: a.a.barsuk@mail.ru

Florentin PALADI ORCID: 0000-0001-8099-9413
Universitatea de Stat din Moldova e-mail: fpaladi@yahoo.com

Abstract. *The analysis of numerous problems in physics and mechanics naturally leads to singular integrals. In particular, we come to such integrals in the study of the processes occurring in electron plasma first emitted in the fundamental studies of A.A. Vlasov. We show that the calculation of the singular integral in the sense of the principal value leads to its true value and represents a way of uncertainty disclosure.*
Keywords*: Singular integral; Cauchy principal value; parametric representation of solutions.*

Под сингулярным интегралом всюду ниже будем понимать интеграл от вещественной функции одной переменной, имеющей внутри интервала интегрирования полюс первого порядка, т.е. интегралы вида

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx, \qquad \varphi(c)\neq 0, \qquad a<c<b, \tag{1}$$

где пределы интегрирования a, b могут обращаться и в бесконечность. В математической литературе такие интегралы принадлежат к классу интегралов типа Коши (см. например [1]). Общепринято считать, что интеграл (1) не существует, и в связи с этим рассматривается его регуляризованное значение вычисляемое в смысле Коши, т.е.

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x-c}dx+\int_{c+\varepsilon}^b\frac{\varphi(x)}{x-c}dx\right), \quad \varepsilon>0. \tag{2}$$

Подчеркнем, что несмотря на кажущимся на первый взгляд искусственным способ регуляризации (2), получающиеся при его использовании результаты приводят к корректному описанию исследуемых проблем (см. например [2]).

Ниже излагается более тщательный анализ сингулярного интеграла (1), приводятся его точные значения для конкретных классов этих интегралов и выясняется их связь с процедурой регуляризации (2), т.е. с их значениями в смысле главного значения.

С этой целью представим интеграл I (1) в эквивалентной форме

$$I=\int_a^b\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx+\int_a^b\frac{\varphi(c)}{x-c}dx=I_1+\varphi(c)I_2, \quad I_1=\int_a^b\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx, \quad I_2=\int_a^b\frac{dx}{x-c} \tag{3}$$

и отметим что интеграл I_1 принадлежит уже к классу римановских интегралов для вычисления значений которых могут быть применены методы классического анализа и, таким образом, все особенности сингулярного интеграла I (1) сконцентрированы в интеграле I_2 (3), анализ которого существенно упрощается по сравнению с анализом исходного сингулярного интеграла

I . В свою очередь интеграл I_2 в результате ряда простых преобразований эквивалентным образом представляется в виде

$$I_2 = \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \int_{a-c}^{b-c} \frac{d\tau}{\tau} = \int_{-(c-a)}^{b-c} \frac{d\tau}{\tau} = \int_{-(c-a)}^{c-a} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{(c-a)}^{b-c} \frac{d\tau}{\tau} = I_{21} + I_{22},$$

где $I_{21} = \int_{-(c-a)}^{c-a} \frac{d\tau}{\tau}$, $I_{22} = \int_{(c-a)}^{b-c} \frac{d\tau}{\tau} = \ln\frac{b-c}{c-a}$. Отметим, что I_{21} представляет собой интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. В результате приходим к заключению, что все особенности вычисления сингулярного интеграла I (3) сводятся к вычислению сингулярного интеграла вида

$$I_S = \int_{-d}^{d} \frac{d\tau}{\tau} \tag{4}$$

где, в частности, пределы интегрирования в (4) могут обращаться и в бесконечность.

Покажем, что значение сингулярного интеграла I_S в точности равно нулю. С этой целью представим I_S в эквивалентном виде

$$I_S = \int_{-d}^{d} \frac{d\tau}{\tau} = \int_{-d}^{0} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{0}^{d} \frac{d\tau}{\tau} = -\int_{0}^{d} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{0}^{d} \frac{d\tau}{\tau} = -I_{S0} + I_{S0} \quad , \quad I_{S0} = \int_{0}^{d} \frac{d\tau}{\tau} \tag{5}$$

и, таким образом, $I_S = -\infty + \infty$ и представляет собой неопределенное выражение, подлежащее дополнительному анализу для раскрытия неопределенности. В связи с этим подчеркнем, что в соответствии с геометрическим смыслом интеграла значение I_S представляет собой площадь фигуры образованной гиперболой $f(x) = \frac{1}{x}$, горизонтальной осью *ox* и вертикальными линиями $x = -d$, $x = d$ (или вертикальными линиями $x = 0$, $x = d$ в случае интеграла I_{S0} (5)). Отметим, что отвечающая сингулярному интегралу I_S геометрическая фигура состоит из двух частей ограниченными вертикальными линиями $x = -d$, $x = 0$ с отрицательной площадью и $x = 0$, $x = d$ -- с положительной. Подчеркнем, что каждая из составляющих фигур преобразованием инверсии $(x, y) \to (-x, -y)$ точно преобразуется без каких-либо деформаций одна в другую, и, таким образом, имеем $\int_{-d}^{0} \frac{d\tau}{\tau} = -\int_{0}^{d} \frac{d\tau}{\tau}$ и в результате приходим к равенству

$$I_S = -\int_{0}^{d} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{0}^{d} \frac{d\tau}{\tau} = -I_{S0} + I_{S0} = 0$$

