АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Александр БАРСУК

Исследование динамического поведения движущихся упругих систем в течение уже длительного времени привлекает пристальное внимание исследователей. Отметим в этой связи цикл работ, выполненных в последнее время коллективом исследователей под руководством Prof. N.V. Banichuk и Prof. P.Neittaanmaki и посвященных моделированию процессов изготовления бумаги [1].

Особый интерес для этого класса задач представляет анализ устойчивости движущихся систем. Общим методом исследования устойчивости упругих систем является динамический метод [2]. В соответствии с этим методом, решается задача о гармонических колебаниях исследуемой системы с последующим анализом поведения частот в зависимости от параметров системы. При этом появление комплексных частот интерпретируется как потеря устойчивости по динамическим формам и соответствует потере устойчивости по Ляпунову, в то время как обращению частот в ноль отвечает потеря устойчивости по статическим формам, что соответствует критерию Эйлера потери устойчивости.

В данном сообщении динамический анализ системы дополняется бифуркационным анализом соотношений, отвечающих условиям разрешимости соответствующих спектральных задач, приводящим к существенному расширению динамического метода анализа упругой устойчивости. В частности, показывается, что как статический, так и динамический методы в теории устойчивости приводят к критериям потери устойчивости по Ляпунову.

В качестве модельной задачи, допускающей решение в замкнутой аналитической форме, рассматривается задача о свободных гармонических колебаниях движущейся с постоянной скоростью V и шарнирно закрепленной на концах панели (1D Модель). В общепринятых обозначениях и в безразмерных переменных математическая формулировка этой спектральной краевой задачи записывается в виде

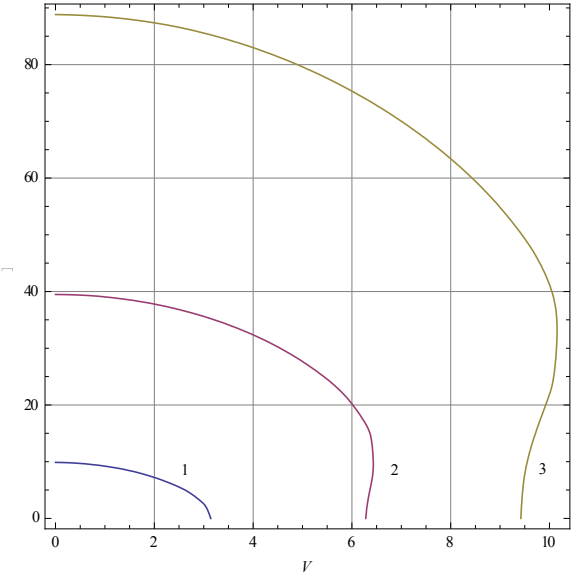
$$u_{xxxx} + \left(V^2 - V_0^2\right) u_{xx} + 2i\omega V u_x - \omega^2 u = 0,$$
$$u(0) = u(1) = 0,\ u_{xx}(0) = u_{xx}(1) = 0. \qquad (1)$$

Решение задачи (1) может быть получено стандартными вычислениями. Приведем решение (1) для случая $V_0 = 0$, что отвечает движению панели без осевых усилий, для которого решение имеет наиболее простой вид.

$$\Delta(\omega, V) = \sqrt{V^4 - 16\omega^2}\left(\cos V - \cos\frac{\sqrt{V^2+4\omega}}{2}\cos\frac{\sqrt{V^2-4\omega}}{2}\right) +$$

$$+ \left(V^4 - 16\omega^2\right)\sin\frac{\sqrt{V^2+16\omega}}{2}\sin\frac{\sqrt{V^2-16\omega}}{2} = 0. \qquad (2)$$

Уравнением (2) определяются зависимости $\omega(V)$ частот гармонических колебаний панели от ее скорости перемещения V, а график этих зависимостей для первых трех ветвей представлен ниже.



Dependencies of $\omega(V)$ for $V_0 = 0$: 1. $\omega_1(V)$; 2. $\omega_2(V)$; 3. $\omega_3(V)$.

Потеря устойчивости панели как по статическим, так и по динамическим формам происходит при значениях параметров $\omega = \omega_*$ и $V = V_*$, являющихся одновременно и точками бифуркации решений уравнения $\Delta(\omega, V) = 0$ (2) и определяемых из решения системы нелинейных уравнений

$$\Delta(\omega, V) = 0, \frac{\partial\Delta(\omega, V)}{\partial\omega} = 0. \qquad (3)$$

Пусть (ω_*, V_1^*), (ω_*, V_2^*), ... – решения системы нелинейных уравнений (3). В малой окрестности каждой из бифуркационных точек

(ω_k, V_k^*) асимптотическое поведение зависимостей $\omega(V)$ описывается выражениями

$$\omega(V) \approx \omega_k \pm \alpha_k \sqrt{V - V_k^*}, \quad |V - V_k^*| << 1, \tag{4}$$

где при выполнении условия $\partial(\omega_k, V_k^*)/\partial V \neq 0$

$$\alpha_k = -\frac{\partial(\omega_k^*, V_k^*)/\partial V}{\partial(\omega_k^*, V_k^*)/\partial \omega}.$$

Таким образом, коэффициент α_k в (4) может принимать либо вещественные, либо чисто мнимые значения

Из представления зависимости $\omega(V)$ в форме (4) следует, что в малой окрестности точки бифуркации (ω_k, V_k^*) частота гармонических колебаний всегда принимает комплексные значения, при этом для вещественных значений коэффициента α_k частота становится комплексной при $V < V_k^*$, в то время как при мнимых значениях – при $V > V_k^*$.

Появление комплексных значений частот (и одновременно комплексно сопряженных к ним) приводит к экспоненциальному росту перемещений системы, что соответствует определению неустойчивости по Ляпунову.

Отметим, что определяемая выражением (2) зависимость $\Delta(\omega, V)$ представляет собой четную функцию переменной ω и в силу этого имеем $\partial(\omega, V)/\partial\omega = 0$ при $\omega = 0$ и таким образом часть бифуркационных точек находится на оси V. Бифуркационные значения V для этого класса точек даются выражениями $V_k^2 = c^2\pi^2$, $k = 1,2,3\ldots$.

Литература:

1. BANICHUK, N., JERONEN, J., NEITTAANMÄKI, P., SAKSA, T., TUOVINEN, T. *Mechanics of moving materials.* Finland, 2013.
2. BOLOTIN, V.V. *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*. N.Y.: Pergamon Press, 1963.