К этому же заключению приходим и с использованием алгебраических рассуждений. Имеем $-I_S = -\int_{-d}^{d} \frac{d\tau}{\tau} = -\int_{d}^{-d} \frac{d\tau}{\tau} = \int_{-d}^{d} \frac{d\tau}{\tau} = I_S$ и, таким образом, получаем $I_S = -I_S$ откуда следует $I_S = 0$

Таким же образом может быть проанализирован интеграл от произвольной нечетной функции в симметричных пределах

$$I = \int_{-A}^{A} f^{a}(x)dx, \qquad f^{a}(-x) = -f^{a}(x)$$

Имеем $-I = -\int_{-A}^{A} f^{a}(x)dx = \int_{-A}^{A} f^{a}(-x)dx = -\int_{A}^{-A} f^{a}(x)dx = \int_{-A}^{A} f^{a}(x)dx = I$ и, следовательно, $I = -I$, откуда следует $I = 0$ и, таким образом,

$$I = \int_{-A}^{A} f^{a}(x)dx = 0 \tag{6}$$

Отметим, что равенство (6) справедливо и для бесконечных пределов.

Наконец обратимся к вычислению I_S (4) с помощью введения параметра $\alpha > 0$ и определения

$$I_S(\alpha) = \int_{-d}^{d} \frac{e^{-\frac{\alpha}{|x|}}dx}{x}, \quad \alpha \geq 0,$$

при этом имеем $I_S(\alpha = 0) = I_S$, $I_S(\infty) = 0$.

Подчеркнем, что для всех значений параметра $\alpha > 0$ $I_S(\alpha)$ представляет собой сходящийся интеграл, а $I_S(\alpha)$ непрерывную функцию параметра α. Зависимость $I_S(\alpha)$ может быть вычислена в явном виде. С этой целью продифференцировав $I_S(\alpha)$ по параметру α последовательно имеем

$$I'_S(\alpha) = -\int_{-d}^{d} \frac{e^{-\frac{\alpha}{|x|}}dx}{x|x|} = \int_{-d}^{0} \frac{e^{\frac{\alpha}{x}}dx}{x^2} - \int_{0}^{d} \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}dx}{x^2} = \int_{0}^{d} \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}dx}{x^2} - \int_{0}^{d} \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}dx}{x^2} = -\int_{0}^{d} e^{-\frac{\alpha}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) + \int_{0}^{d} e^{-\frac{\alpha}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \int_{1/d}^{\infty} e^{-\alpha\tau}d\tau - \int_{1/d}^{\infty} e^{-\alpha\tau}d\tau = -\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\alpha}{d}} + \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{\alpha}{d}} = 0.$$

Таким образом, приходим в результате к дифференциальному уравнению $I'_S(\alpha) = 0$ и его решению $I_S(\alpha) = Const$, а с учетом значения $I_S(\infty) = 0$ и к окончательному результату $I_S(\alpha = 0) = I_S = 0$.

Установим теперь связь между полученным точным значением сингулярного интеграла I_S (4) $I_S = 0$ и его значением вычисляемом в смысле главного значения.

Имеем

$$v.P.I_S = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-d}^{-\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\varepsilon}^{d} \frac{d\tau}{\tau}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(-\int_{\varepsilon}^{d} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\varepsilon}^{d} \frac{d\tau}{\tau}\right) = 0$$

и, следовательно, вычисление сингулярного интеграла в смысле главного значения приводит к точному его значению.

Таким образом, вычисление сингулярного интеграла в смысле главного значения приводит к его истинному значению и представляет собой способ раскрытия неопределенности $\infty - \infty$

возникающей при вычислении этого класса интегралов. Так, например, вычисление значения I_S в соответствии с процедурой

$$.I_S = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\left(\int_{-d}^{-\varepsilon_1}\frac{d\tau}{\tau}+\int_{\varepsilon_2}^{d}\frac{d\tau}{\tau}\right)=\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\neq 0,\ \ \varepsilon_1\neq\varepsilon_2,\quad \varepsilon_1,\varepsilon_2>0$$

и в зависимости от соотношения $.\varepsilon_1,\varepsilon_2$ может принимать любое значение.

Библиография:

1. WHITTAKER, E.T., WATSON, G.N. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press; 4th edition, 1996. 620 p.
2. BARSUK, A.A., PALADI, F. Parametric representation, asymptotic and bifurcation analyses of the electronic plasma oscillations. 2024, working paper.

Autorii menționează cu recunoștință sprijinul financiar oferit de către Ministerul Educației și Cercetării în cadrul proiectului PHYSTECH cu cifrul 011210.